МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1984

УДК 532.5:517.955.8

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПАДЕ-АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ УСТРАНЕНИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

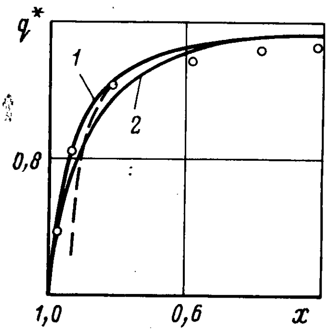
АНДРИАНОВ И. В.

Неоднородности асимптотических разложений существенно ограничивают область их применимости [1–4]. Используемые для устранения этого недостатка методы (Лайтхилла [1], перенормировок [2, 3], обобщенного суммирования [2]) не всегда приводят к цели. Кроме того, полезно иметь альтернативные подходы. Ниже на нескольких примерах показана возможность устранения неоднородностей асимптотических разложений при помощи паде-перестройки ряда теории возмущений.

Дадим определение аппроксимант Паде. Пусть

$$F(\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i\varepsilon^i; \qquad F_{mn}(\varepsilon)=\sum_{i=0}^{m} a_i\varepsilon^i \Big/ \sum_{i=0}^{n} b_i\varepsilon^i$$

где коэффициенты a_i, b_i определяются из следующего условия: первые $m+n$ членов разложения рациональной функции в ряд Маклорена совпадают с первыми $m+n+1$ членами ряда для $F(\varepsilon)$. Тогда F_{mn} называют $[m/n]$ аппроксимантой Паде [5–7]. Набор функций F_{mn} при различных m и n образует таблицу Паде. Элементы первой строки F_{m0} и первого столбца F_{0n} – частичные суммы рядов функций $F(\varepsilon)$ и $F^{-}(\varepsilon)$. Наибольшее распространение на практике получили диагональные аппроксиманты Паде ($m=n$).



Паде-аппроксиманты нашли широкое применение в ряде разделов математики и физики [5–7], в частности для улучшения асимптотических разложений. Приложения к решению задач механики жидкости и газа и обширная библиография по этому вопросу содержатся в работах [1, 6, 7]. Как правило, паде-преобразование используется для расширения области применимости рядов теории возмущений, поскольку оно осуществляет мероморфное продолжение функции и часто позволяет достичь успеха там, где не проходит аналитическое продолжение [8]. В то же время переход к рациональной функции дает возможность описать нетривиальное поведение на бесконечности и включить в рассмотрение особые точки искомых решений. Эти свойства паде-преобразования практически не использовались в теории возмущений.

В качестве первого примера рассмотрим задачу об обтекании тонкого эллиптического профиля ($-1\leqslant x\leqslant 1$, $-\varepsilon<y<\varepsilon$, $\varepsilon\ll 1$) равномерным плоским потенциальным потоком идеальной жидкости, набегающей со скоростью V. Несколько членов асимптотического разложения для относительной скорости потока на поверхности профиля таковы [1]

$$q^*=\frac{q}{V}=1+\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{1}{2}\varepsilon^3\frac{x^2}{1-x^2}+\ldots \tag{1}$$

Решение (1) расходится у кромки $x=1$. Эта особенность может быть устранена при помощи методов Лайтхилла [1] или обобщенного суммирования [2]. Однако если просто заменить первые члены ряда (1) аппроксимантой Паде, то особенность при $x=1$ исчезнет

$$q^*=\frac{(1-x^2)(1+\varepsilon)}{1-x^2+0{,}5\varepsilon^2x^2}+O(\varepsilon^4) \tag{2}$$

На фигуре показано при $\varepsilon=0{,}5$: *1* — точное решение, штриховая линия — второе приближение по разложению (1); *2* — решение (2), точки — решение по методу Лайтхилла [1], которое дает в данном случае худшие по сравнению с формулой (2) результаты. Заметим, что паде-перестройка первых трех членов ряда теории возмущений совпадает с результатами применения нелинейного преобразования Шенкса [1].

Следующая задача — обтекание тонкого крыла симметричного поперечного сечения (контур крыла описывается уравнением $y=\varepsilon T(x)$) сверхзвуковым равномерным потенциальным потоком невязкого газа со скоростью U. Первые члены разложения компонент вектора скорости V по ε таковы [2, 3]

$$V_x{}^* = \frac{V_x}{U} = 1 - \varepsilon\frac{T'}{B} + \varepsilon^2\left\{\left[1-\frac{1+\gamma}{4}\frac{M^4}{B^2}\right]\frac{T'^2}{B^2} - \frac{1+\gamma}{2}\frac{M^4}{B^3}yT'T''-TT''\right\}+\ldots$$

$$V_y{}^* = \varepsilon T'+\varepsilon^2\left[-\frac{T'}{B}+\frac{1+\gamma}{2}\frac{M^4}{B^2}yT'T''+BTT''\right]+\ldots$$

$$B=M^2-1;\qquad T'=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial y}\right).$$

Здесь M — число Маха для невозмущенного потока, γ^2 — показатель изэнтропы.

Компоненты вектора скорости не стремятся при $y\to\infty$ к постоянным значениям, что исправляется при помощи методов обобщенного суммирования или деформируемых координат [3]. Оказывается, к цели быстрее и проще приводит паде-перестройка

$$V_x{}^* = \frac{4B^3+\varepsilon[T'M^4(\gamma+1)+2(\gamma+1)M^4yT''+4B^4T''T(T')^{-1}]}{4B^3+\varepsilon\{T'[M^4(\gamma+1)-4B^2]+2B(\gamma+1)M^4yT'+4B^4T''T(T')^{-1}\}} \tag{3}$$

$$V_y{}^* = \frac{2\varepsilon B^2T'}{2B^2+\varepsilon[2BT'-M^4(\gamma+1)T''y-2B^3TT''(T')^{-1}]}$$

При $y\to\infty$ из выражений (3) имеем $V_x{}^*\to1$, $V_y{}^*\to0$, что согласуется с физическим смыслом задачи.

Разумеется, предложенный метод не универсален. Его применение требует осторожности и «перекрестной» проверки полученных результатов другими приемами.

Рассмотрим классический пример Лайтхилла [1]

$$(x+\varepsilon y)\frac{dy}{dx}+y=1,\qquad y(1)=2$$

Разложение по степеням ε дает формальное решение

$$y=\frac{1+x}{x}-\frac{\varepsilon}{2}\frac{(1-x)(1+3x)}{x^3}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{(1-x^2)(1+3x)}{x^5}+\ldots$$

Особенность в точке $x=0$ с каждым приближением нарастает. Паде-перестройка устраняет эту особенность. Например, по первым трем членам имеем

$$y=\frac{(1+x)x-(3+x)\varepsilon}{x^2-(1-x)\varepsilon}+O(\varepsilon^3)$$

Однако при $x=0$ получаем хотя и конечное, но неверное значение $y=3$, так как из точного решения [1] имеем $y(0,\varepsilon)=\sqrt{2\varepsilon^{-1}+4}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
2. *Каюк Я. Ф.* Некоторые вопросы метода разложения по параметру. Киев: Наук. думка, 1980. 168 с.
3. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
4. *Диесперов В. Н., Рыжов О. С.* Асимптотические методы в механике жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 2, с. 75–87.
5. *Baker G. A.* Essentials of Pade approximations. N. Y.: Acad. press, 1975, 306 p.
6. Pade approximation and its applications. (Lectures Notes in Math., v. 765). Berlins: Springer, 1979. 382 p.
7. *Апресян Л. А.* Аппроксиманты Паде.— Изв. вузов. Радиофизика, 1979, т. 22, № 6, с. 653–674.
8. *Гончар А. А.* Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций.— Матем. сб., 1981, т. 115, № 4, с. 590–613.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
12.X.1982