

УДК 533.601.155

**К ИССЛЕДОВАНИЮ ОБТЕКАНИЯ КРЫЛЬЕВ БЕСКОНЕЧНОГО
РАЗМАХА ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА**

ГЕРШБЕИН Э. А., ЩЕРБАК В. Г.

В рамках локально-автомодельного приближения уравнений Навье — Стокса исследуются течения однородного газа в гиперзвуковом вязком ударном слое, включающем область перехода через скачок уплотнения, на крыльях бесконечного размаха с затупленной передней кромкой. Рассматривается окрестность линии торможения. Граничные условия, учитывающие вдув или отсос газа, задаются на поверхности тела и в невозмущенном потоке. Используется метод численного решения задачи, предложенный в работе [1] и обобщенный на случай обтекания крыльев под различными углами скольжения. Получено решение задачи в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса, параметра вдува (отсоса) и угла скольжения. Исследование обтекания крыльев с затупленной передней кромкой под различными углами скольжения ранее рассматривалось только в рамках уравнений пограничного слоя (смотри, например, работу [2], в которой дан краткий обзор ранних работ) или гиперзвукового вязкого ударного слоя [3].

1. Рассмотрим обтекание под различными углами скольжения крыльев бесконечного размаха с гладкой затупленной кромкой. Будем исходить из системы уравнений Навье — Стокса, записанной для однородного сжимаемого газа в системе координат x, y, z , нормально связанной с обтекаемой поверхностью, где x^*, y^* — координаты, направленные соответственно вдоль контура и по нормали к нему, координата z^* направлена вдоль образующей. Решение системы уравнений Навье — Стокса в окрестности линии торможения представим в виде разложений в ряды по степеням $\sin \alpha, \cos \alpha$

$$\begin{aligned} u^* &= V_\infty \cos \varphi (u_1(y) \cos \alpha(x) + \dots), & v^* &= -V_\infty \cos \varphi (v_0(y) \sin \alpha(x) + \dots) \\ w^* &= V_\infty \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi (w_0(y) + \dots), & \rho^* &= \rho_\infty^* (\rho_0(y) + \dots), \\ h^* &= V_\infty^2 \cos^2 \varphi (h_0(y) + \dots) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} P^* &= \rho_\infty^* V_\infty^2 \cos^2 \varphi (P_0(y) + P_2(y) \cos^2 \alpha(x) + \dots), & \mu^* &= \mu_\infty^* (\mu_0(y) + \dots) \\ x^* &= Rx, & y^* &= Ry, & \kappa &= 1 + \dots, & a^{-1} &= 1 + \kappa y = 1 + y + \dots \end{aligned}$$

Здесь u^*, v^*, w^* — составляющие скорости, направленные вдоль координат x, y, z соответственно; ρ, P, h, μ — плотность, давление, энтальпия и коэффициент вязкости газа; R — характерный линейный размер; κ — кривизна контура; φ — угол скольжения; α — угол между направлением проекции вектора набегающего потока на плоскость, перпендикулярную образующей, и касательной к контуру крыла; индекс ∞ относится к параметрам в набегающем потоке, V_∞ — модуль вектора скорости набегающего потока.

Подставляя разложения (1.1) в полные уравнения Навье — Стокса и применяя стандартную процедуру обрезания рядов [4], получим для первых членов разложений (1.1) систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Эту систему уравнений преобразуем к переменной Дородни-

цына

$$\eta = \int_0^y \rho dy \quad (1.2)$$

Далее введем функцию тока

$$f = \rho v a^{-1}, \quad u = f' \quad (1.3)$$

и, используя (1.2), получим

$$\rho = 1/\psi', \quad v = f\psi'/\psi, \quad \psi = 1+y \quad (1.4)$$

В выражениях (1.3), (1.4) и далее опущены индексы у искомых функций, за исключением P_0 и P_2 , штрих обозначает дифференцирование по переменной η . С учетом сказанного выше получим следующую систему уравнений для главных членов разложений (1.1):

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mu\rho}{\text{Re}_\infty a} (f'' - \xi) + ff' \right]' &= f'^2 + f'(f' - v) - \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} (f'' - \xi) + \\ &+ \frac{2}{3} \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left[\frac{f}{\psi} \psi'' + 3\xi \right] + 2P_2 \psi' \\ \left(\frac{\mu\rho}{\text{Re}_\infty a} w' + fw \right)' &= fw \\ \left[\frac{\mu\rho}{\text{Re}_\infty a} \left(\frac{4}{3} \frac{f}{\psi} \psi'' + 2\xi \right) + \frac{f^2}{\psi} \psi' \right]' &= \frac{P_0 \psi}{\psi'} \psi'' + \frac{f'f}{\psi} \psi' - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T'}{\psi'} \psi + \\ &+ \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} (f'' - \xi) - \frac{2}{3} \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left(\frac{f}{\psi} \psi'' + 3\xi \right) \\ \left\{ \frac{\mu\rho}{\text{Re}_\infty a} \frac{1}{\sigma} \left[\left(h + \frac{v^2}{2} \right)' + \left(\frac{4}{3} \sigma - 1 \right) \frac{f^2}{\psi^2} \left(\frac{\psi''}{2} \right)' + (2\sigma - 1) \xi \frac{\psi'}{\psi} f + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sigma \left(\frac{w^2}{2} \right)' \text{tg}^2 \varphi \right] + f \left(h + \frac{v^2}{2} \right) + f \frac{w^2}{2} \text{tg}^2 \varphi \right\}' = f' \left(h + \frac{v^2}{2} \right) + f' \frac{w^2}{2} \text{tg}^2 \varphi + \\ &+ \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left[(f'' - \xi) \frac{f}{\psi} \psi' - \frac{2}{3} \left(\frac{f}{\psi} \psi'' + 3\xi \right) f' \right] \\ P_2' &= -P_0' + \xi \frac{f'}{\psi'}, \quad P_0 = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho T, \quad \frac{dh}{dT} = c_p, \quad \xi = \frac{\psi'(f' - v)}{\psi} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь число Re_∞ определяется по параметрам набегающего потока: $\text{Re}_\infty = \rho_\infty V_\infty R / \mu_\infty^*$; σ — число Прандтля; безразмерная температура T определяется соотношением $T = T^* [(\gamma-1) M_\infty^2 T_\infty^*]^{-1}$, где T^* — температура газа; c_p — теплоемкость при постоянном давлении, отнесенная к $c_{p,\infty}^*$; γ , M_∞ , T_∞^* , $c_{p,\infty}^*$ — соответственно отношение теплоемкостей, число Маха, температура и теплоемкость невозмущенного потока.

В этих уравнениях коэффициент объемной вязкости положен равным нулю. Кроме этого, будем предполагать, что коэффициент сдвиговой вязкости пропорционален абсолютной температуре в степени ω : $\mu = [(\gamma-1) M_\infty^2 T]^\omega$.

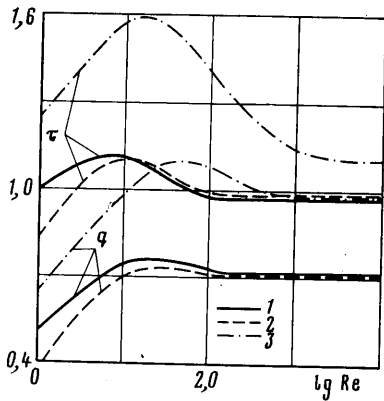
Решение системы уравнений (1.5) удовлетворяет граничным условиям на поверхности тела

$$f = (\rho v)_w = f_w, \quad f' = 0, \quad w = 0, \quad \psi = 1, \quad h = h_w, \quad \eta = 0 \quad (1.6)$$

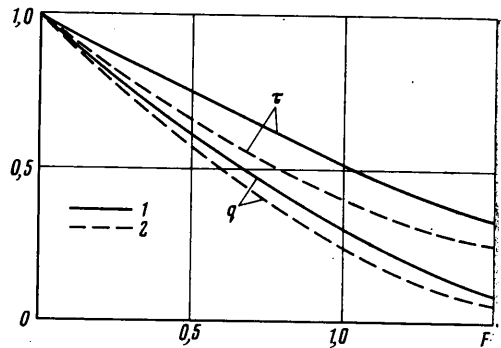
и в невозмущенном потоке

$$f' \rightarrow 1, \quad w \rightarrow 1, \quad \psi' \rightarrow 1, \quad \psi \rightarrow f, \quad h \rightarrow [(\gamma-1) M_\infty^2]^{-1}, \quad P_2 \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

Система уравнений (1.5) имеет особые точки. Особые точки упрощенных уравнений Навье — Стокса исследовались в работах [5, 6] для случая обтекания тел с непроницаемой поверхностью и в работе [1] для случая вдува газа с поверхности тела. Характер особых точек уравнений (1.5) не отличается от характера особых точек уравнений работы [1].



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Задача (1.3) — (1.7) решалась на ЭВМ. При этом в уравнениях (1.5) опускались члены малого порядка. В данном приближении система уравнений имеет вид

$$\left(\frac{\mu\rho}{\text{Re}_\infty a} f'' + ff' \right)' = f'^2 + f'(f' - v) + 2 \frac{P_2}{\rho} \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{\mu\rho}{\text{Re}_\infty a} w' + fw \right)' = fw \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{4}{3} \frac{\mu\rho}{\text{Re}_\infty a} \frac{f}{\psi} \psi'' + \frac{f^2}{\psi} \psi' \right)' = \frac{P_0 \psi}{\psi'} \psi'' + \frac{f'f}{\psi} \psi' - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T'}{\psi'} \psi \quad (2.3)$$

$$\left\{ \frac{\mu\rho}{\text{Re}_\infty a} \frac{1}{\sigma} \left[\left(h + \frac{v^2}{2} \right)' + \left(\frac{4\sigma}{3} - 1 \right) \left(\frac{v^2}{2} \right)' + \sigma \left(\frac{w^2}{2} \right)' \text{tg}^2 \varphi \right] + f \left(h + \frac{v^2}{2} \right) + f \frac{w^2}{2} \text{tg}^2 \varphi \right\}' = f' \left(h + \frac{v^2}{2} \right) + f' \frac{w^2}{2} \text{tg}^2 \varphi \quad (2.4)$$

Остальные уравнения и граничные условия сохраняют свой вид.

При численном решении задачи граничное условие для функции ψ на бесконечности ($\psi \rightarrow f$) переносилось на поверхность тела путем однократного интегрирования уравнения (2.3) от некоторой точки η^* , расположенной в невозмущенном потоке, до поверхности тела. Новое граничное условие имеет вид

$$\frac{4}{3} \frac{\mu_w f_w}{\text{Re}_\infty} \psi_w'' - \left[\left(1 + \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \right) f(\eta^*) - \int_0^{\eta^*} \left(f'v + \frac{\gamma-1}{\gamma} T \right) d\eta \right] \psi_w' + f_w^2 \psi_w''^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma} T_w = 0 \quad (2.5)$$

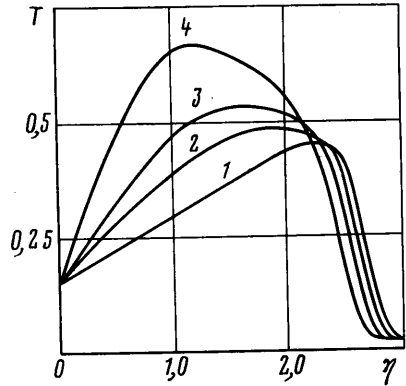
Использовалась конечно-разностная схема [7] с точностью аппроксимации $O(\Delta\eta^4)$. Конечно-разностные уравнения решались в порядке написания (2.1) — (2.4) методом прогонки с итерациями в силу нелинейности уравнений. При линеаризации и задании начальных профилей учитывался характер особых точек. Так как при фиксированной разностной сетке

с увеличением числа Рейнольдса толщина ударной волны становится меньше шага интегрирования (что приводит к осцилляциям параметров течения), при больших числах Рейнольдса $Re_\infty \geq 2,5 \cdot 10^3$, при которых структура ударной волны слабо влияет на параметры течения в ударном слое, производилось искусственное увеличение коэффициента вязкости в области ударной волны. В области пограничного слоя вязкость оставалась истинной. При этом положение ударной волны определялось по поведению ψ' . В результате область ударной волны содержала не менее 3–4 ячеек разностной сетки. В области пограничного слоя при больших числах Рейнольдса производилось измельчение сетки.

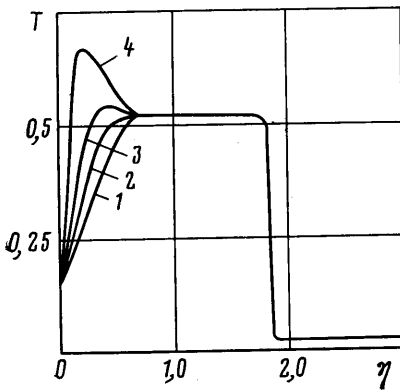
В численных расчетах варьировались параметры Re_∞ , φ , f_w , γ , ω , T_w/T_0 (T_0 — температура торможения) в следующих пределах: $Re_\infty = 10 - 5 \cdot 10^4$; $\varphi = 0 - 70^\circ$; $f_w = -0,5 - 0,5$; $\gamma = 1,4, 5/3$; $\omega = 0,5 - 1,0$; $T_w/T_0 = 0,03 - 1,0$. Числа M_∞ , σ принимали значения: $M_\infty = 10$; $\sigma = 0,71, 0,75$. Теплоемкость газа считалась постоянной.

Следует отметить, что толщина возмущенной области в случае плоского течения существенно превышает толщину этой области в случае осесимметричного течения. Переменные Дородницына сближают профили искомых величин, растягивая их в пристеночной области течения, что позволяет получать решение на достаточно редкой сетке (для $Re_\infty \leq 10^3$) с постоянным шагом интегрирования.

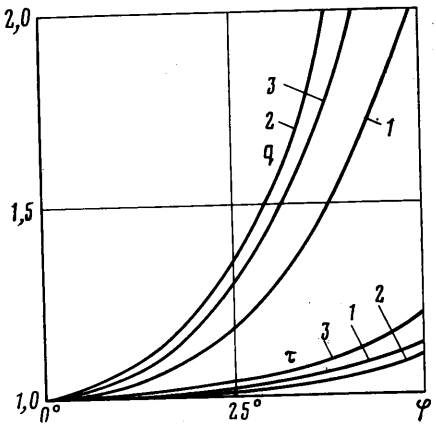
Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 1–5. Зависимости коэффициентов трения $\tau = \mu (du/dy) \sqrt{Re}/Re_\infty$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

и теплообмена $q = \mu (dT/dy) \sqrt{Re}/(\sigma Re_\infty)$ на поверхности тела от числа Рейнольдса $Re = \rho_\infty V_\infty R/\mu^*(T_0^*)$ приведены на фиг. 1, кривые 1 ($\varphi = 0$, $\gamma = 1,25$, $\omega = 1$, $T_w/T_0 = 0,1$, $\sigma = 0,71$, $f_w = 0$). При $Re \geq 10$ тепловой поток и коэффициент трения, полученные в данной работе, удовлетворительно совпадают с аналогичными величинами, полученными в работе [8], в которой решались уравнения гиперзвукового вязкого ударного слоя с модифицированными условиями Рэнкина — Гюгонно на ударной волне (кривые 2). Там же для сравнения приведены аналогичные кривые 3, полученные из решения уравнений Навье — Стокса в параболическом приближении в окрестности критической точки сферы.

На фиг. 2 приведены коэффициент трения и тепловой поток при вдуве, отнесенные к их значениям при $f_w=0$, в зависимости от параметра вдува $F = -f_w \sqrt{\text{Re}} [(\gamma-1)/(\gamma+1)]^{1/4} (-2P_{2w})_{f_w=0}^{-1/4}$, обычно рассматриваемом в теории пограничного слоя (кривые 1), рассчитанные при $T_w/T_0=0,3$, $\sigma=0,75$, $\omega=0,5$, $\varphi=0$ и для различных параметров f_w , Re_∞ и γ . Там же приведены аналогичные величины, полученные для осесимметричного течения в работе [9] (кривые 2). Из расчетов следует, что данные зависимости являются универсальными (при фиксированном температурном факторе) в широком диапазоне чисел f_w , Re_∞ и γ и удовлетворительно совпадают с соответствующими величинами, полученными из решений уравнений пограничного [2] и вязкого ударного слоев [8].

На фиг. 3, 4 показана зависимость профилей температуры поперек слоя для различных углов скольжения и чисел Рейнольдса $\text{Re}_\infty=50; 1000$ ($\gamma=1,4$, $\omega=0,5$, $T_w/T_0=0,3$, $\sigma=0,75$, $f_w=0$). Следует отметить появление характерных всплесков температуры в области пограничного слоя при больших числах Рейнольдса. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют углам скольжения $\varphi=0, 40, 50, 60^\circ$.

На фиг. 5 приведены в зависимости от угла скольжения φ тепловой поток и коэффициент трения, отнесенные к их значениям при $\varphi=0$. Кривые 1, 2 соответствуют $T_w/T_0=0,03, 0,5$; $\omega=0,5$, кривая 3 — $T_w/T_0=0,3$, $\omega=1$. Остальные параметры следующие: $\text{Re}_\infty=50$, $\gamma=1,4$, $\sigma=0,75$, $f_w=0$. Данные зависимости с точностью до графического изображения совпадают с аналогичными зависимостями, полученными в работе [8] в рамках теории гиперзвукового ударного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершбейн Э. А., Колесников А. Ф. Численное решение уравнений Навье — Стокса в окрестности притупления тел, обтекаемых гиперзвуковым потоком разреженного газа при наличии вдува. — В кн.: Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 69—77.
2. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Ламинарный пограничный слой на стреловидных крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углом атаки. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 3, с. 27—39.
3. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А. Гиперзвуковой вязкий ударный слой на стреловидных крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углом атаки. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 2, с. 94—102.
4. Као. Гиперзвуковое вязкое течение вблизи критической линии тока затупленного тела. Ч. 1, 2. — Ракетная техника и космонавтика, 1964, т. 2, № 11, с. 3—21.
5. Левинский Е., Иосихара Х. Обтекание сферы гиперзвуковым потоком разреженного газа. — В кн.: Исследование гиперзвуковых течений. М.: Мир, 1964, с. 62—77.
6. Архипов В. Н., Поленов А. Н. Обтекание сферы гиперзвуковым потоком вязкого релаксирующего газа. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 3, с. 74—81.
7. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. — В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964, с. 304—325.
8. Гершбейн Э. А., Шелин В. С., Юницкий С. А. Исследование гиперзвукового вязкого ударного слоя на крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углами атаки и скольжения. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 2, с. 104—108.
9. Гершбейн Э. А., Колесников А. Ф. Исследование влияния вдува на течение в гиперзвуковом вязком ударном слое вблизи линии торможения затупленного тела. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 1, с. 199—202.

Москва

Поступила в редакцию
27.IV.1983