МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1984

УДК 533.601:34

# НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА В ГАЗЕ, ДВИЖУЩЕМСЯ ВБЛИЗИ ТВЕРДОЙ СТЕНКИ

КОЛЫХАЛОВ П. И.

Известно, что тангенциальный разрыв между двумя слоями несжимаемой жидкости неустойчив с инкрементом $\gamma = kv/2$ ($k = 2\pi/\lambda$). Неустойчивость имеет место и в случае, когда разность скоростей в потоке $v$ больше скорости звука $a$. Однако при достаточно больших значениях числа Маха ($M \geqslant 2\sqrt{2}$) для двумерных возмущений неустойчивость отсутствует [1] и неустойчивыми оказываются только трехмерные возмущения [2]. В [1, 2] рассматривались возмущения в неограниченной среде, и на решение накладывалось естественное ограничение, требующее исчезновения возмущений на бесконечности. Такие возмущения аналогичны возмущениям в несжимаемом потоке и носят названия дозвуковых. Отказ от такого условия на бесконечности приводит к сверхзвуковым возмущениям [3, 4], которые, по существу, являются звуковыми волнами в движущемся потоке, и с учетом этих возмущений проявляется новый тип неустойчивости с характерной зависимостью от граничных условий. Для появления неустойчивости уже недостаточно существования механизма, раскачивающего возмущения (звуковые волны), и при отсутствии отражающей стенки неустойчивость не развивается. Похожая ситуация отмечалась при отражении электромагнитных волн от вращающихся тел Я. Б. Зельдовичем [5] – амплитуды волн, отражающихся с усилением, экспоненциально растут, если вращающееся тело окружить отражающей оболочкой.

Для тангенциального разрыва основной остается все же гидродинамическая мода, но рассматриваемая неустойчивость интересна тем, что механизм ее раскачки отличается от механизма раскачки дозвуковой моды. Такая неустойчивость может оказаться существенной в случаях, когда отсутствует гидродинамическая неустойчивость (например, для течений с профилем скорости без точки перегиба [6]).

Пусть с одной стороны от разрыва поток ограничен твердой стенкой, а с другой стороны возмущения убывают на бесконечности до нуля. В такой системе нет стационарного излучения звука и возмущения растут не из-за внешнего воздействия, а вследствие перекачки энергии исходного течения в энергию возмущений. Для малых чисел Маха и больших волновых чисел ($kL \gg 1$, $L$ – расстояние от тангенциального разрыва до стенки) возмущения спадают не только в неограниченной области потока, но и в области между стенкой и разрывом. При $kL \to \infty$ (а реально при $kL \gtrsim 3$) инкремент равен $\gamma = kv/2$. В случае $M \gtrsim 1$ существуют возмущения, амплитуда которых не является быстро убывающей функцией в области между стенкой и разрывом, и поток с тангенциальным разрывом неустойчив даже в случае двумерных возмущений.

Причина неустойчивости состоит в том, что звуковая волна, падающая на тангенциальный разрыв, может отражаться от него с усилением [7]. При некоторых комбинациях параметров волна, отражаясь от разрыва и от стенки, окажется в резонансе и будет экспоненциально набирать энергию, черпая ее из исходного течения. Из общих соображений ясно, что время нарастания такой неустойчивости близко к времени пробега звуковой волны от разрыва до стенки, т. е. $\gamma \sim a/L$.

Известно [8, 9], что нелинейное развитие длинноволнового возмущения приводит к рождению коротковолновых гармоник и нелинейное затухание звука может оказаться существенным даже тогда, когда амплитуда звуковых волн мала. Однако для $M \sim 1$, $kL \sim 1$ нелинейное затухание практически не ограничивает амплитуду возмущений.

**1. Дисперсионное уравнение.** Запишем уравнения газовой динамики в виде

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{dV_y}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{d\rho}{dt}=-\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{V},\quad \frac{dP}{dt}=a^2\frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y}$$

Пусть поток газа движется вдоль оси $y$, а скорость невозмущенного течения меняется в зависимости от $x$, т. е. $V_y=w(x)$. Рассмотрим адиабатические возмущения, для которых $d(\delta P)/dt=a^2d(\delta\rho)/dt$. Будем считать, что невозмущенные значения скорости звука, давления и плотности постоянны во всем потоке. Обозначив через $c$ фазовую скорость возмущений, запишем возмущенные величины в виде

$$V_x=v_x(x)\exp[ik(y-ct)]$$

$$V_y=w(x)+v_y(x)\exp[\ldots],\qquad \rho=\rho_0+\rho(x)\exp[\ldots]$$

$$P=\rho_0a^2\{1+p(x)\exp[\ldots]\}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только растущих возмущений, для которых мнимая часть $c=c_R+ic_i$ положительна $c_i>0$. Отметим, что для растущих возмущений не возникает трудностей, связанных с отбрасыванием вязких членов и понижением порядка уравнений [3]. Инкремент неустойчивости выражается через $c_i$ ($\gamma=kc_i$). Линеаризуем систему уравнений газодинамики и, опуская промежуточные выкладки, запишем уравнение для безразмерного возмущения давления [4], а также выражения для возмущений скорости вдоль оси $X$ и для возмущения смещения вдоль оси $X$

$$\frac{d^2p}{dx^2}-\frac{2dw/dx}{w-c}\frac{dp}{dx}+k^2\left[\left(\frac{w-c}{a}\right)^2-1\right]p=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d\xi_x}{dt}=v_x$$

$$v_x=-i\frac{a^2}{c-w}\frac{1}{k}\frac{dp}{dx},\qquad \xi_x=\frac{a^2}{(c-w)^2}\frac{1}{k^2}\frac{dp}{dx} \tag{1.2}$$

Пусть теперь в точке $x=-L$ находится твердая стенка, в области $-L<x<0$ скорость потока равна нулю, $w(x)=0$, а в области $x>0$ скорость постоянна, $w(x)=v$. Тогда уравнение (1.1) легко решается в области $x<0$ и $x>0$ соответственно

$$p=B\cos\left[k(x+L)\sqrt{(c/a)^2-1}+\varphi\right] \tag{1.3}$$

$$p=A_1\exp\left[ikx\sqrt{\left(\frac{v-c}{a}\right)^2-1}\right]+A_2\exp\left[-ikx\sqrt{\left(\frac{v-c}{a}\right)^2-1}\right] \tag{1.4}$$

Решения (1.2) и (1.3) необходимо сшить в точке $x=0$ так, чтобы в этой точке совпадали значения давления $p(\pm0)$ и смещения $\xi_x(\pm0)$ справа и слева от разрыва. Граничное условие непротекания на твердой стенке $v_x(-L)=0$ будет удовлетворено, если в (1.3) положить $\varphi=0$. В (1.4) следует выбрать коэффициенты $A_1$ и $A_2$ так, чтобы решение спадало до нуля при $x\to\infty$. Прежде всего определим значение корня в комплексной области так, что мнимая часть корня всегда положительна $\mathrm{Im}\sqrt{z}>0$. (Разумеется, от выбора ветви функции $\sqrt{z}$ конечный результат не зависит.) При таком определении корня решение (1.4) спадает на бесконечности только если $A_2=0$. Сшивая (1.3) и (1.4) в точке $x=0$ получим дисперсионное соотношение

$$\mathrm{tg}\left(\sqrt{(c/a)^2-1}\,kL\right)=-i\frac{\sqrt{(v-c)^2-a^2}}{\sqrt{c^2-a^2}}\frac{c^2}{(v-c)^2} \tag{1.5}$$

Теперь задача заключается в нахождении корней $c=c_R+ic_i$ уравнения (1.5). Легко доказать, что действительная часть $c$ в случае $c_i\neq0$ удовлетворяет соотношению $0<c_R<v$. Это утверждение ($\min w(x)<c_R<\max w(x)$) носит характер теоремы, аналогичной теореме о точке перегиба.

**2. Асимптотические решения дисперсионного уравнения.** Прежде всего получим решение (1.5) в пределе малых чисел Маха ($M\ll1$), т. е. в пределе несжимаемой жидкости. Предполагая $|c|\ll a$, получим соотношение $\operatorname{th}(kL)=-c^2/(c-v)^2$, которое легко получить из решения линеаризованных уравнений гидродинамики. Неустойчивость Кельвина — Гельмгольца соответствует случаю, когда твердая стенка находится достаточно далеко и $\operatorname{th}(kL)\to1$. Функция $\operatorname{th}(x)$ близка к единице (с точностью $5\cdot10^{-3}$) уже при $x=3$. В случае $kL>3$ с хорошей точностью получаем $c=(v+iv)/2$ и инкремент неустойчивости Кельвина — Гельмгольца $\gamma=kv/2$.

Обратимся теперь к противоположному случаю $M\gg1$. Предположим, что $a\ll c_R$, $a\ll v-c_R$ и $0<c_i\ll c_R$. Учитывая данное выше определение ветви функции $\sqrt{z}$, получим разложение корней в (1.5): $\sqrt{c^2/a^2-1}\approx c/a$, $\sqrt{(v-c)^2/a^2-1}\approx(c-v)/a$, и если выполняется условие $kLa\ll c_R$, то (1.5) можно записать в простом виде

$$\operatorname{tg}\left(\frac{ckL}{a}\right)=i\frac{c}{v-c} \tag{2.1}$$

В последующем, получив $c$, можно убедиться, что если $1\ll kL\ll M$, то все сделанные предположения справедливы и (2.1) эквивалентно (1.5). Воспользуемся соотношением $\operatorname{tg}(x+iy)=(\sin 2x+i\operatorname{sh}2y)/(\cos 2x+\operatorname{ch}2y)$. Представим (2.1) в виде двух уравнений для двух действительных неизвестных $c_R$ и $c_i$

$$\begin{gathered}\frac{\sin(2c_RkL/a)}{\cos(2c_RkL/a)+\operatorname{ch}(2c_ikL/a)}=-\frac{c_iv}{(v-c_R)^2}\\ \frac{\operatorname{sh}(2c_ikL/a)}{\cos(2c_RkL/a)+\operatorname{ch}(2c_ikL/a)}=\frac{c_R}{v-c_R}\end{gathered} \tag{2.2}$$

Не исследуя детально систему (2.2), укажем решение, представляющее только несколько точек $k_m$ на дисперсионной кривой $c=c(k)$. Пусть $k_mL=(3\pi/2+2m\pi)/M$ ($m$ — большое целое число), тогда $c=v/2+i\gamma_0a/kL$, где $\gamma_0$ — коэффициент порядка единицы (если $\exp(2\gamma_0)\gg1$, то значение $\gamma_0$ легко найти из трансцендентного уравнения $2\gamma_0\exp(2\gamma_0)=MkL$). Инкремент неустойчивости в этом случае равен $\gamma=\gamma_0a/L$, что по порядку величины близко к обратному времени пробега звукового возмущения от стенки до тангенциального разрыва. Убедиться в справедливости этого решения проще всего, подставив приведенные значения $c_R$, $c_i$, $kL$ в систему уравнений (2.2). Легко убедиться и в том, что все упрощения, проделанные нами на пути от уравнения (1.5) к системе (2.2), вполне обоснованы.

В принципе, можно несколько смягчить ограничения $1\ll kL\ll M$, $a\ll c_R$, $a\ll v-c_R$, но смысла в этом немного, поскольку, как показано ниже, наиболее важные решения соответствуют $kLM\sim1$.

Рассмотрим (в тех же предположениях) еще один интересный случай. Пусть поток заключен между двумя параллельными стенками и вторая стенка находится в точке $x=L$. Дисперсионное уравнение удобно записать в симметричном виде, заменив $c$ на $v/2+s$, где $s=s_R+ic_i$

$$\frac{\operatorname{tg}((v/2+s)kL/a)}{\operatorname{tg}((v/2-s)kL/a)}=-\frac{v/2+s}{v/2-s} \tag{2.3}$$

Это уравнение содержит два условия: равенство модулей правой и левой частей и равенство фаз. Поскольку $\operatorname{tg}z^*=(\operatorname{tg}z)^*$, модули правой и левой частей (2.3) равны (независимо от значения $kL/a$ и $v$) в том случае, если $s$ – чисто мнимое число ($s_R=0$). После ряда преобразований получим соотношение $\sin(MkL)=-(c_i/v)\,\mathrm{sh}\,(kLc_i/a)$, которое имеет положительные корни в случае $\sin(MkL)<0$. Если $\sin(kLM)=-1$, то $c_i\approx\gamma_0 a/kL$, где $\gamma_0\sim1$ и практически не зависит от $k$, а действительная часть фазовой скорости возмущений равна нулю в системе отсчета, движущейся со скоростью $v/2$. Эти обстоятельства являются отражением факта симметрии задачи относительно замены $x\to-x$.

**3. Нелинейные эффекты и ограничение на амплитуду возмущений.** Наиболее важным следствием развития неустойчивости может быть какая-либо значительная перестройка исходного течения – возникновение вторичного течения или переход к турбулентности. Эти явления происходят при достаточно больших значениях амплитуды возмущений. Однако рост возмущений, естественно, ограничен нелинейными эффектами, и неустойчивость может не оказать сколько-нибудь заметного влияния на исходное течение. Такая ситуация часто встречается, когда неустойчивыми оказываются моды собственных колебаний газодинамической или плазменной системы и существуют механизмы диссипации энергии колебаний, эффективность которых растет с увеличением амплитуды. В этом случае на фоне исходного течения существуют колебания малой амплитуды. Параметром малости может служить отношение амплитуды возмущений давления к давлению газа $\delta P/P$ или отношение возмущения скорости к скорости звука $\delta v/a$. Если возбуждено много мод, то говорят о слабой или акустической турбулентности [10, 11].

В рассматриваемой нами проблеме (в случае $M\gg1$) происходит нарастание амплитуды звуковых волн. Хорошо известно (см. [8, 9]), что в синусоидальном возмущении вследствие нелинейных эффектов за характерное время $\tau_\lambda\sim\lambda/\delta v$ рождаются коротковолновые движения и синусоидальная волна превращается в пилообразное возмущение, точнее, в систему ударных волн, расположенных на расстоянии $\lambda$. При наличии неустойчивости звуковые волны с длиной волны $\lambda\sim1/\varkappa$ черпают энергию из исходного течения, а в коротковолновых возмущениях ($\lambda^*\ll\lambda$), порожденных из длинноволновых нелинейными эффектами, происходит диссипация энергии. Нарастание возмущений происходит до тех пор, пока характерное время нелинейного затухания звуковой волны $\tau_\lambda\sim\lambda/\delta v$ не станет меньше характерного времени развития неустойчивости $1/\gamma$, которое не зависит от амплитуды. Таким образом, амплитуда неустойчивых звуковых волн ограничена величиной $(\delta v)_{\max}=Aa\sim\gamma/\varkappa$.

Волновое число $\varkappa$ не совпадает с волновым числом $k$, определенным в п. 1, поскольку волна распространяется под углом к оси $x$ так, что $\varkappa^2=k^2+k^2[\mathrm{Re}\sqrt{(c/a)^2-1}]^2$. Если выполнены условия $1\ll kL\ll M$, то $\varkappa\approx Mk/2$, и так как $\gamma=\gamma_0 a/L$, мы получим ограничение на безразмерную амплитуду возмущения скорости $A=(\delta v)_{\max}/a\leqslant2\gamma_0/MkL\ll1$. Это обстоятельство делает возмущения с большими $kL$ и $M$ малосущественными. Их преимущество ограничивается только тем, что этот случай допускает весьма полное аналитическое исследование.

| $M$ | $kL$ | $\gamma_0$ | $c_R/a$ | $A=\delta v_{\max}/a$ |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 10,22584 | 2,6 | 50 | $5\cdot10^{-3}$ |
| 10 | 10 | 1,7 | 5,0 | $3\cdot10^{-2}$ |
| | 3 | 1,2 | 5,1 | $8\cdot10^{-2}$ |
| | 1 | 0,85 | 5,4 | $2\cdot10^{-2}$ |
| 3 | 10 | 1,4 | 1,5 | $1\cdot10^{-1}$ |
| | 3 | 0,86 | 1,8 | $2\cdot10^{-1}$ |
| | 1 | $\begin{cases}0,21\\0,51\end{cases}$ | $\begin{cases}0,94\\2,0\end{cases}$ | $\begin{cases}6\cdot10^{-1}\\3\cdot10^{-1}\end{cases}$ |
| 0,03 | 6 | $c_i=0,015v$ | $c_R=0,015v$ | — |

Численное исследование (1.5) не представляет особого труда, и в таблице приведены результаты поиска корней дисперсионного уравнения для четырех значений чисел Маха. Первая и последняя строки таблицы иллюстрируют совпадение численных и асимптотических методов. В случае $M=10$ и 3 из всех корней выбраны те, для которых $\gamma_0$ не мало и $A$ максимально. (Впрочем, нет гарантии, что найдены самые удачные корни.) Из таблицы видно, что для не слишком больших чисел $M$ и $kL$ нелинейное затухание практически не ограничивает амплитуду возмущений.

Автор благодарит Я. Б. Зельдовича за обсуждение и многочисленные полезные советы, А. Ф. Андреева и Ю. Э. Любарского за обсуждение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.
2. *Сыроватский С. И.* Неустойчивость тангенциальных разрывов в сжимаемой среде.– ЖЭТФ, 1954, т. 27, с. 121–123.
3. *Линь Цзяцзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 196 с.
4. *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 350 с.
5. *Зельдович Я. Б.* Усиление цилиндрических электромагнитных волн при отражении от вращающегося тела.– ЖЭТФ, 1972, т. 62, № 6, с. 2076–2081.
6. *Колыхалов П. И.* Неустойчивость плоскопараллельных сверхзвуковых потоков.– Препринт ИКИ АН СССР, 1984.
7. *Ribner H. S.* Reflection, transmission and amplification of sound by a moving medium.– J. Acoust. Soc. America, 1957, v. 29, № 4, p. 435–441.
8. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
9. *Кадомцев Б. Б., Карпман В. И.* Нелинейные волны.– Усп. физ. наук, 1971, т. 103, № 2, с. 193–232.
10. *Галеев А. А., Карпман В. И.* Турбулентная теория слабонеравновесной плазмы и структура ударных волн.– ЖЭТФ, т. 44, № 2, с. 592–602.
11. *Захаров В. Е., Сагдеев Р. З.* О спектре акустической турбулентности.– Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 2, с. 297–300.

Москва

Поступила в редакцию
30.V.1983