

УДК 532.526

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
НА ВРАЩАЮЩИХСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНУСАХ**

ПОКРОВСКИЙ А. Н., ШМАНЕНКОВ В. Н., ЩУЧИНОВ В. М.

Исследование пограничного слоя на осесимметричных конусах, вращающихся вокруг продольной оси, проводилось ранее рядом авторов [1-7]. Впервые точное решение уравнений ламинарного пограничного слоя на вращающемся конусе было дано в [2] при больших угловых скоростях вращения тела. В дальнейшем применение приближенных теоретических [3, 4] и экспериментальных методов исследования [5, 6] позволили установить целый ряд характерных свойств таких течений. С появлением ЭВМ данная задача стала рассматриваться в точной постановке путем решения уравнений трехмерного пограничного слоя численными методами [7, 8]. Все полученные теоретические результаты касались в основном исследования характеристик ламинарного пограничного слоя при небольших скоростях вращения. Для турбулентного пограничного слоя результаты были получены либо экспериментальным путем, либо на основании приближенных расчетных методов.

В данной работе представлен метод решения трехмерных уравнений ламинарного и турбулентного пограничных слоев на остром вращающемся осесимметричном конусе летящем под углом атаки α . Выявлены новые свойства полученных решений и проведено сопоставление с результатами других авторов.

Система уравнений, описывающая течение в трехмерных ламинарном и турбулентном пограничных слоях, на осесимметричном теле в ортогональной системе координат, имеет вид [9, 10]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(\rho ru) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho rv) = 0 \\ & \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \rho v \frac{\partial u}{\partial \xi} - \rho \frac{w^2}{r} \frac{dr}{dx} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \\ & \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \rho v \frac{\partial w}{\partial \xi} + \rho \frac{uw}{r} \frac{dr}{dx} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu_{ef} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \\ & \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho \frac{w}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} + \rho v \frac{\partial h}{\partial \xi} = \mu_{ef} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right] + u \frac{\partial p}{\partial x} + \\ & \quad + \frac{w}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k_{ef} \frac{\partial h}{\partial \xi} \right) \\ & p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \rho h, \quad \frac{\mu}{\mu_e} = \left(\frac{h}{h_e} \right)^{0,885}, \quad Pr = 0,72, \quad Pr_t = 0,9 \\ & \mu_{ef} = \mu \left(1 + \frac{\varepsilon}{\mu} \Gamma \right), \quad k_{ef} = \frac{\mu}{Pr} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{Pr}{Pr_t} \Gamma \right) \end{aligned} \tag{1}$$

Ортогональная система координат x, ξ, φ выбрана таким образом, что начало координат совпадает с вершиной конуса, координата x отсчитывается вдоль образующей, координата ξ — по нормали к поверхности конуса, а угол φ — от наветренной образующей; u, w, v — проекции вектора скорости на оси координат x, φ и ξ соответственно; $p, \rho, h, \mu, \varepsilon$ — давле-

ние, плотность, удельная энтальпия, молекулярная и турбулентная вязкости газа; Pr и Pr_t — молекулярное и турбулентное число Прандтля; r — радиус поперечного сечения тела. Величина $\Gamma = \Gamma(x, \varphi)$ характеризует перемежаемость при переходе от ламинарного течения к турбулентному и изменяется в диапазоне $0 \leq \Gamma \leq 1$ [11]. Предполагается, что турбулентная вязкость является скалярной функцией осредненных параметров и не зависит от направления координат. Для определения турбулентной вязкости используется двухслойная модель [12], в которой внутренняя и внешняя вязкости $\varepsilon_i, \varepsilon_o$ равны

$$\varepsilon_i = \rho k_1^2 \xi^2 \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{\xi \rho}{26 \mu} \left(\frac{1}{\rho} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_w + \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/2} \right] \right\}^2$$

$$\varepsilon_o = \rho k_2 u_e \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) d\xi \left[1 + 5,5 \left(\frac{\xi}{\delta} \right)^6 \right]^{-1}, \quad k_1 = 0,4, \quad k_2 = 0,0168$$

Индекс e относится к параметрам на внешней границе пограничного слоя, ∞ — к параметрам набегающего потока, w — к параметрам на поверхности тела, T — к характеристикам турбулентного течения.

Граничные и начальные условия для системы уравнений (1)

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad w = \omega r, \quad h = h_w, \quad \xi = 0 \\ u \rightarrow u_e, \quad w \rightarrow 0, \quad h \rightarrow h_e, \quad \xi \rightarrow \infty \\ u = u_0(\xi), \quad w = w_0(\xi), \quad h = h_0(\xi), \quad x = x_0 \end{aligned} \quad (2)$$

где ω — угловая скорость вращения конуса.

Система уравнений (1) приводится к безразмерному виду путем использования величин

$$\xi_1 = \frac{\xi}{L} \sqrt{Re_1}, \quad v_1 = v \frac{\sqrt{Re_1}}{V_M}, \quad Re_1 = \frac{\rho_\infty V_M L}{\mu_\infty}$$

Здесь V_M — значение максимальной скорости набегающего потока.

Затем система (1) преобразуется к переменным Крокко $x, \varphi, u/u_e$ с искомыми функциями $\tau = (\mu_e \partial u / \partial \xi)^2, w, h$. Преимущество преобразования Крокко заключается в том, что область интегрирования находится в пределах $0 \leq u/u_e \leq 1$. Для получения решения системы (1) с условиями (2) используется конечно-разностный метод [13], имеющий второй порядок точности по u/u_e и φ и первый по x . При решении краевой задачи по нормали к поверхности применяются методы квазилинеаризации и скалярной прогонки [14].

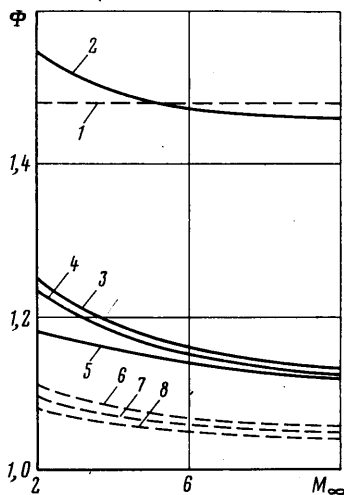
Рассмотрим течение в сжимаемом ламинарном и турбулентном пограничных слоях на остром, вращающемся вокруг своей продольной оси круговом конусе при $\alpha = 0$. Подобная задача о течении в ламинарном пограничном слое была решена в работе [2] разложением в ряды по малому параметру $\omega r / u_e$. Было показано, что для определения местного коэффициента трения в поперечном направлении C_φ необходимо знать только величину продольного коэффициента трения C_f на конусе при $\omega = 0$, причем

$$\Phi_1 = C_\varphi u_e / C_f \omega r = \text{const} = 1,48 \quad \text{при} \quad \omega r / u_e < 1$$

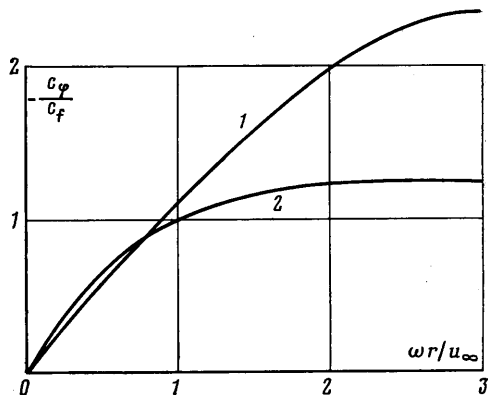
$$C_f = \frac{2\mu_w}{\rho_\infty u_\infty^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_w; \quad C_\varphi = \frac{2\mu_w}{\rho_\infty u_\infty^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_w; \quad \Phi = \frac{C_\varphi u_\infty}{C_f \omega r}$$

Это позволяет найти момент демпфирования относительно продольной оси за счет сил трения, зная только коэффициент трения C_f на конусе при $\omega = 0$.

В данной работе представлены результаты численного решения системы (1) с граничными и начальными условиями (2) при числах Маха $M_\infty = 2-10$, отношении температуры поверхности T_w к полной температуре T_0 , $0,2 \leq g_w \leq 0,9$ ($g_w = T_w/T_0$) на конусе для ламинарного и турбулентного течения в пограничном слое. Оказалось, что если течение в пограничном слое ламинарное, то величина Φ_1 монотонно уменьшается от 1,55 до 1,45 с ростом числа M_∞ (фиг. 1, кривая 2). Там же пунктиром (кривая 1) нанесены результаты работы [2]. Для турбулентного течения в пограничном слое величина Φ_1 зависит, кроме того, от числа $Re_2 = \rho_\infty u_\infty R / \mu_\infty$, R — радиус миделя конуса (фиг. 1, кривая 3, 4, 5 для чисел $Re_2 = 10^6; 10^7; 10^8$ со-



Фиг. 1



Фиг. 2

ответственно). Заметим, что зависимость величины Φ_1 от чисел M_∞ и Re_2 можно получить приближенным методом. Рассмотрим интегральное соотношение количества движения в продольном и поперечном направлениях (см., например, [1, с. 238]). Применяя метод [15], можно получить, что

$$\Phi_1 = -\frac{1+A}{1-\ln 2+A}, \quad A = 0,4 \sqrt{\frac{2 \rho_w u_e}{C_f \rho_\infty u_\infty}}$$

Результаты расчетов по этой формуле для $Re_2 = 10^6; 10^7; 10^8$ показаны на фиг. 1 пунктиром 6, 7, 8. Видно, что максимальное отличие приближенных формул от точного расчета не превосходит 12%. Было установлено, что во всех приведенных на фиг. 1 случаях величина Φ_1 не зависит от температурного фактора g_w . Данные, представленные на фиг. 1, получены при $\omega R/u_\infty = 2 \cdot 10^{-4}$ для острого конуса с углом полураствора $\theta_k = 10^\circ$. С увеличением скорости вращения конуса вокруг своей оси линейность функции C_φ/C_f нарушается. На фиг. 2 приведено изменение величины C_φ/C_f относительно скорости вращения $\omega R/u_\infty$ для турбулентного (кривая 1) и ламинарного (кривая 2) пограничных слоев при $Re_2 = 10^6$ и $M_\infty = 2$. Видно, что отличие от линейного закона изменения величины C_φ/C_f на 10% достигается при $\omega R/u_\infty = 1,6$ для турбулентного слоя и $\omega R/u_\infty = 0,46$ для ламинарного. Заметим, что для ламинарного слоя это соотношение не зависит от числа Маха в диапазоне $2 \leq M_\infty \leq 20$.

Эти результаты показывают предел применимости линейной теории и говорят о консервативном характере течения в турбулентном пограничном слое на вращающемся конусе. Заметим, что важной характеристикой демпфирующего свойства пограничного слоя вращающегося тела является

коэффициент демпфирующего момента m_x° , определяемый выражением

$$m_x^\circ = -\frac{2u_\infty}{\omega L^2 R^2} \int_0^x C_{\varphi} r^2 dx$$

где L — расстояние от критической точки до миделевого сечения вдоль оси тела.

Рассмотрим задачу об определении параметров ламинарного пограничного слоя на вращающемся остром конусе при наличии продольного градиента давления ($\alpha=0$). Подобные задачи возникают, например, при обтекании конуса с «юбкой».

Система уравнений (1) в силу симметрии течения по углу φ существенно упрощается. Разложим в ряд по целым степеням малого параметра $\omega r/u_e$ все газодинамические функции, входящие в систему (1), и ограничимся первыми членами [2]. Тогда, используя преобразования

$$\xi = \frac{x}{3}, \quad \eta = \sqrt{\frac{3 \operatorname{Re} x}{2}} \frac{1}{x} \int_0^{\xi} \frac{\rho}{\rho_e} d\xi, \quad \psi = \sqrt{2} \mu_e \operatorname{Re}^{0,5} r f(\xi, \eta)$$

$$f' = \frac{u}{u_e}, \quad \varphi_1 = \frac{w}{\omega r}, \quad \mu \sim h, \quad \operatorname{Pr}=1, \quad g_w=1$$

где ψ — функция тока, придем к следующей системе дифференциальных уравнений и граничных условий:

$$f''' + f f'' + \beta(1-f'^2) = 0$$

$$\varphi_1'' + f \varphi_1' - \frac{4}{3} f' \varphi_1 = 0$$

$$\beta = 2 \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_e^2 \right) \xi \frac{d \ln u_e}{dx}, \quad f' = \frac{df}{d\xi} \quad (3)$$

$$f=f'=0, \quad \varphi_1=1, \quad \eta=0, \quad f_1' \rightarrow 1, \quad \varphi_1 \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty \quad (4)$$

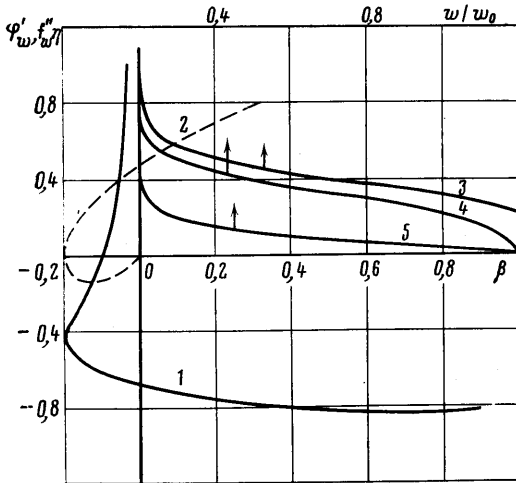
Внешние параметры предполагаются такими, что величина β остается постоянной во всей области течения. Первое уравнение системы (3) представляет собой известное уравнение Фолкнера — Скэн [1], для которого получены автомодельные решения при различных значениях β [16]. Второе уравнение системы (3) совпадает с соответствующим уравнением работы [2].

Таким образом, решение краевой задачи (3), (4) сводилось лишь к интегрированию второго линейного уравнения системы (3). Найденные значения φ_w' для соответствующих значений β представлены на фиг. 3 (кривая 1). Там же нанесены пунктиром (кривая 2) значения f_w'' из решений уравнения Фолкнера — Скэн. Видно, что в области положительных β величина $\varphi_{1w}' < 0$ и изменяется незначительно. Отрицательный знак φ_{1w}' свидетельствует о том, что возникающий момент сил трения препятствует вращению тела. При $\beta < 0$ в силу двужначности решения уравнения Фолкнера — Скэн параметр φ_{1w}' также имеет двойное значение. Для нижней ветви решений при $\beta \rightarrow 0$ параметр φ_{1w}' начинает интенсивно увеличиваться, пересекая ось $\varphi_{1w}'=0$ в точке $\beta=-0,1$, а затем стремится к бесконечности. Этот факт говорит о том, что в области возвратных токов при $\beta \geq -0,1$ возникает момент сил трения, который способствует вращению тела. Характерные профили $\varphi_1 = w/\omega r$ при $\beta=-0,08$ (верхняя и нижняя ветви) и $-0,1$ приведены в правом верхнем углу фиг. 3 с индексами 5, 3, 4 соответственно. Видно, что при $\beta \rightarrow 0$ от значения $\beta=-0,1$ профиль поперечной скорости φ_1 имеет максимальное значение не на стенке, а внутри пограничного слоя. Происходит передача кинетической энергии вблизи стенки от продольного течения к поперечному.

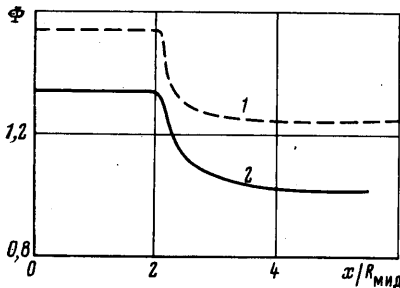
При обтекании конуса, вращающегося вокруг продольной оси и летящего под углом атаки α , картина течения в пограничном слое становится несимметричной относительно плоскости тангажа.

В этом случае в системе уравнений (1) сохраняются члены с производной $\partial/\partial\varphi$, отличной от нуля, что, естественно, усложняет решение задачи. Влияние параметра α на величину $\Phi_1(x)$ проследим на примере расчета обтекания конуса при $M_\infty=2$ и $\alpha=2,5^\circ$ (фиг. 4, кривая 2). В рассма-

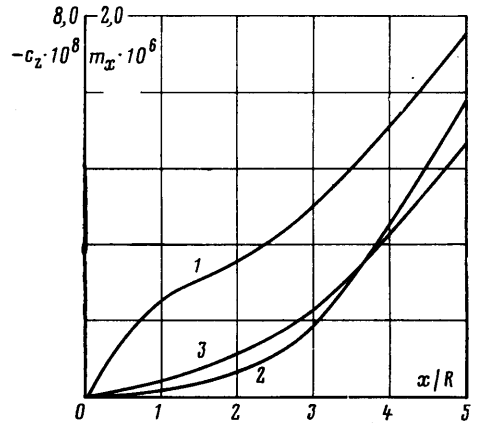
триваемом случае число $Re_2 = -10^6$, что обеспечивало на поверхности конуса три режима течения в пограничном слое: ламинарный при $X^*=X/R=2$, переходный при $2 \leq X^* \leq 4$, турбулентный при $X^* > 4$. На этой же фигуре приведено также значение Φ_1 при $\alpha=0$ (кривая 1). Наблюдается уменьшение величины Φ_1 с ростом угла атаки α , при этом в ламинарном пограничном слое это изменение более заметное. Интересно отметить, что параметр Φ_1 практически не зависит от угла φ как в ламинарном, так и в турбулентном пограничном слое.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

В силу несимметричности течения в пограничном слое на вращающемся конусе возникают дополнительные боковая сила F_z и моменты M_y и M_z , обусловленные поверхностным трением. Коэффициенты этой силы и моментов

$$C_z = \frac{2F_z}{\rho_\infty u_\infty^2 \pi r^2} = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^x \int_0^{2\pi} (C_t \sin \theta_k \sin \varphi + C_\varphi \cos \varphi) r dx d\varphi$$

$$m_x = \frac{2M_x}{\rho_\infty u_\infty^2 \pi r^3} = -\frac{1}{\pi r^3} \int_0^x \int_0^{2\pi} C_\varphi r^2 dx d\varphi$$

$$m_y = \frac{2M_v}{\rho_\infty u_\infty^2 \pi r^3} = \frac{1}{\pi r^3} \int_0^x \int_0^{2\pi} (-C_v \operatorname{ctg} \theta_k \cos \varphi) r^2 dx d\varphi$$

даны на фиг. 5 (C_z — кривая 1, m_x — кривая 2, m_y — кривая 3) в зависимости от текущей координаты x/R для случая, рассмотренного выше. Представленные кривые характеризуют порядок дополнительных сил и моментов и их зависимость от числа Рейнольдса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
2. *Shingworth C. R.* The laminar boundary layer of a rotating body of revolution.— *Phil. Mag.*, 1953, v. 44, № 351, p. 389–403. (Рус. перев.: *Механика*. Сб. пер. и обзор. иностр. период. лит., 1954, № 2, с. 31–47. Иллигворт К. Ламинарный пограничный слой вращающегося осесимметричного тела).
3. *Sedney R.* Laminar boundary layer on a spinning cone at small angles of attack in a supersonic flow.— *J. Aeronaut. Sci.*, 1957, v. 24, № 6, p. 430–436.
4. *Петров Г. В.* Пограничный слой на вращающемся цилиндре в осевом потоке.— *ПМТФ*, 1976, № 4, с. 65–70.
5. *Okamoto T., Yagita M., Kamijima Y.* Experimental investigation on the boundary layer flow over a rotating cone — cylinder body in a uniform stream.— *Bull. J. SME*, 1976, v. 19, № 134, p. 930–937.
6. *Куинн*. Производная момента демпфирования по крену затупленного конуса.— *Ракетная техника и космонавтика*, 1969, т. 7, № 1, с. 214–216.
7. *Лин, Рубин*. Вязкое обтекание вращающихся конусов под углом атаки.— *Ракетная техника и космонавтика*, 1974, т. 12, № 7, с. 117–128.
8. *Дуайер, Сандерс*. Силы Магнуса, действующие на вращающийся конус в сверхзвуковом потоке. Ч. 1. Пограничный слой.— *Ракетная техника и космонавтика*, 1976, т. 14, № 4, с. 100–108.
9. *Шевелев Ю. Д.* Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977. 224 с.
10. *Харрис Д. Э., Моррис Д. Дж.* Решение трехмерных уравнений сжимаемого ламинарного и турбулентного пограничного слоя и сравнение с экспериментальными данными.— В кн.: *Механика. Новое в зарубежной науке*. Вып. 14. Численное решение задач гидромеханики. М.: Мир, 1977, с. 117–126.
11. *Michel R.* Prevision de l'apparition et du developpement de la transition de la couche limite.— *Note Technique, Office National d'Etudes et de Recherches Aeronautiques*, 1977, № 6. 20 p.
12. *Cebeci T., Smith A. M. O.* Analysis of turbulent boundary layers. N. Y.: Acad. press, 1974. 404 p.
13. *Андреев Г. Н., Бурдельный А. К., Миносцев В. Б., Савинов К. Г.* Исследование пространственного обтекания затупленных тел с учетом вязкости в рамках теории пограничного слоя.— *Науч. тр. Ин-та механ. МГУ*, 1975, № 41, с. 63–79.
14. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.
15. *Лапин Ю. В.* Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1970. 344 с.
16. *Романенко П. Н.* Гидродинамика и теплообмен в пограничном слое (Справочник). М.: Энергия, 1974. 464 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.VII.1983