

УДК 532.517.4

## РАЗВИТИЕ ЛАМИНАРНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ С НУЛЕВЫМ ИЗБЫТОЧНЫМ ИМПУЛЬСОМ

КОРОБКО В. И., ШАШМИН В. К., ШУЛЬМАН З. П.

Задача о развитии ламинарной струи вязкой несжимаемой жидкости с нулевым избыточным импульсом (след гидродинамического движителя) впервые исследована в [1], где найдено автомодельное решение динамической задачи для случая плоского ламинарного следа. Задача о развитии турбулентных следов гидродинамических движителей в ближней и дальней областях течения решена в [2] на основе интегрального метода.

В настоящей работе методом асимптотических разложений на основе уравнений пограничного слоя решены неавтомодельные задачи о развитии ламинарных струйных течений вязкой несжимаемой жидкости с нулевым избыточным импульсом. Полученное решение учитывает влияние особенностей источника формирования следа (конечного размера тела, его геометрии) и значения числа Прандтля на распределение скоростей и температуры. В случае ламинарного осесимметричного следа получено автомодельное решение тепловой задачи, справедливое для широкого диапазона чисел Прандтля.

**1. Постановка задачи.** Уравнения движения, неразрывности и распределения тепла в ламинарном пограничном слое вязкой несжимаемой жидкости при постоянном давлении во внешнем потоке с соответствующими граничными и интегральными условиями имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\nu}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^n \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^n u) + \frac{\partial}{\partial y} (y^n v) = 0,$$

$$u \frac{\partial \Delta T}{\partial x} + v \frac{\partial \Delta T}{\partial y} = \frac{a}{y^n} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^n \frac{\partial \Delta T}{\partial y} \right)$$

$$u = u_\infty \quad (y = \infty), \quad v = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (y = 0) \quad (1.2)$$

$$\Delta T = 0 \quad (y = \infty), \quad \frac{\partial \Delta T}{\partial y} = 0 \quad (y = 0) \quad (\Delta T = T - T_\infty) \quad (1.3)$$

$$\Delta T = 1 \quad (y = +\infty), \quad \Delta T = 0 \quad (y = -\infty) \quad \left( \Delta T = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2} \right) \quad (1.4)$$

$$\int_0^{+\infty} u(u - u_\infty) y^n dy = 0, \quad Q = \int_0^{+\infty} c_p u \Delta T y^n dy = \text{const} \quad (1.5)$$

Здесь  $n=0$  и  $1$  для плоского и осесимметричного следа,  $x$  и  $y$  — продольная и поперечная координаты;  $u, v$  — продольная и поперечная составляющие скорости;  $\nu, a$  — кинематический коэффициент вязкости и температуропроводности;  $\Delta T$  — избыточная температура в следе над окружающей средой,  $T_\infty$  — температура окружающей среды;  $T_1$  — температура среды при  $y = +\infty$ ,  $T_2$  — при  $y = -\infty$ ,  $Q$  — избыточное теплосодержание.

Введем функцию тока  $\psi$ , удовлетворяя уравнению неразрывности, и переменные автомодельности ( $\xi, \eta$ )

$$u = \frac{1}{y^n} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{y^n} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \xi = x, \quad \eta = y \left( \frac{2^{1-n} v x}{u_\infty} \right)^{-1/2} \quad (1.6)$$

Строим функцию тока  $\psi(\xi, \eta)$  и  $\Delta T(\xi, \eta)$  в виде ряда по убывающим степеням  $\xi$

$$\begin{aligned} \psi(x, \eta) &= v^n (2v u_\infty)^{(1-n)/2} [f_0(\eta) x^{\beta-1} + f_1(\eta) x^{-1} + f_2(\eta) x^{-\beta-1} + f_3(\eta) x^{-2\beta-1} + \dots] \\ \Delta T(x, \eta) &= d_1(\eta) x^\lambda + d_2(\eta) x^{\lambda-\beta} + d_3(\eta) x^{\lambda-2\beta} + \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь и далее вместо  $\xi$  сохранено прежнее обозначение  $x$ ,  $\beta = 3/2$  для плоского случая и  $\beta = 2$  для осесимметричного,  $\lambda$  — неизвестный показатель степени,  $d_i(\eta)$  — автомодельное решение тепловой задачи.

Подставляя (1.7) с учетом (1.6) в систему (1.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций  $f_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ),  $d_j$  ( $j=1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} f_0'' + f_0 f_0'' &= 0 \\ f_k''' + f_0 f_k'' + 3k f_0' f_k' - (3k-1) f_0'' f_k &= \frac{k(k-1)}{2(2k-3)} [-3(2k-3) f_1' f_{k-1}' + \\ &+ 2(k-2) f_1 f_{k-1}' + (3k-4) f_1'' f_{k-1}] \quad (k=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{f_0'}{\eta} \right)'' + \left( \frac{f_0'}{\eta} \right)' \left( \frac{1+f_0}{\eta} - \frac{f_0}{2} \right) &= 0 \\ \left( \frac{f_k'}{\eta} \right)'' + \left( \frac{f_k'}{\eta} \right)' \frac{1+f_0}{\eta} + 2k \frac{f_0'}{\eta} \frac{f_k'}{\eta} - \left( \frac{f_0'}{\eta} \right)' \left[ (2k-1) \frac{f_k}{\eta} + \frac{f_k'}{2} \right] &= \\ = (k-1) \left[ \frac{f_1}{\eta} \left( \frac{f_1'}{\eta} \right)' - 2 \left( \frac{f_1'}{\eta} \right)^2 \right] \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} d_k'' + \text{Pr}(2f_0' \eta - f_0) d_k' - \text{Pr}[2\lambda - 3(k-1)] f_0' d_k &= \\ = \frac{k(k-1)}{2(2k-3)} \text{Pr} \{ 2\lambda f_{k-1}' d_1 + (k-2) [5f_2 d_1' + (2\lambda-3) f_1' d_2] + (k-1) f_1 d_{k-1}' \} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} (k=1, 2, 3) \\ d_k'' + \frac{1 + \text{Pr} f_0}{\eta} d_k' - [\lambda - 2(k-1)] \text{Pr} \frac{f_0'}{\eta} d_k = (k-1) \text{Pr} \frac{\lambda d_1 f_1' + d_1' f_1}{\eta} \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Граничные и интегральные условия для плоского и осесимметричного следа соответственно будут

$$\begin{aligned} f_i(0) = f_i''(0) = 0, \quad f_0'(\pm\infty) = 1, \quad f_1'(\pm\infty) = 0 \\ d_i(\pm\infty) = d_i'(0) \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} d_1(\infty) = 1, \quad d_2(\infty) = d_3(\infty) = d_i(-\infty) = 0 \\ \frac{f_0'}{\eta} = 1, \quad \frac{f_i}{\eta} = 0 \quad (\eta = \infty), \quad \left( \frac{f_i'}{\eta} \right)' = f_i(\eta) = 0 \quad (\eta = 0); \quad d_i(\infty) = d_i(0) = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0' \left( \frac{f_0'}{\eta^n} - 1 \right) d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1' \left( 2 \frac{f_0'}{\eta^n} - 1 \right) d\eta = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ f_2' \left( 2 \frac{f_0'}{\eta^n} - 1 \right) + \frac{f_1'^2}{\eta^n} \right] d\eta = 0 \quad (1.14)$$

$$(n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} [f_3' (2f_0' - 1) + 2f_1' f_2'] d\eta = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0' d_1 \eta^n d\eta = \frac{Q}{\rho c_p} \frac{(\sqrt{2\nu u_\infty})^{n-1}}{(\pi\nu)^n}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f_0' d_2 + f_1' d_1) \eta^n d\eta = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (f_0' d_3 + f_1' d_2 + f_2' d_1) d\eta = 0$$

Здесь  $n=0$  и  $1$  для плоского и осесимметричного следа соответственно, первая строчка условий на  $d_i$  в (1.12) отвечает симметричному, а вторая — асимметричному случаям.

**2. Плоский след.** Решение первого и второго уравнения системы (1.10) с соответствующими граничными (1.12) и интегральными (1.14) условиями имеет вид [1]

$$f_0(\eta) = \eta, \quad f_1(\eta) = A\eta \exp(-\eta^2/2) \quad (2.1)$$

Заменой переменной  $f_2 = u(\eta) \exp(-\eta^2/4)$  третье уравнение системы (1.10) ( $k=3$ ) сводится к уравнению Вебера [3], общее решение которого выражается через функции параболического цилиндра

$$f_2(\eta) = \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) [C_1 D_4(\eta) + C_2 D_5(i\eta)] - \frac{1}{4} \frac{A^2}{u} (3 \operatorname{Erf}(\eta) - \eta \exp(-\eta^2)) \quad (2.2)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.12), получим  $C_1 = C_2 = 0$ . Соответствующее интегральное условие (1.14) выполняется тождественно при любом  $A$ . Решение четвертого уравнения (1.8) ( $k=3$ ) получаем аналогичным образом

$$f_3(\eta) = \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) [C_1 D_7(\eta) + C_2 D_8(i\eta)] + \varphi$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{A^3}{4} \left[ \frac{4}{9} \eta \exp\left(-\frac{3}{2} \eta^2\right) + \frac{2}{3} \operatorname{Erf}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \eta\right) + \frac{3}{4} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) (\eta^2 - 1) \times \right. \\ & \left. \times \operatorname{Erf}(\eta) + \left\{ \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \int_0^\eta \exp\left(\frac{\eta^2}{2}\right) \underbrace{\int_0^\eta d\eta \int_0^\eta d\eta \dots \int_0^\eta d\eta}_{9 \text{ раз}} \exp\left(-\frac{3}{2} \eta^2\right) d\eta d\eta \right\}^{\text{VII}} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь VII означает производную седьмого порядка. Повторные интегралы вероятности были изучены Хартри (см. ссылку в [3]); интегрированием по частям они сводятся к интегралу от полиномов Эрмита и  $\exp$ . Удовлетворяя граничным условиям (1.9), получим  $C_2 = 0$ . Интегральное условие (1.14) для  $f_3$  выполняется тождественно при любом  $C_1$  и  $A$ .

Рассмотрим решение тепловой задачи. Из интегрального инварианта — условия сохранения избыточного теплосодержания — для симметричных граничных условий — получим значение показателя  $\lambda = 1/2$ , для асимметричных условий  $\lambda = 0$ . Автомодельное решение для тепловой задачи (интегрирование уравнения для  $d_i$  системы (1.10)) с соответствующими гра-

вичными (1.12) и интегральными (1.14) условиями имеет вид

$$d_1(\eta) = B \exp\left(-\frac{\text{Pr}}{2} \eta^2\right), \quad B = \frac{Q\sqrt{\text{Pr}}}{\rho c p \sqrt{4\nu l u_\infty}} \quad (2.4)$$

$$d_1(\eta) = C \int_{-\infty}^{\eta} \exp\left(-\frac{\text{Pr}}{2} \eta^2\right) d\eta, \quad C = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{2\pi}} \quad (2.5)$$

Второе и третье уравнения для  $d_2$  и  $d_3$  системы (1.10) ( $k=2, 3$ ) сводятся к уравнению Вебера [3]. Выпишем решение для  $d_2$ , удовлетворяющее граничным (1.12) и интегральным (1.14) условиям в симметричном и асимметричном случаях

$$\begin{aligned} d_2 = & \frac{\text{Pr} AB}{(1+\text{Pr})^3} \left[ 2 \text{Pr} (1-\text{Pr}) \eta (3-\text{Pr} \eta^2) \exp\left(-\frac{\text{Pr}}{2} \eta^2\right) \text{Erf}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) + \right. \\ & \left. + ((\text{Pr}^2 - 6\text{Pr} + 1) + 2 \text{Pr}^2 (1-\text{Pr}) \eta^2) \exp\left(-\frac{\text{Pr}+1}{2} \eta^2\right) \right] \\ d_2 = & \frac{2AC}{(1+\text{Pr})^2} \left[ \text{Pr} \eta \exp\left(-\frac{\text{Pr}+1}{2} \eta^2\right) - (1-\text{Pr} \eta^2) \exp\left(-\frac{\text{Pr}}{2} \eta^2\right) \times \right. \\ & \left. \times \left( \int_{-\infty}^{\eta} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) d\eta - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \right] \quad (2.6) \end{aligned}$$

Ввиду громоздкости выражение  $d_3$  не приводим. Таким образом, распределение скорости и температуры в плоском ламинарном следе для симметричных и асимметричных условий имеет вид

$$\begin{aligned} u = u_\infty \left( 1 + A \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) (1-\eta^2) x^{-3/2} - A^2 \exp(-\eta^2) (1+\eta^2) x^{-3} + \right. \\ \left. + \left[ -C_1 \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) D_3(\eta) + \varphi'(\eta) \right] x^{-3/2} \right) \\ \Delta T = B \exp\left(-\frac{\text{Pr}}{2} \eta^2\right) x^{-1/2} + d_2(\eta) x^{-2} + d_3(\eta) x^{-7/2} \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$\Delta T = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\eta} \exp\left(-\frac{\text{Pr}}{2} \eta^2\right) d\eta + d_2(\eta) x^{-3/2} + d_3(\eta) x^{-3/2}$$

В струе с нулевым избыточным импульсом далеко вниз по потоку справедливо соотношение [1]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 (u - u_\infty) y^n dy = N_1 = \text{const} \quad (2.8)$$

Полагая  $N_1 \neq 0$ , после вычисления интеграла, имеем

$$A = (1/20) N_1 \sqrt{u_\infty / (2\pi\nu)} \quad (2.9)$$

Полученное решение зависит от единственной характеристической постоянной  $C_1$ , которая не определяется граничными и интегральными условиями. По аналогии с неавтономными струйными течениями [4] можно положить, что  $C_1$  зависит от особенностей формирования источника следа, например его геометрии.

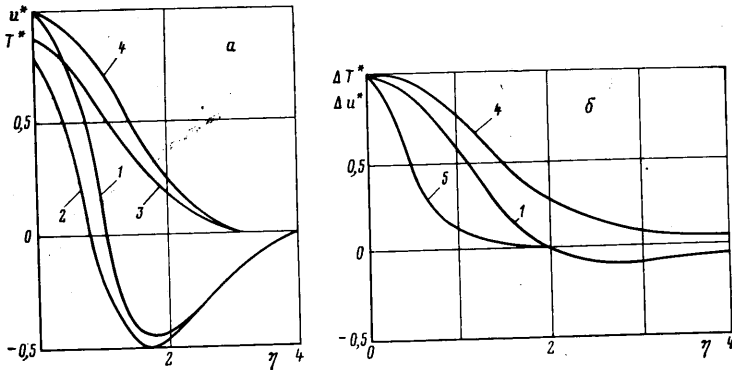
3. Осесимметричный след. Запишем решение первого уравнения системы (1.9) для  $f_0$ , удовлетворяющее граничным (1.13) и интегральным (1.14) условиям  $f_0 = \eta^2/2$ . Подставляя полученное выражение во второе уравнение этой системы и делая замену  $y = f_1'/\eta$ ,  $t = -\eta^2/4$ , сводим данное уравнение к вырожденному гипергеометрическому [3], решение которого

$$y = A_1 \Phi(2, 1, t) + C_2 \Psi(2, 1, t) \quad (3.1)$$

Переходя к старым переменным и удовлетворяя в полученном решении граничным (1.13) и интегральным условиям (1.14), имеем

$$\frac{f_1'}{\eta} = A_1 \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) \left(1 - \frac{\eta^2}{4}\right), \quad f_1 = A_1 \left[ \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) \left(2 + \frac{\eta^2}{4}\right) - 2 \right]$$

Интегральное условие для  $f_1$  удовлетворяется при любом значении  $A_1$ . Аналогичный заменой третье уравнение системы (1.9) ( $k=2$ ) сводится



Фиг. 1

к вырожденному гипергеометрическому, и его общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{f_2'}{\eta} = & C_1 \Phi\left(4, 1, -\frac{\eta^2}{4}\right) + C_2 \Psi\left(4, 1, -\frac{\eta^2}{4}\right) + \frac{13A^2}{32} \Phi\left(4, 1, -\frac{\eta^2}{4}\right) \times \\ & \times \int_0^{-\eta^2/4} \frac{e^t (1 + 14t + 10t^2 + 4/3 t^3)}{(1 + 3t + 3/2 t^2 + 1/6 t^3)^2} dt + \frac{A^2}{6} \left(5 - \frac{3}{4} \eta^2\right) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) + \\ & + \frac{A^2}{16} (26 - 3\eta^2) \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Удовлетворяя условиям (1.13), (1.14), получим  $C_1 = C_2 = 0$ . Постоянная интегрирования  $A_1$  определяется из условия (2.8)

$$A_1 = N_1 u_\infty / (9\sqrt{2}\pi\nu^2)$$

Рассмотрим решение тепловой задачи. Из интегрального инварианта для температуры (1.5) следует  $\lambda = -1$ . Подставляя выражение  $f_0(\eta)$  в уравнение для  $d_1(\eta)$  системы (1.11) и удовлетворяя полученное решение условиям (1.13), (1.14), получим

$$d_1(\eta) = B_1 \exp\left(-\frac{\text{Pr}}{4} \eta^2\right), \quad B_1 = \frac{Q \text{Pr}^{3/2}}{\pi r c_p \nu \sqrt{2\pi}} \quad (3.3)$$

Второе уравнение системы (1.11) ( $k=2$ ) решается таким же методом, как и для плоского случая.

Распределение скорости и температуры в осесимметричном ламинарном следе имеет вид

$$u = u_{\infty} \left[ 1 + A_1 \left( 1 - \frac{\eta^2}{4} \right) \exp \left( -\frac{\eta^2}{4} \right) x^{-2} + \frac{f_2'}{\eta} x^{-4} \right]$$

$$T = B_1 \exp \left( -\frac{\text{Pr}}{4} \eta^2 \right) x^{-1} + d_2(\eta) x^{-3} \quad (3.4)$$

$$d_2(\eta) = C_1 \Phi \left( 3, 1, -\frac{\text{Pr}}{4} \eta^2 \right) + \frac{A_1 B_1 \text{Pr}}{2} \exp \left( -\frac{\text{Pr}}{4} \eta^2 \right) - \frac{A_1 B_1 \text{Pr} (\text{Pr} - 2)}{2(\text{Pr} + 1)} \times$$

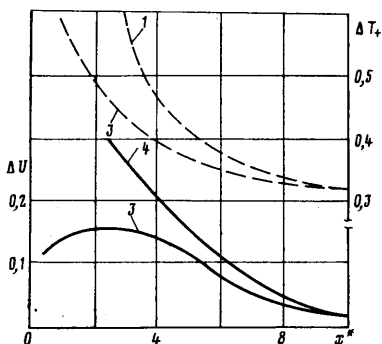
$$\times \exp \left( -\frac{\text{Pr} + 1}{4} \eta^2 \right) + 32 A_1 B_1 \frac{4 \text{Pr}^2 - \text{Pr} + 4}{\text{Pr}^2 (\text{Pr} + 1)} \Phi \left( 3, 1, -\frac{\text{Pr}}{4} \eta^2 \right) \times$$

$$\times \int_0^{-\text{Pr} \eta^2 / 4} \exp \left( \frac{\text{Pr} + 1}{\text{Pr}} t \right) \frac{\text{Pr} + (\text{Pr} + 1) (\text{Pr} + 2) t + (\text{Pr} + 1)^2 t^2}{t(1 + 2t + 1/2 t^2)^2} dt$$

Здесь  $f_2'/\eta$  определено согласно (3.2).

Распределения скорости и температуры по сечениям  $\eta$ , соответствующим  $x^* = x/d = 4$ , представлены на фиг. 1, *a* и *b* для плоского и осесимметричного следов. Кривые 1 и 4 соответствуют автомодельному решению для скоростей и температур ( $\text{Pr} = 1$ ) соответственно, причем для температуры в плоском случае представлено решение с симметричными граничными условиями согласно (2.7). Учет членов, соответствующих вторым членам разложений в (2.7) (неавтомодельное решение), представлен кривыми 2 ( $A = 2$ ) для скорости, 3 ( $A = 2$ ) для температуры. Кривая 5 на фиг. 1, *b* соответствует распределению температуры в сечении следа при  $\text{Pr} = 10$ .

На фиг. 2 представлены изменения скоростей  $\Delta U = (u_0 - u_{\infty})/A u_{\infty}$  и температур  $\Delta T_+ = \Delta T/B$  вдоль оси следа  $x^* = x/d$ . Здесь приняты обозначения фиг. 1. Из фиг. 1, *a* и 2 видно, что изменение значения  $A_1$  (2.9) или, что то же самое, изменение значения момента второго порядка  $N_1$  (2.8) сказывается в изменении скорости и температуры вблизи источника возмущений.

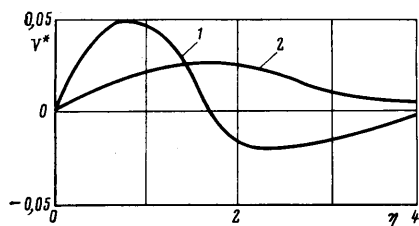


Фиг. 2

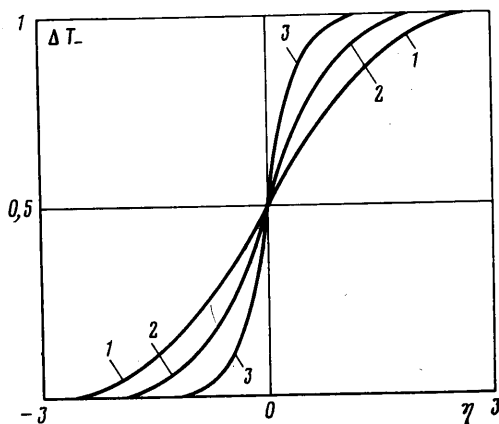
Результаты вычислений температуры  $\Delta T_- = \Delta T/C$  по сечению следа с асимметричными граничными условиями согласно (2.7) представлены на фиг. 4. Здесь кривая 1 соответствует автомодельному решению ( $A = 0$ ), 2 —  $A = 2$  при  $\text{Pr} = 1$ . Кривая 3 соответствует автомодельному решению при  $\text{Pr} = 8$ . Неавтомодельность решения, слабо выраженная вблизи оси следа, влияет на «наполненность» профиля температур у границы следа (кривые 1–2). При увеличении значения числа  $\text{Pr}$  от 1 до 8 происходит более резкое выравнивание температуры в следе.

На фиг. 3 представлено распределение поперечной скорости  $V^* = v/u_{\infty}$  по сечению следа кривой 1. Вблизи оси следа скорость  $V^*$  меняет свой знак, причем  $V^* = 0$  соответствует минимальному значению продольной скорости в сечении (см. фиг. 1, *a*). Для сравнения на фигуре кривой 2 представлено изменение поперечной составляющей скорости  $V^*$  в струе, развивающейся в спутном потоке [4].

Отметим, что в результате перемешивания граница раздела однородных слоев с различными температурами приобретает почти линейный профиль температуры. Эксперименты [5] по турбулентному следу за пло-



Фиг. 3



Фиг. 4

ской пластинкой, буксируемой вдоль границы раздела двух слоев с различными плотностями, показали также, что профиль плотности на оси раздела жидкости мало отличается от линейного, что качественно соответствует полученным результатам.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
2. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969, с. 260–272.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Ч. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.
4. Аеров В. Е., Колованди Б. А., Старобинец Г. Г., Лучко Н. Н., Дмитриенко Ю. М. Исследование неизотермического осесимметричного ближнего следа.— В кн.: Теплообмен-5. Т. 1, ч. 2. Минск, 1976, с. 192–196.
5. Prych E. A., Harty F. R., Jr., Kennedy J. F. Turbulent wakes in density stratified fluids of finite extent.— Mass. Inst. Technol. Hydrodyn. Lab., Dept. civil Engng, 1964, TR № 65, p. 48–56.

Новополоцк,  
Минск

Поступила в редакцию  
29.IV.1983