

## ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ И ТЕРМОГРАВИТАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ С ИСКРИВЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА

НЕПОМНЯЩИЙ А. А., СИМАНОВСКИЙ И. Б.

В [1] на основе полных нелинейных уравнений гидродинамики проводилось исследование термокапиллярной конвекции в двухслойной системе. Для некоторых соотношений параметров установлена колебательная неустойчивость равновесия. В настоящей работе изучается влияние на термокапиллярные конвективные движения двух различных факторов: искривления границы раздела и силы тяжести. Установлено, что искривление границы может приводить к существенным изменениям структуры течения и гистерезисным переходам между режимами конвекции. В случае совместного воздействия термогравитационного и термокапиллярного механизмов неустойчивости обнаружено много различных режимов течения: стационарные движения с различным направлением вращения вихрей, периодические и непериодические колебательные движения разной пространственной структуры.

1. Рассматривается система двух вязких несмешивающихся жидкостей, заполняющих полость прямоугольного сечения. Коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры:  $\sigma = \sigma_0 - \alpha T$ . Горизонтальные границы полости поддерживаются при постоянных различных температурах (разность температур равна  $\theta$ ), вдоль вертикальных границ температура изменяется по линейному закону.

Ось  $x$  направлена горизонтально, ось  $y$  — вертикально вверх. Верхняя жидкость заполняет область  $0 < x < l$ ,  $h < y < a_1$ , а нижняя — область  $0 < x < l$ ,  $-a_2 < y < h$ , где  $y = h(x)$  — уравнение границы раздела.

Коэффициенты динамической и кинематической вязкости, теплопроводности, температуропроводности и объемного расширения верхней и нижней жидкостей соответственно равны  $\eta_i, \nu_i, \kappa_i, \chi_i, \beta_i$  ( $i=1, 2$ ). Здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к верхней жидкости, обозначаются индексом 1, а величины, относящиеся к нижней жидкости, — индексом 2.

Введем следующие обозначения:  $\eta = \eta_1/\eta_2$ ,  $\nu = \nu_1/\nu_2$ ,  $\kappa = \kappa_1/\kappa_2$ ,  $\chi = \chi_1/\chi_2$ ,  $\beta = \beta_1/\beta_2$ ,  $L = l/a_1$ ,  $a = a_2/a_1$ . Выберем в качестве единиц длины, времени, функции тока, вихря скорости и температуры соответственно  $a_1$ ,  $a_1^2/\nu_1$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_1/a_1^2$  и  $\theta$ . Полные нелинейные уравнения свободной конвекции для функции тока  $\psi_i$ , вихря скорости  $\varphi_i$  и температуры  $T_i$  запишем в безразмерных переменных

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = b_i \Delta \varphi_i + G d_i \frac{\partial T_i}{\partial x}$$

$$\Delta \psi_i = -\varphi_i, \quad G = \frac{g \beta_1 \theta a_1^3}{\nu_1^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial T_i}{\partial x} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial T_i}{\partial y} = \frac{c_i}{P} \Delta T_i, \quad P = \frac{\nu_1}{\chi_1}$$

$$b_1 = c_1 = d_1 = 1, \quad b_2 = \frac{1}{\nu}, \quad d_2 = \frac{1}{\beta}, \quad c_2 = \frac{1}{\chi}$$

где  $G$  — число Грасгофа,  $P$  — число Прандтля. Граничные условия на твердых стенках имеют вид

$$x = 0, \quad x = L: \quad \psi_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = 0 \quad (i=1, 2)$$

$$y = 1: \quad \psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0, \quad y = -a: \quad \psi_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

$$y = -a: T_2 = 0, \quad y = 1: T_1 = \pm 1$$

$$x = 0, \quad x = L: \quad T_1 = \pm \frac{y + \kappa a}{1 + \kappa a}, \quad T_2 = \pm \frac{\kappa(y + a)}{1 + \kappa a} \quad (1.3)$$

Два варианта задания температуры на твердых границах соответствуют подогреву со стороны первой или второй жидкости.

В настоящей работе учитывается искривление границы раздела, обусловленное действием поверхностного натяжения, которое существенно в условиях пониженной гравитации. Как можно показать, изменение формы границы, обусловленное температурной зависимостью поверхностного натяжения и термокапиллярным движением, пропорционально относительному изменению поверхностного натяжения  $\varepsilon = \alpha \theta / \sigma$  и

пренебрежимо мало. Вследствие этого искривление границы не зависит от времени и определяется из условия баланса нормальных напряжений на границе раздела в равновесии (см. [2]); в частности, в условиях невесомости граница раздела имеет форму дуги окружности [3]

$$h(x) = \frac{L}{2} \operatorname{tg} \gamma - \sqrt{\left(\frac{L}{2 \cos \gamma}\right)^2 - x^2} \quad (1.4)$$

Здесь  $\gamma$  – краевой угол.

На границе раздела выполняются условия равенства нулю нормальных составляющих скорости, непрерывности касательных составляющих скорости, температуры, теплоточков и касательных напряжений

$$y = h(x): \quad \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial n} = \frac{\partial \psi_2}{\partial n}, \quad T_1 = T_2, \quad \kappa \frac{\partial T_1}{\partial n} = \frac{\partial T_2}{\partial n}$$

$$\sigma_{n\tau,2} = \sigma_{n\tau,1} - M\Gamma \frac{\partial T_1}{\partial \tau} \quad \left( M\Gamma = \frac{\eta M}{P}, \quad M = \frac{\alpha \theta a_1}{\eta \chi_1} \right) \quad (1.5)$$

Здесь  $M$  – число Марангони,  $\sigma_{n\tau}$  – компонента тензора вязких напряжений.

2. В данном пункте изучаются термокапиллярные конвективные движения в условиях невесомости. В этой ситуации искривление границы существенно и определяется формулой (1.4).

Для записи уравнений и граничных условий введем криволинейную систему координат [4]

$$X = x, \quad Y_1 = 1 + \frac{y-1}{1-h(x)}, \quad y \geq h(x); \quad Y_2 = \frac{y+1}{1+h(x)} - 1, \quad y \leq h(x) \quad (2.1)$$

в которой уравнение границы раздела  $Y=0$ . Уравнения для функции тока  $\psi_i$ , вихря скорости  $\varphi_i$  и температуры  $T_i$  и условия на границе раздела принимают вид

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + F_i \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial X} - \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y_i} \right) = b_i D_i \varphi_i, \quad D_i \psi_i = -\varphi_i$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + F_i \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial Y_i} \frac{\partial T_i}{\partial X} - \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial T_i}{\partial Y_i} \right) = \frac{c_i}{P} D_i T_i \quad (i=1, 2) \quad (2.2)$$

$$F_i = \frac{1}{(1+s_i h)}, \quad D_i = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + 2A_i \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y_i} + B_i \frac{\partial^2}{\partial Y_i^2} + C_i \frac{\partial}{\partial Y_i}$$

$$A_i = -s_i(Y_i + s_i)h'F_i, \quad B_i = A_i^2 + F_i^2$$

$$C_i = (Y_i + s_i)[-s_i F_i h'' + 2h'^2 F_i^2], \quad s_i = (-1)^i$$

$$Y_1 = Y_2 = 0: \quad \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad F_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial Y_1} = F_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial Y_2} \quad (2.3)$$

$$T_1 = T_2, \quad \kappa F_1 \frac{\partial T_1}{\partial Y_1} = F_2 \frac{\partial T_2}{\partial Y_2} \quad (2.4)$$

$$\varphi_2 - \eta \varphi_1 = M\Gamma E^{1/2} \frac{\partial T_1}{\partial X} - 2h'' E F_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial Y_1} (\eta - 1), \quad E = \frac{1}{(1+h'^2)} \quad (2.5)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по  $X$ .

Граничные условия на твердых стенках сохраняют вид (1.2)–(1.3). Поставленная краевая задача решается численно методом сеток. Используется явная схема метода установления с центральными разностями. Расчеты производятся на равномерной сетке  $16 \times 32$ . Уравнение Пуассона решается методом итераций (схема Либмана с последовательной верхней релаксацией). Точность итерирования уравнения Пуассона составляет  $10^{-7}$ . Для расчета вихря скорости на твердых стенках используются формулы Кусковой – Чудова [5]. Температура на границе раздела определяется по формулам второго порядка точности.

Расчет вихря на границе раздела осуществляется следующим образом. Для значений функции тока в ближайших к границе узлах записываются разложения в ряд Тейлора до второго порядка с учетом первого из условий (2.3). Величины  $\partial^2 \psi_i / \partial Y_i^2$  на границе раздела выражаются через значения вихря по формулам

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial Y_i^2} = E(1+s_i h)^2 \left( -\varphi_i - 2A_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial X \partial Y_i} - C_i \frac{\partial \psi_i}{\partial Y_i} \right) \quad (i=1, 2)$$

Используя второе из условий (2.3) и исключая из полученных выражений  $\partial\psi_i/\partial Y_i$ , получаем соотношения, связывающие  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  на границе раздела. В качестве второго соотношения, позволяющего определить значения вихря на границе раздела, используется формула (2.5). Заметим, что для случая плоской границы описанный алгоритм переходит в изложенный в [6].

3. Перейдем к изложению результатов расчетов. В зависимости от соотношения параметров жидкостей механическое равновесие, которое имеет место в случае плоской границы раздела, может нарушаться как монотонно нарастающими, так и колебательными возмущениями [1]. Рассмотрим сначала монотонный случай. В качестве примера возьмем систему жидкостей с набором параметров:  $\kappa=\chi=0,5$ ;  $\eta=\nu=\beta=P=a=1$ ;  $L=2$ . При подогреве со стороны второй жидкости в случае, когда граница раздела плоская, система сохраняет механическое равновесие вплоть до значений параметра  $Mg \approx 2 \cdot 10^5$  [1]. Подогрев со стороны первой жидкости при превышении некоторого критического значения  $Mg \approx 2500$  приводит к возникновению конвективного движения четырехвихревой структуры, симметрия которого характеризуется равенствами

$$\begin{aligned} \psi_i(x, y, t) &= -\psi_i(1-x, y, t), \\ T_i(x, y, t) &= T_i(1-x, y, t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Устойчивым оказывается движение, для которого течение жидкости осуществляется от центра полости (структура *a*). На фиг. 1 для данной структуры представлена зависимость модуля максимального значения функции тока в первой жидкости от числа  $Mg$  (линия 1). Структура, аналогичная данной, но с противоположным направлением вращения вихрей (структура *b*), является неустойчивой по отношению к возмущениям, нарушающим симметрию движения относительно вертикальной оси, и может быть реализована лишь при искусственном наложении условий симметрии в численном счете (линия 2). Нелинейное развитие неустойчивости приводит в итоге к установлению движения структуры *a*.

Опишем результаты расчетов, соответствующих значению краевого угла  $\gamma=80^\circ$ . Искривление границы раздела приводит к тому, что механическое равновесие оказывается заведомо невозможным. Неоднородность температуры вдоль границы раздела приводит к возникновению стационарного движения при сколь угодно малых значениях  $Mg$ , причем при подогреве со стороны второй жидкости распределение температуры навязывает движение структуры *a*, а при подогреве со стороны первой жидкости — структуры *b* (линия 3, фиг. 1). В последнем случае в области значений  $Mg > 4100$  данное движение теряет устойчивость и может быть получено лишь при наложении условий симметрии (пунктирный участок линии 3).

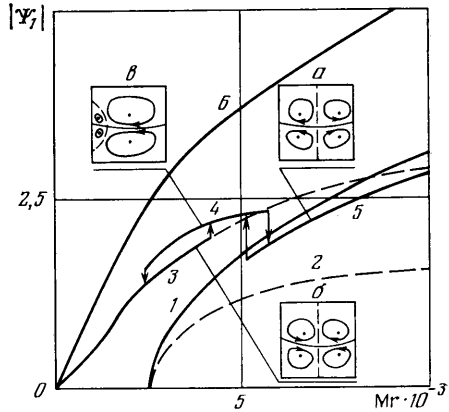
Развитие неустойчивости приводит не к переходу в движение структуры *a*, как при  $\gamma=90^\circ$ , а к установлению несимметричного относительно вертикальной оси движения (структура *b*, линия 4, фиг. 1). Это движение реализуется только в промежуточной области значений  $Mg$ . При  $Mg < 2400$  оно переходит в четырехвихревое движение структуры *b*, а при  $Mg > 5700$  — в движение структуры *a* (линия 5, фиг. 1). Область устойчивости структур *a* и *b* в интервале  $5100 < Mg < 5700$  перекрываются.

Таким образом, незначительное искривление границы раздела может приводить к существенным изменениям режима течения. При значительных искривлениях границы реализуется движение, форма которого определяется характером подогрева. Так, при значении краевого угла  $\gamma=60^\circ$  при подогреве со стороны второй жидкости реализуется течение со структурой *a*, а при подогреве со стороны первой жидкости — со структурой *b* (линия 6, фиг. 1).

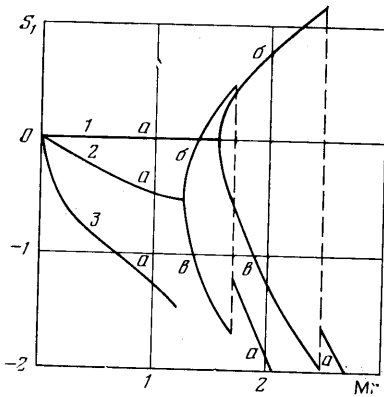
Обсудим теперь влияние искривления границы на колебательные режимы конвекции. Для описания колебательных движений введем величины

$$S_1(t) = \int_0^{L/2} dX dY_1 \psi_1(X, Y_1, t), \quad S_2(t) = \int_{L/2}^L dX \int_0^1 dY_1 \psi_1(X, Y_1, t)$$

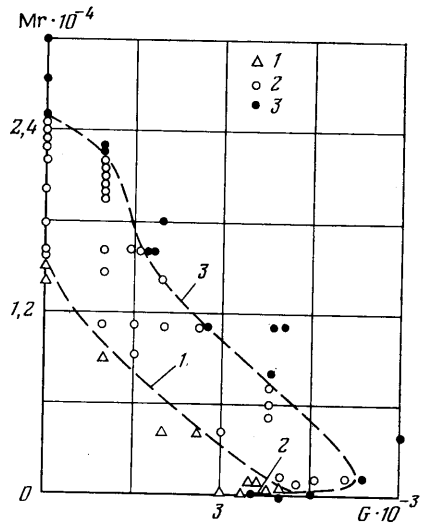
$$S_{m+} = \max_t S_m(t), \quad S_{m-} = \min_t S_m(t) \quad (m=1, 2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

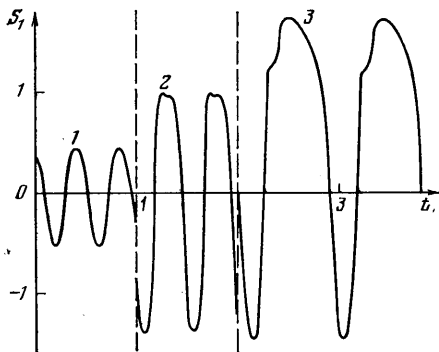
На фиг. 2 для различных углов  $\gamma$  ( $1 - 90^\circ$ ,  $2 - 87^\circ$ ,  $3 - 60^\circ$ ) показаны зависимости  $S_1(Mr)$  для стационарных движений (линии  $a$ ), а также  $S_{1+}(Mr)$  (линии  $b$ ) и  $S_{1-}(Mr)$  (линии  $\beta$ ) для колебательных движений. Приведенные результаты относятся к системе с параметрами  $\eta = \nu = 0,5$ ;  $\kappa = \chi = \beta = P = a = 1$ ;  $L = 2,5$ ; подогрев производится со стороны второй жидкости. Если при  $\gamma = 90^\circ$  колебательные режимы возникают в результате кризиса равновесия, то при  $\gamma \neq 90^\circ$  они реализуются вследствие неустойчивости стационарного движения. С увеличением числа  $Mg$  колебательные движения переходят в стационарные посредством неограниченного нарастания периода. Область существования колебательных движений уменьшается при уменьшении  $\gamma$  и исчезает при  $\gamma < 84^\circ$ .

4. Рассмотрим теперь влияние силы тяжести на термокапиллярные течения. Заметим прежде всего, что при конечных значениях силы тяжести границу раздела можно считать плоской независимо от значений краевого угла, за исключением области с размером порядка капиллярного радиуса [2]. Кроме того, при наличии силы тяжести включается термогравитационный механизм конвекции ( $G \neq 0$ ).

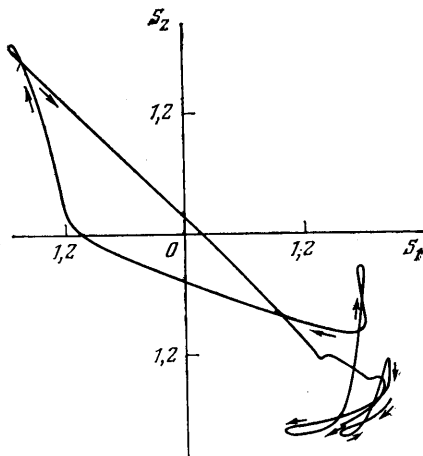
Ограничимся обсуждением влияния параметра  $G$  на колебательные движения, возникающие в системе с параметрами  $\eta = \nu = 0,5$ ;  $\kappa = \chi = \beta = P = a = 1$ ;  $L = 2,5$ ;  $\gamma = 90^\circ$ . На фиг. 3 приведены результаты численных экспериментов: 1 - устойчивое состояние равновесия, 2 - колебательный режим, а 3 - стационарное движение.

С ростом  $G$  порог колебательной неустойчивости по числу  $Mg$  существенно понижается (см. линию 1, фиг. 3); период колебаний вдоль линии нейтральной устойчивости сначала уменьшается, а затем нарастает. Колебательная неустойчивость приводит к мягкому возбуждению периодического режима, пространственная симметрия которого определяется формулами (3.1). Форма линий тока существенно зависит от  $G$ . При малых  $G$  вихри имеют характерную для термокапиллярной конвекции приплюснутую к границе раздела форму (центры вихрей расположены вблизи границы раздела); с увеличением  $G$  центры вихрей удаляются от границы, что свидетельствует о возрастании роли термогравитационного (объемного) механизма неустойчивости. Замечены усиление ангармонизма и нарастание периода колебаний с ростом  $Mg$  при фиксированных значениях  $G$  (см. фиг. 4;  $G = 1000$ ;  $Mg = 11000$  (линия 1),  $16000$  (линия 2),  $20000$  (линия 3)). При малых  $Mg$  возможен другой тип неустойчивости, которая имеет монотонный характер (см. линию 2, фиг. 3). Эта мода неустойчивости термогравитационного происхождения; термокапиллярный эффект оказывает на нее стабилизирующее воздействие.

Как и при  $G = 0$ , увеличение числа  $Mg$  приводит к переходу от колебательных движений к стационарным. Картина перехода, однако, существенно различна для разных  $G$ . При  $G = 0$  стационарное движение возникало в результате обращения в бесконечность периода колебаний, причем для него  $\psi_1 < 0$  в области  $0 < x < 1/2$ . При  $G = 1000$  и  $Mg \approx 21500$  регулярные симметричные колебания теряют устойчивость относительно возмущений, нарушающих условия (3.1). Эта неустойчивость приводит к развитию движений, характеристики которых изменяются со временем. Участок фазовой траектории для  $Mg \approx 21500$  приведен на фиг. 5. Дальнейшее увеличение числа  $Mg$  приводит к установлению стационарного симметричного движения, для которого, однако,  $\psi_1 > 0$  при  $0 < x < 1/2$ . При уменьшении  $Mg$  это стационарное движение теряет устойчивость по отношению к возмущениям, нарушающим симметрию при  $Mg = 21800$ .



Фиг. 4



Фиг. 5

Другая возможность перехода между колебательными и стационарными движениями реализуется при больших значениях  $G$ . Так, при  $Mg=16000$  области существования обоих типов движений перекрываются в интервале  $1650 < G < 1750$ . На фиг. 3 изображена только граница области существования колебательных режимов (линия 3).

В заключение авторы выражают благодарность Е. М. Жуховицкому за обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Непомнящий А. А., Симановский И. Б. Термокапиллярная конвекция в двухслойной системе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 4, с. 158–163.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
3. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
4. Возовой Л. П. Конвекция в вертикальном слое с волнистыми границами.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 2, с. 31–35.
5. Кускова Т. В., Чудов Л. А. О приближенных граничных условиях для вихря при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 11. М.: ВЦ МГУ, 1968, с. 27–31.
6. Симановский И. Б. Конечно-амплитудная конвекция в двухслойной системе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5, с. 3–10.

Пермь

Поступила в редакцию  
31.III.1983

УДК 533.6.011.55

### О ВЛИЯНИИ ВРАЩЕНИЯ ТЕЛА И ВНЕШНЕЙ ЗАВИХРЕННОСТИ НА ТЕПЛОБМЕН ОКОЛО КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

МАРКОВ А. А.

Рассмотрено влияние продольного вихря  $\Omega$  на гиперзвуковой вязкий ударный слой около осесимметричной охлаждаемой поверхности, вращающейся вокруг продольной оси с угловой скоростью  $\Omega_1$ . На основе теории тонкого трехмерного ударного слоя [1, 2] проведено упрощение уравнений вязкого ударного слоя для окрестности точки торможения. Приведены некоторые результаты расчета влияния параметров  $\Omega$ ,  $\Omega_1$  на теплообмен и структуру ударного слоя в случае стационарного течения. Использован итерационный численный метод [1] и предложена модификация, ускоряющая сходимость итераций. Отмечены характерные интервалы изменения параметров  $\Omega$ ,  $\Omega_1$ , зависящие от чисел Маха и Рейнольдса, для которых распределение линий тока в ударном слое имеет качественно различный характер.

Неоднородный внешний поток с продольной скоростью  $U_\infty$  и вихрем  $\Omega$  (фиг. 1), направленный вдоль этой составляющей скорости  $V_\infty = U_\infty + U_{1\infty} + U_{2\infty}$ , моделирует струю из двигателя летательного аппарата и реализуется в некоторых экспериментальных установках при изучении теплообмена при больших скоростях и др. Влияние