

УДК 533.6.011.8

**ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ И ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ
ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ЧЕПМЕНА — ЭНСКОГА**

ГАЛКИН В. С., КОГАН М. Н., МАКАШЕВ Н. К.

Данная работа стала необходимой в связи с публикацией статьи [1]. Неравновесные течения многоатомных газов, в которых происходят процессы обмена внутренней энергией молекул при их столкновениях и химические реакции (такие процессы называют неупругими), широко распространены в природе и технике. Поэтому естествен интерес к выводу газодинамических уравнений для таких течений. Сначала методами кинетической теории газов были получены уравнения, описывающие предельные случаи очень быстрых неупругих процессов, происходящих на временах порядка времени между столкновениями молекул (равновесный случай), и очень медленных неупругих процессов, происходящих на временах порядка характерного времени течения (релаксационный случай). В работах [2-5] предложен алгоритм вывода уравнений газодинамики, справедливых при произвольных отношениях скоростей упругих и неупругих процессов и переходящих в известные для упомянутых предельных случаев. Алгоритм назван обобщенным методом Чепмена — Энскага (короче, обобщенным методом). Развитие, модификации и анализ его свойств даны в [4, 6-13]. В [1] высказываются сомнения в справедливости этого алгоритма.

Ниже рассмотрены основные положения обобщенного метода и разбираются суждения, высказанные в [1] о его справедливости. Указано место результатов, полученных в работах [14-17].

1. Одним из путей построения уравнений газодинамики является их вывод на основе решения кинетических уравнений. Эти уравнения в случае многоатомных газов, когда столкновения молекул сопровождаются различными неупругими процессами, обычно записываются в безразмерном виде [18, 19]

$$\varepsilon \frac{df_{\alpha}}{dt} = \varepsilon \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \xi_{\alpha} \nabla f_{\alpha} \right) = \frac{1}{2} J_{\alpha}^e(f, f) + \sum_i \alpha^{(i)} \frac{1}{2} J_{\alpha}^R(f, f)_{(i)} \quad (1.1)$$

где f_{α} — функция распределения по скоростям ξ_{α} молекул сорта N во внутреннем состоянии ω ($\Omega \equiv N\omega$); $1/2 J_{\alpha}^e$, $1/2 J_{\alpha}^R_{(i)}$ — интегралы упругих и различных неупругих столкновений; $\varepsilon = \lambda_0 / L_0 \sim \tau_0 / \theta_0$ — число Кнудсена, причем λ_0 и τ_0 — длина и время свободного пробега. Время t и координаты x в левой части (1.1) отнесены соответственно к θ_0 и L_0 — временному и пространственному масштабам течения или процесса.

Важно подчеркнуть, что приведение кинетических уравнений к виду (1.1), где параметры ε и $\alpha^{(i)}$ не зависят от энергий молекул, возможно при следующих предположениях: а) масштабы изменения f_{α} и макропараметров газа (например, температуры) совпадают; б) процессы релаксации могут быть охарактеризованы не зависящими от энергий молекул средними длинами $\lambda_{R,i}$ или временами $\tau_{R,i}$ релаксации, в результате чего параметры $\alpha^{(i)}$ в (1.1) могут трактоваться как отношения $\lambda_0 / \lambda_{R,i}$ или $\tau_0 / \tau_{R,i}$.

Эти предположения, а вместе с ними и получаемые для $\varepsilon \ll 1$ методом Чепмена — Энскага решения (1.1) верны для «купола» f_{α} , т. е. для энергий

поступательного и внутреннего движения молекул порядка средней тепловой энергии kT , k — постоянная Больцмана, T — температура газа. Получение решений на «хвостах» f_α , т. е. в области больших, чем kT , энергий молекул, в общем случае требует применения других приемов решения.

В работе [1] говорится о быстрых и медленных переменных. В связи с этим сделаем ряд замечаний о явлениях, для которых вообще возможно газодинамическое (макроскопическое) описание.

Если масштабы L_0 и ϑ_0 заданы начальными и граничными условиями, параметры ε и $\alpha^{(i)}$ являются независимыми. Здесь при $\varepsilon \ll 1$ столкновения молекул делают f_α близкой к локально-максвелловскому распределению и «приспосабливают» скорости неупругих процессов к скоростям изменения макропараметров газа на масштабах L_0 или ϑ_0 . Источником возмущения равновесного распределения при этом является левая часть уравнения (1.1), граничные и начальные условия на f_α . Гидродинамика возможна при $\varepsilon \ll 1$ и любых $\alpha^{(i)}$ вне слоев Кнудсена и ударных волн толщиной λ_0 . В этом случае все зависимые переменные меняются лишь на масштабе L_0 или ϑ_0 и в таком смысле они являются медленными.

Совсем иная ситуация имеет место тогда, когда масштабы L_0 или ϑ_0 навязаны ходом какого-либо неупругого процесса (состояние газа изменяется, например, из-за протекания реакции в однородном пространстве или за прямым скачком). Здесь L_0 и ϑ_0 совпадают с длиной и временем этого неупругого процесса, а число Кнудсена ε — с соответствующим ему параметром $\alpha^{(i)}$. Здесь гидродинамика возможна, если только $\alpha^{(i)} \equiv \varepsilon \ll 1$. При $\alpha^{(i)} \equiv \varepsilon = O(1)$ необходимо кинетическое описание на уровне функции распределения f_α .

Обобщенный метод предназначен для первого случая. Во втором для $\alpha^{(i)} \equiv \varepsilon \ll 1$ решение (1.1) формально совпадает с решением для релаксационного случая и также может быть получено с помощью обобщенного метода.

Следует еще подчеркнуть, что методы типа метода Чепмена — Энскога дают внешние асимптотические разложения решений (т. е. решения в медленных переменных) вне кнудсеновских слоев толщиной порядка λ_0 (или τ_0), процессы в которых описываются на кинетическом уровне. Введение быстрых и медленных переменных необходимо при сращивании внешних и внутренних (в кнудсеновских слоях) разложений, т. е. при выводе граничных и начальных условий для макроскопических уравнений.

Для того чтобы установить вид уравнений газодинамики и вычислить входящие в них коэффициенты переноса, решение уравнения (1.1) ищется в виде разложения по степеням $\varepsilon \ll 1$. Исторически первыми были рассмотрены случаи быстрых ($\varepsilon \rightarrow 0$, $\alpha^{(i)} = O(1)$, равновесный случай) и замедленных ($\varepsilon \sim \alpha^{(i)} \rightarrow 0$, релаксационный случай) неупругих процессов, а также их комбинации (одни $\alpha^{(i)} = O(1)$, другие $\alpha^{(i)} \sim \varepsilon \rightarrow 0$). Обзоры соответствующих работ даны, например, в [18, 19]. В результате были получены уравнения газодинамики, которые записываются для различных наборов макроскопических величин, включают в себя разное количество по-разному вычисляемых коэффициентов переноса и не переходят друг в друга.

Целью создания обобщенного метода было перебросить «мост» между всеми частными случаями и получить единые уравнения газодинамики для всего спектра $\alpha^{(i)} \leq 1$ и $\varepsilon \leq 1$. Необходимость в таких уравнениях вызвана тем, что внутренние степени свободы молекул в одном и том же течении могут «проходить» весь спектр состояний от равновесного до замороженного (т. е. от $\alpha^{(i)} \sim 1$ до $\alpha^{(i)} < \varepsilon$) из-за изменения зависящих от температуры параметров $\alpha^{(i)}$ или из-за изменения локального значения числа Кнудсена ε .

В работах [2–13] было показано, что такие уравнения получить можно, был сформулирован не зависящий от величины $\alpha^{(i)}$ алгоритм решения уравнений (1.1) в виде разложения f_α по степеням ε и установлено, что точность получаемых газодинамических уравнений в каждом приближе-

нии по ε равномерна по $\alpha^{(i)}$ и определяется исключительно локальной величиной числа Кнудсена ε .

Отметим, что получаемые обобщенным методом уравнения неравновесной газодинамики записываются для того же набора макропараметров и имеют такой же структурный вид, что и уравнения, выведенные ранее для релаксационного случая ($\alpha^{(i)} \sim \varepsilon \rightarrow 0$), т. е. включают в себя уравнения для заселенностей или их упрощенные модели. Важно подчеркнуть, что уравнения именно такой структуры используются для «сквозного» расчета неравновесных течений газа без предварительного выделения областей течения с равновесными, замороженными и т. д. внутренними степенями свободы молекул. Однако входящие в них коэффициенты переноса, вычисленные для релаксационного случая, определяются только сечениями упругих столкновений; в равновесном же случае они должны зависеть и от сечений неупругих процессов.

Согласно обобщенному методу, коэффициенты переноса зависят от сечений упругих и неупругих процессов, соответствующие уравнения газодинамики переходят в уравнения для всех частных случаев, отличающихся предположениями о величине $\alpha^{(i)}$. Степень зависимости коэффициентов переноса от сечений неупругих процессов определяется сортом газа, его температурой и характером неупругих столкновений молекул, а важность учета зависимости — требуемой точностью расчета данного течения. В ряде случаев этой зависимостью можно пренебречь и пользоваться уравнениями для релаксационного случая, следующими из уравнений обобщенного метода в приближении, названном в [2] обобщенным приближением Эйкена. Обобщенный метод позволяет обосновать это приближение, обычно используемое на практике, с общей точки зрения и получить соответствующие выражения для переносных свойств [2, 12].

Особо подчеркнем, что неравновесные поправки в скоростях неупругих процессов, согласно обобщенному методу входят в уравнения по-иному, чем в релаксационном случае. Однако их учет при решении многих газодинамических задач несуществен, но необходим в специальных случаях (см. [2, 11, 12] и далее по тексту).

Укажем также, что различные модификации обобщенного метода, данные в работах [2–12], отличаясь между собой на промежуточных этапах получения решения для f_a (доля числовой плотности Ω -молекул порядка $O(\varepsilon)$ по-разному распределяется между членами разложения (см. [14] и п. 4)), приводят к одинаковым уравнениям газодинамики. Поэтому различия между вариантами обобщенного метода не принципиальны и сводятся только к соображениям большего или меньшего удобства процедуры получения решения для f_a .

2. Перейдем к разбору критических замечаний работы [1] в адрес обобщенного метода, придерживаясь в основном последовательности изложения, принятой ее автором.

Область применимости обобщенного метода. Утверждается, что введение параметра α в представлении (1.1) существенно сужает круг рассматриваемых ситуаций и, в частности, неприменимо для описания высокопороговых реакций. Это замечание нужно было бы обратить прежде всего к работам Чепмена и Энскога, Ванг Чанга и Уленбека, а также ко всем последующим многочисленным работам, использовавшим представление (1.1) (см. [18, 19]). Область его справедливости указана выше. Целью обобщенного метода является построение алгоритма, пригодного при любых α , а не расширение круга описываемых явлений. Ограниченность такой постановки была ясна авторам, следствием чего явился цикл работ одного из них [20–23], в котором показана неприменимость в общем случае метода Чепмена — Энскога и обобщенного метода, в частности, для описания реакций с высокими порогами.

Характер разложения f_a в обобщенном методе. Функция f_a ищется в виде ряда по ε , первый член которого есть функция $f_a^{(0)}$, равновесная по

скоростям молекул. В работах, посвященных предельным ситуациям, первый член разложения f_α по ε удовлетворяет уравнениям

$$J_\alpha^\varepsilon(f^{(0)}, f^{(0)}) + \alpha J_\alpha^R(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0 \quad (\alpha = O(1)) \quad (2.1)$$

$$J_\alpha^\varepsilon(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0 \quad (\alpha \sim \varepsilon \rightarrow 0) \quad (2.2)$$

т. е. также является равновесным распределением по скоростям молекул, или максвелловским распределением. В работах по обобщенному методу показано, что если $f_\alpha^{(0)}$ — максвелловское распределение по скоростям, удовлетворяющее уравнению (2.2), то в (2.1) член $\alpha J_\alpha^R(f^{(0)}, f^{(0)}) = O(\varepsilon)$ при любых α и, следовательно, должен учитываться в следующем приближении вместе с другими членами того же порядка. Функции $f_\alpha^{(0)}$ имеют при этом множителями числовые плотности молекул n_α . При $\alpha = O(1)$ вследствие уравнений газодинамики n_α близки к локально-равновесным. Следовательно, вместе с n_α функции $f_\alpha^{(0)}$ также становятся равновесными и по внутренним степеням свободы молекул. Если в число неупругих процессов входят быстрые резонансные обмены, это также учитывается соответствующими значениями n_α .

Наиболее важно утверждение [1] о том, что обобщенный метод дает разложение f_α не по ε , а по α , и что это разложение некорректно для $\alpha = O(1)$. Несправедливость утверждения следует из того факта, что полученные обобщенным методом уравнения газодинамики при $\alpha = O(1)$ переходят в известные для равновесного случая уравнения, которые являются следствием разложения f_α в ряд по ε , а не по $\alpha = O(1)$. Более детально ошибка [1] состоит в неправильной оценке величины $DR_\alpha^{(0)}/Dt$ и ей подобных.

Интегрируя (1.1) по скоростям ξ_α , получим уравнение (все $\alpha^{(i)}$ для простоты считаем одного порядка)

$$\frac{Dn_\alpha}{Dt} + n_\alpha \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{j}_\alpha = \frac{\alpha}{\varepsilon} \int \frac{1}{2} J_\alpha^R(f, f) d\xi_\alpha \equiv \frac{\alpha}{\varepsilon} R_\alpha = \frac{\alpha}{\varepsilon} (R_\alpha^{(0)} + \varepsilon R_\alpha^{(1)} + \dots) \quad (2.3)$$

$$R_\alpha^{(0)} = \int \frac{1}{2} J_\alpha^R(f^{(0)}, f^{(0)}) d\xi_\alpha, \quad R_\alpha^{(1)} = \int J_\alpha^R(f^{(0)}, f^{(0)} \varphi^{(1)}) d\xi_\alpha, \dots$$

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} (1 + \varepsilon \varphi_\alpha^{(1)} + \dots), \quad \varphi_\alpha^{(1)} = O(1), \quad D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \nabla$$

где n_α — числовая плотность Ω — молекул, \mathbf{u} — скорость газа, \mathbf{j}_α — диффузионный поток. Поскольку слева в (2.3) члены порядка единицы (макропараметры газа по условию изменяются на масштабах L_0 или ϑ_0 , т. е. на масштабе порядка единицы в безразмерном виде), то R_α и $R_\alpha^{(0)}$ имеют величину $O(\varepsilon/\alpha)$ в каждой точке течения. Очевидно, что величина $R_\alpha^{(0)} = O(\varepsilon/\alpha)$ только при специальных пилообразных граничных условиях может иметь на масштабе $O(1)$ производную $DR_\alpha^{(0)}/Dt = O(1)$. В остальных

случаях на масштабах порядка единицы $DR_\alpha^{(0)}/Dt \sim R_\alpha^{(0)} \sim \varepsilon/\alpha$. Более детальное доказательство дано в п. 5.

Второе «доказательство» того, что в обобщенном методе разложение идет по α , в [1] строится следующим образом. Правая часть уравнения (2.3) переписывается в виде

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} R_\alpha^{(0)} (1 + \alpha \eta_\alpha + \dots), \quad \eta_\alpha = \frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{R_\alpha^{(1)}}{R_\alpha^{(0)}} = O(1)$$

т. е., с учетом малости первого члена разложения ($R_\alpha^{(0)} = O(\varepsilon/\alpha)$), ряд по ε «превращается» в кажущийся ряд по α (для следующих членов ряд идет по ε , но об этом в [1] умалчивается). Однако хорошо известно, что неко-

торые члены ряда, в том числе и первый, могут вообще равняться нулю. В этом случае ошибочность принятой в работе [1] процедуры «доказательства» очевидна.

Неравновесные поправки в скоростях реакций. В работе [1] обращается внимание на то, что при $\alpha=O(1)$ член $\varepsilon R_{\Omega}^{(1)}$ становится соизмеримым с $R_{\Omega}^{(0)}$, так как последний имеет порядок ε/α , и делается ссылка на работы [2–5, 11, 12], где утверждается, что при решении газодинамических задач обтекания можно ограничиться учетом лишь обычно используемого главного члена $R_{\Omega}^{(0)}$ даже при $\alpha=O(1)$. Факт наличия и роль конечной для $\alpha=O(1)$ неравновесной поправки к $R_{\Omega}^{(0)}$ анализировались уже в первых работах по обобщенному методу [2–5, 24]. Проведенный анализ позволил сформулировать упомянутый выше вывод и указать случаи, где учет $R_{\Omega}^{(1)}$ и следующих членов разложения R_{Ω} необходим при $\alpha=O(1)$ уже в главном приближении: диссипативные процессы, связанные с механизмом второй вязкости (см. п. 5 работы [2]). В [11, 12] были отмечены и другие задачи, где необходим учет $R_{\Omega}^{(1)}$.

Поясним сказанное на примере модельного релаксационного уравнения, имеющего свойства общего уравнения (2.3)

$$\frac{dn_{\alpha}}{dt} \equiv \frac{Dn_{\alpha}}{Dt} + n_{\alpha} \nabla u + \nabla j_{\alpha} = \frac{\alpha}{\varepsilon} a(T) (n_{\alpha}^e - n_{\alpha}) + \alpha R_{\alpha}^{(1)} \quad (2.4)$$

где n_{α}^e — равновесное значение n_{α} . Дополняющие (2.3) или (2.4) уравнения газодинамики можно записать в таком виде, когда в них входят величины n_{α} , а не скорости реакций R_{α} (см. п. 5). Для определения n_{α} служат уравнения (2.3) или (2.4).

Так как $dn_{\alpha}/dt=O(1)$, то из (2.4) имеем

$$n_{\alpha} = n_{\alpha}^e - \frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{1}{a(T)} \frac{dn_{\alpha}}{dt} + \frac{\varepsilon}{a(T)} R_{\alpha}^{(1)}$$

т. е. вклад в n_{α} члена, содержащего $R_{\Omega}^{(1)}$, всегда имеет порядок ε . Его можно не учитывать в главном приближении, находя значения n_{α} из обычного релаксационного уравнения

$$\frac{dn_{\alpha}}{dt} = \frac{\alpha}{\varepsilon} a(T) (n_{\alpha}^e - n_{\alpha})$$

как это обычно и делается в неравновесной газодинамике. Это правильно еще и потому, что при $\alpha=O(1)$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ плотности n_{α} близки n_{α}^e . В результате можно получить решение без уравнений для n_{α} , подставляя в остальные уравнения $n_{\alpha} = n_{\alpha}^e$. Для $\alpha \sim \varepsilon \rightarrow 0$ член с $R_{\Omega}^{(1)}$ вообще мал и также может не учитываться.

Однако, если стоит задача нахождения константы скорости реакции $a(T)$ по измеренным значениям n_{α} и dn_{α}/dt или необходимо вычислить определяемый разностью $n_{\alpha} - n_{\alpha}^e$ коэффициент второй вязкости, учет $R_{\Omega}^{(1)}$, а в некоторых случаях и других слагаемых, для $\alpha=O(1)$ принципиально необходим [2, 11, 12].

Заметим также, что сама по себе возможность пренебрежения членом с $R_{\Omega}^{(1)}$ еще не противоречит известным экспериментальным фактам об отличии скорости химической реакции от равновесной: скорость реакции

$R_N^{(0)} = \sum_{\alpha} R_{\alpha}^{(0)}$ зависит от расселения молекул по уровням ω , которое

в течении может быть и неравновесным, в том числе из-за самой реакции.

Порядок решения линейного интегрального уравнения с оператором L_α^s . Это уравнение имеет вид

$$L_\alpha^s(\psi) \equiv J_\alpha^e(\psi) + \alpha J_\alpha^{rs}(\psi) = \Phi_\alpha, \quad \Phi_\alpha = O(1) \quad (2.5)$$

где Φ_α — известные функции, $J_\alpha^e(\psi)$ — линейризованный интеграл упругих столкновений [18], $J_\alpha^{rs}(\psi)$ — самосопряженная часть линейризованного интеграла неупругих столкновений [2]. Разберем встречающиеся в обобщенном методе случаи и покажем, что для них вопреки утверждению [1] решение (2.5) не содержит слагаемых $O(1/\alpha)$.

Общее решение (2.5) имеет вид (для простоты газ с химическими реакциями не рассматриваем, так как учет реакций по существу мало что меняет)

$$\psi_\alpha = a_0 + \mathbf{b}_0 m_\alpha c_\alpha + d_0 (m_\alpha c_\alpha^2 / 2 + E_\alpha) + \psi_{\alpha,1} / \alpha + \psi_{\alpha,2}, \quad c_\alpha = \xi_\alpha - \mathbf{u} \quad (2.6)$$

Здесь m_α — масса молекулы, E_α — ее внутренняя энергия, $\psi_{\alpha,k} = O(1)$, $k=1, 2$; a_0, \mathbf{b}_0, d_0 — произвольные функции t, \mathbf{x} ; $\psi_{\alpha,1}$ обращает в ноль J_α^e , т. е. является комбинацией инвариантов упругих столкновений

$$\psi_{\alpha,1} = a_\alpha + \mathbf{b} m_\alpha c_\alpha + d m_\alpha c_\alpha^2 / 2$$

Функция $\psi_{\alpha,2}$ не обращает в ноль J_α^e и всегда может быть сделана ортогональной $\psi_{\alpha,1}$ с весом $f_\alpha^{(0)}$, где $f_\alpha^{(0)}$ — максвелловское распределение

$$f_\alpha^{(0)} = n_\alpha F_\alpha, \quad F_\alpha = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_\alpha c_\alpha^2}{2kT} \right)$$

т. е. можно считать, что $\psi_{\alpha,2}$ удовлетворяет условиям

$$\sum_\alpha \int f_\alpha^{(0)} \psi_{\alpha,1} \psi_{\alpha,2} d\mathbf{c}_\alpha = 0, \quad \int f_\alpha^{(0)} \psi_{\alpha,2} d\mathbf{c}_\alpha = 0$$

В силу произвольного характера величин \mathbf{b}_0 и d_0 в $\psi_{\alpha,1}$ можно не учитывать члены $\mathbf{b} m_\alpha c_\alpha$ и $d m_\alpha c_\alpha^2 / 2$ — они всегда могут быть скомпенсированы выбором \mathbf{b}_0 и d_0 . В итоге вместо (2.6) для общего решения уравнения (2.5) запишем

$$\psi_\alpha = a_0 + \mathbf{b}_0 m_\alpha c_\alpha + d_0 (m_\alpha c_\alpha^2 / 2 + E_\alpha) + a_\alpha / \alpha + \psi_{\alpha,2} \quad (2.7)$$

В варианте обобщенного метода [2] имеем $\int \Phi_\alpha d\mathbf{c}_\alpha = 0$. Интегрируя (2.5), для определения a_α в (2.7) получаем уравнения

$$\int \alpha J_\alpha^{rs} \left(\frac{a}{\alpha} + \psi_2 \right) d\mathbf{c}_\alpha = 0 \quad \left(\int J_\alpha^e(\psi) d\mathbf{c}_\alpha = 0 \right) \quad (2.8)$$

откуда $a_\alpha = O(\alpha)$, и ψ_α , не дающие вклада в полную числовую плотность $n = \sum_\alpha n_\alpha$, \mathbf{u}, T , имеют величину $O(1)$.

В варианте обобщенного метода [11] имеем $\int \Phi_\alpha d\mathbf{c}_\alpha = \alpha A_\alpha$, $A_\alpha = O(1)$.

Здесь вместо (2.8) получим уравнение

$$\int \alpha J_\alpha^{rs} \left(\frac{a}{\alpha} + \psi_2 \right) d\mathbf{c}_\alpha = \alpha A_\alpha$$

откуда опять $a_\alpha = O(\alpha)$, $\psi_\alpha = O(1)$.

В варианте обобщенного метода [6–10] решение просто в силу своего определения (отсутствие вклада в n_α) не содержит члена a_α / α . Аналогич-

ная ситуация имеет место и в приведенном в [14, 12] доказательстве эквивалентности модификаций обобщенного метода: в силу определения использующиеся в нем функции χ_α не содержат в себе слагаемых a_α/α .

Отметим, что автор [1] не замечает членов $O(1/\alpha)$ в своих решениях. Для принятых в [14–17] условий (равновесие не только по скоростям, но и по группе внутренних степеней свободы молекул) функции Φ_α таковы, что интегралы $\int \Phi_\alpha d\epsilon_\alpha$ не равны нулю. Это является формальной при-

чиной появления членов $O(1/\alpha)$ в решениях, хотя автор [1] явно не вводит параметр α в свой алгоритм. Поэтому разложения f_α , которые действительно получает он в своих работах, есть разложения не по ϵ , а по более сложной последовательности.

Симметризация линейризованного интегрального оператора. Суждения авторов по этому поводу изложены в [2, 11]. Здесь лишь укажем, что симметризация является принципиальным шагом, поскольку позволяет получать решения, удовлетворяющие принципу симметрии кинетических коэффициентов Онзагера. Кроме этого, симметризация позволяет использовать обычный аппарат вычисления членов разложения f_α , так как при этом известен вид всех собственных функций интегрального оператора и можно записать общие решения уравнений. Остается справедливым и известный вариационный принцип вычисления коэффициентов переноса. Процедура симметризации, как показано в [2–4], не нарушает точности каждого приближения к решению по ϵ .

Несамосопряженные операторы, которые использует в своих работах автор [1], приводят к решениям, не удовлетворяющим соотношениям Онзагера. Неизвестный вид их собственных функций делает процедуру получения решения, которая используется, например, в [16], нестрогой.

Разложение n_α и секулярные члены. Разложение n_α по степеням ϵ , которое встречается в работах [2–5], никакого, даже формального, отношения к методу Гильберта не имеет. Это результат введения новых зависимых переменных $n_\alpha^{(0)}$, отличающихся от n_α на члены $O(\epsilon)$. Поправки $n_\alpha^{(k)}$ ($k \geq 1$) — некоторые функции $n_\alpha^{(0)}$, и, T (как и, например, тензор напряжений или поток тепла), определяемые из решений интегральных уравнений для членов разложения f_α , а не из дифференциальных уравнений, которых в обобщенном методе нет. Соответственно в нем нет опасности возникновения секулярных членов.

3. Таким образом, критика обобщенного метода в [1] несостоятельна. В то же время работы [14–17] являются ничем иным, как применением этого метода в одной из эквивалентных его модификаций [6–10] с попыткой распространения на «хвосты» f_α по энергиям E_α .

Действительно, подход [14–17] отличается от [6–10] только в двух отношениях: 1) учтено, что к группе быстрых процессов помимо поступательной релаксации могут относиться некоторые неупругие процессы; 2) линейризованный интегральный оператор в уравнениях для членов разложения f_α не симметризуется.

Первое отличие — шаг назад по сравнению с обобщенным методом. При таком подходе нужно перебирать разные частные случаи и каждый раз для вывода макроскопических уравнений искать решение для f_α . С помощью уравнений газодинамики, получаемых обобщенным методом, это можно делать проще, на уровне макроскопического описания. О следствиях второго отличия сказано ранее в конце п. 2 (*Симметризация...*).

Поэтому вопрос о приоритете автора [1] может рассматриваться только в связи с проблемой распространения обобщенного метода на $E_\alpha \gg kT$. Но аргументы автора [1] в пользу применимости метода для $E_\alpha \gg kT$ недостаточны, получаемые уравнения и их решения в ряде случаев ошибочны, а используемый подход противоречит поставленной цели.

Например, в работах [14–17] используется H -теорема для определения структуры решения во всем рассматриваемом диапазоне энергий молекул

$$f_\alpha = F_\alpha^{(0)} + \epsilon \Phi_\alpha, \quad \Phi_\alpha = O(1) \quad (3.1)$$

где $F_{\Omega}^{(0)}$ — локально-равновесное распределение по c_{Ω} и некоторым из E_{Ω} . Затем только на основе (3.1) строится алгоритм получения Φ_{Ω} , в главных чертах аналогичный методу Чепмена — Энскога. Однако «хвосты» f_{Ω} практически не дают вклада в скорость изменения H -функции, величина которой поэтому никак не определяет свойства Φ_{Ω} при $E_{\Omega} \gg kT$. Согласно [23], эти свойства могут быть принципиально отличными от свойств решений, получаемых методами типа метода Чепмена — Энскога: иногда Φ_{Ω} является нелокальной функцией параметров течения в конечной окрестности точки, где вычисляется f_{Ω} .

Определение соотношения между членами в уравнении для f_{Ω} должно исходить из оценок, зависящих от рассматриваемого диапазона E_{Ω} и c_{Ω} . Поэтому, если существует величина E_{*} такая, что для $E_{\Omega} \sim E_{*}$ имеем $F_{\Omega}^{(0)} \sim \epsilon \Phi_{\Omega}$, то в уравнении для Φ_{Ω} , решаемом при $E_{\Omega} \sim E_{*}$, нельзя заменять в главном приближении df_{Ω}/dt на $dF_{\Omega}^{(0)}/dt$, как это делается в [14–17]. Следствием этой замены являются полученные автором [1] пропорциональные ∇u конечные неравновесные поправки в скоростях неупругих процессов, которые в таком виде не могут быть корректно получены в рамках любого варианта метода Чепмена — Энскога (и обобщенного метода тоже) [23].

Наконец, согласно этой же работе, используемое в [14–17] расширение группы быстрых процессов за счет включения в нее некоторых неупругих обменов сужает возможности решений, получаемых методами типа метода Чепмена — Энскога, при описании движения сильновозбужденных молекул, к чему стремится автор [1] в своих работах.

4. Покажем эквивалентность вариантов обобщенного метода. Рассмотрим уравнения для скалярной по c_{Ω} части $\varphi_{\Omega}^{(1)}$, определяемой разложением

$$f_{\Omega} = f_{\Omega}^{(0)} (1 + \epsilon \varphi_{\Omega}^{(1)} + \dots) \equiv f_{\Omega}^{(0)} + \epsilon f_{\Omega}^{(1)} + \dots$$

так как уравнения для векторной и тензорной частей $\varphi_{\Omega}^{(1)}$ в [2–5] и [6–10] совпадают. В [6–10] для исключения $D_0 n_{\Omega}/Dt$ использовалось выражение [5]

$$\frac{D_0 n_{\Omega}}{Dt} = -n_{\Omega} \nabla u + \frac{\alpha}{\epsilon} R_{\Omega}(f^{(0)}, f^{(0)}) + \alpha R_{\Omega}^S(f^{(0)}, f^{(1)}) \quad (4.1)$$

$$R_{\Omega}^S(f^{(0)}, f^{(1)}) = \int J_{\Omega}^{RS}(f^{(0)}, f^{(1)}) dc_{\Omega}, \quad R_{\Omega}(f^{(0)}, f^{(0)}) \equiv R_{\Omega}^{(0)} = O\left(\frac{\epsilon}{\alpha}\right)$$

В итоге для скалярной по c_{Ω} части $\varphi_{\Omega}^{(1)}$ получалось уравнение с более сложным, чем L_{Ω}^S , интегральным оператором Π_{Ω}^S

$$\begin{aligned} f_{\Omega}^{(0)} \frac{\alpha}{\epsilon} \left[\frac{R_{\Omega}^{(0)}}{n_{\Omega}} - \frac{1}{p} \left(\frac{m_{\Omega} c_{\Omega}^2}{3kT} - 1 \right) \sum_{\Psi} E_{\Psi} R_{\Psi}^{(0)} \right] - \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{1}{2} J_{\Omega}^R(f^{(0)}, f^{(0)}) &= \Pi_{\Omega}^S(f^{(1)}) \equiv \\ \equiv L_{\Omega}^S(f^{(1)}) - f_{\Omega}^{(0)} \alpha \left[\frac{1}{n_{\Omega}} R_{\Omega}^S(f^{(0)}, f^{(1)}) - \frac{1}{p} \left(\frac{m_{\Omega} c_{\Omega}^2}{3kT} - 1 \right) \sum_{\Psi} E_{\Psi} R_{\Psi}^S(f^{(0)}, f^{(1)}) \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Оператор Π_{Ω}^S имеет достаточное для вычисления по $f_{\Omega}^{(0)}$ всех макропараметров (в том числе n_{Ω}) число собственных функций, вид которых был найден.

В [2–5] сразу была поставлена задача вывода для $f_{\Omega}^{(k)}$, $k \geq 1$, таких же по виду уравнений, как и в обычных вариантах метода Чепмена — Энскога, где операторы D_h/Dt от макропараметров исключаются с помощью соотношений, в которые входят вклады только $f_{\Omega}^{(n)}$, $n \leq k$. Для получения алгоритма [2–5] из [6–10] разложим n_{Ω} в ряд по ϵ так, чтобы для первого, например, по ϵ порядка выполнялось условие

$$\alpha R_{\Omega}^S(f_0^{(0)}, n^{(1)} F) + \alpha R_{\Omega}^S(f_0^{(0)}, f_*^{(1)}) = 0, \quad n_{\Omega} = n_{\Omega}^{(0)} + \epsilon n_{\Omega}^{(1)} + \dots \quad (4.3)$$

Здесь величины с индексом 0 снизу вычисляются по $n_{\Omega}^{(0)}$, $f_{\Omega}^{(1)}$ — решение по [6–10]. Система (4.3) имеет единственное решение для $n_{\Omega}^{(1)}$, обладающее свойствами

$$\sum_{\Omega} n_{\Omega}^{(1)} = 0, \quad \sum_{\Omega} n_{\Omega}^{(1)} X_{\Omega}^{(p)} = 0 \quad (4.4)$$

т. е. не дающее вклада в n и числовую плотность атомов p -го сорта $n_p = \sum n_{\Omega} X_{\Omega}^{(p)}$, $X_{\Omega}^{(p)}$ — число таких атомов в Ω — молекуле. Подставляя разложение n_{Ω} в $R_{\Omega}(f^{(0)}, f^{(0)})$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\varepsilon} R_{\Omega}(f^{(0)}, f^{(0)}) &= \frac{\alpha}{\varepsilon} R_{\Omega}(f_0^{(0)}, f_0^{(0)}) + \alpha R_{\Omega}^S(f_0^{(0)}, n^{(1)}F) + O(\varepsilon) = \\ &= \frac{\alpha}{\varepsilon} R_{\Omega}(f_0^{(0)}, f_0^{(0)}) - \alpha R_{\Omega}^S(f_0^{(0)}, f_*^{(1)}) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

а затем полученный результат в (4.1) и (4.2), найдем соотношение для исключения

$$\frac{D_0 n_{\Omega}^{(0)}}{Dt} = -n_{\Omega}^{(0)} \nabla \mathbf{u} + \frac{\alpha}{\varepsilon} R_{\Omega}(f_0^{(0)}, f_0^{(0)})$$

и уравнение для скалярной части $\varphi_{\Omega 0}^{(1)} = n_{\Omega}^{(1)} + \varphi_{\Omega *}$

$$f_{\Omega}^{(0)} \frac{\alpha}{\varepsilon} \left[\frac{R_{\Omega 0}^{(0)}}{n_{\Omega}^{(0)}} - \frac{1}{p} \left(\frac{m_{\Omega} c_{\Omega}^2}{3kT} - 1 \right) \sum_{\Psi} E_{\Psi} R_{\Psi 0}^{(0)} \right] - \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{2} J_{\Omega}^R(f_0^{(0)}, f_0^{(0)}) = L_{\Omega}^S(\varphi_0^{(1)})$$

которые использованы в [2–5].

Аналогично можно перейти от решения [6–10] к алгоритму [11], для чего в правой части (4.3) необходимо дописать член αA_{Ω} , $A_{\Omega} = O(1)$, где A_{Ω} — произвольные функции t, \mathbf{x} , удовлетворяющие условиям (4.4). Изменение A_{Ω} на свою величину приводит к изменению главного члена в разложении $n_{\Omega} = n_{\Omega A}^{(0)} + \varepsilon n_{\Omega A}^{(1)} + \dots$ на величину $O(\varepsilon)$.

Таким образом, различие вариантов обобщенного метода заключается в перераспределении доли $O(\varepsilon)$ плотности n_{Ω} между членами разложения $n_{\Omega} = n_{\Omega}^{(0)} + \varepsilon n_{\Omega}^{(1)} + \dots$. Эффективные плотности $n_{\Omega}^{(0)}$ имеют смысл новых зависимых переменных, уравнения для которых, вообще говоря, могут отличаться от уравнений для n_{Ω} .

5. Оценим неоднородную часть уравнения для $\varphi_{\Omega}^{(2)}$. Центральным пунктом критики обобщенного метода в [1] является утверждение, что метод дает разложение f_{Ω} в ряд не по ε , а по α . Это мнение автора [1] связано с оценкой входящих в неоднородную часть уравнения для $\varphi_{\Omega}^{(2)}$ слагаемых $D_0 f_{\Omega}^{(1)} / Dt$, $D_1 f_{\Omega}^{(1)} / Dt$, $c_{\Omega} \nabla f_{\Omega}^{(1)}$, которые в силу свойств $f_{\Omega}^{(1)}$ для рассмотренного в [1] случая четырехкомпонентной смеси с одной реакцией содержат в себе члены $(\alpha/\varepsilon) D_0 R_{\Omega 0}^{(0)} / Dt$, $(\alpha/\varepsilon) c_{\Omega} \nabla R_{\Omega 0}^{(0)}$. Согласно [1], величины

$$D_0 R_{\Omega 0}^{(0)} / Dt = O(1), \quad c_{\Omega} \nabla R_{\Omega 0}^{(0)} = O(1) \quad (5.1)$$

даже при $R_{\Omega 0}^{(0)} = O(\varepsilon/\alpha)$. Поэтому $\varphi_{\Omega}^{(2)} = O(\alpha/\varepsilon)$, $\varepsilon^2 f_{\Omega}^{(2)} / \varepsilon f_{\Omega}^{(1)} = O(\alpha)$ и разложение идет по α . На самом деле

$$D_0 R_{\Omega 0}^{(0)} / Dt = O(\varepsilon/\alpha), \quad c_{\Omega} \nabla R_{\Omega 0}^{(0)} = O(\varepsilon/\alpha) \quad (5.2)$$

функции $\varphi_{\Omega}^{(2)} = O(1)$ и разложение f_{Ω} идет по ε . Формальная причина ошибки [1] состоит в неучете зависимости входящих в $R_{\Omega 0}^{(0)}$ констант скоростей реакций от T . Прямое вычисление, когда это обстоятельство принято во внимание, дает (5.2). Однако на этом пути необходимо проводить значительные выкладки. Проще другой подход, излагаемый ниже. Из условий разрешимости уравнения для $\varphi_{\Omega 0}^{(1)}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{D_0 n_{\Omega}^{(0)}}{Dt} &= -n_{\Omega}^{(0)} \nabla \mathbf{u} + \frac{\alpha}{\varepsilon} R_{\Omega 0}^{(0)}, \quad \frac{D_0 n}{Dt} = -n \nabla \mathbf{u} \\ \frac{3}{2} nk \frac{D_0 T}{Dt} &= -p \nabla \mathbf{u} - \sum_{\Omega} E_{\Omega} R_{\Omega 0}^{(0)}, \quad p = nkT \end{aligned} \quad (5.3)$$

Соотношения (5.3) преобразуем к виду

$$n \frac{D_0 Y_{\alpha}^{(0)}}{Dt} = \frac{\alpha}{\varepsilon} R_{\alpha 0}^{(0)}, \quad \frac{D_0 Y_p}{Dt} = 0, \quad n \frac{D_0}{Dt} \left(\frac{3}{2} kT + E^{(0)} \right) = -p \nabla u \quad (5.4)$$

$$Y_{\alpha}^{(0)} = \frac{n_{\alpha}^{(0)}}{n}, \quad Y_p = \frac{n_p}{n}, \quad \sum_{\alpha} Y_{\alpha}^{(0)} E_{\alpha} = E^{(0)}$$

где Y_p — концентрация атомов p -го сорта. В случае $\alpha \gg \varepsilon$ концентрации $Y_{\alpha}^{(0)}$ близки к локально-равновесным [19] $Y_{\alpha}^e = Y_{\alpha}^e(Y_p, T)$, т. е. $Y_{\alpha}^{(0)} = Y_{\alpha}^e(Y_p, T) [1 + O(\varepsilon/\alpha)]$. Поэтому здесь $E^{(0)} = E^e(Y_p, T) [1 + O(\varepsilon/\alpha)]$, а из третьего соотношения (5.4) можно получить, что

$$\frac{D_0 T}{Dt} = -\frac{2}{3} \frac{c_v}{c_v + c_i} T \nabla u \left[1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \right]$$

причем $c_v = 1,5k$, $c_i = \partial E^e / \partial T$ — теплоемкости. Теперь выпишем цепочку равенств, из которой следуют оценки (5.2)

$$\begin{aligned} \left[\frac{D_0}{Dt}; c_{\alpha} \nabla \right] R_{\alpha 0}^{(0)} &= \partial [R_{\alpha 0}^{(0)}] = \partial \left[\frac{\varepsilon}{\alpha} n \frac{D_0 Y_{\alpha}^{(0)}}{Dt} \right] = R_{\alpha 0}^{(0)} \partial [\ln n] + \\ &+ \frac{\varepsilon}{\alpha} n \partial \left[\frac{D_0 Y_{\alpha}^e}{Dt} \right] + O \left[\left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \right)^2 \right] = \frac{\varepsilon}{\alpha} n \partial \left[\frac{\partial Y_{\alpha}^e}{\partial T} \frac{D_0 T}{Dt} \right] + O \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \right) = \\ &= -\frac{\varepsilon}{\alpha} n \frac{2}{3} \partial \left[\frac{c_v}{c_v + c_i} T \nabla u \frac{\partial Y_{\alpha}^e}{\partial T} \right] + O \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \right) = O \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

Последнее равенство в этой цепочке справедливо в силу того, что под знаком оператора $\partial \equiv [D_0/Dt; c_{\alpha} \nabla]$ находятся величины, зависящие только от u , T , Y_p , т. е. макропараметров газа, операторы D_0/Dt и $c_{\alpha} \nabla$ от которых имеют величину $O(1)$.

Таким образом, справедливы оценки (5.2), а не (5.1), и разложение f_{α} в обобщенном методе идет по степеням ε .

Авторы выражают признательность В. А. Рыкову за полезные и конструктивные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колесниченко Е. Г. О различных методах вывода гидродинамических уравнений для химически реагирующих газов. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 3.
2. Галкин В. С., Коган М. Н., Макашев Н. К. Обобщенный метод Чепмена — Энскога. Ч. 1. Уравнения неравновесной газовой динамики. — Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 5, с. 66–76.
3. Галкин В. С., Коган М. Н., Макашев Н. К. Обобщенный метод Чепмена — Энскога. — Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 2, с. 304–307.
4. Макашев Н. К. О свойствах обобщенного метода Чепмена — Энскога. — Тр. ЦАГИ, 1976, вып. 1742, с. 27–39.
5. Галкин В. С., Коган М. Н., Макашев Н. К. Обобщенный метод Чепмена — Энскога: вывод уравнений неравновесной газодинамики. — Тр. 4-й Всес. конф. по динамике разреженного газа и молекулярной газовой динамике. М.: Изд. отд. ЦАГИ, 1977, с. 312–318.
6. Мацуик В. А., Рыков В. А. О методе Чепмена — Энскога для смеси газов. — Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 1, с. 49–51.
7. Мацуик В. А., Рыков В. А. Распространение метода Чепмена — Энскога на смеси реагирующих газов. — Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1978, т. 18, № 1, с. 167–182.
8. Мацуик В. А., Рыков В. А. О методе Чепмена — Энскога для многоскоростной многотемпературной реагирующей смеси газов. — Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1978, т. 18, № 5, с. 1230–1242.
9. Мацуик В. А. О методе Чепмена — Энскога для химически реагирующей газовой смеси с учетом внутренних степеней свободы. — Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1978, т. 18, № 4, с. 1043–1048.
10. Рыков В. А., Скобелкин В. Н. О макроскопическом описании движений газа с вращательными степенями свободы. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 1, с. 180–183.
11. Коган М. Н., Макашев Н. К. О построении уравнений газодинамики для много-

- атомных газов с произвольным отношением скоростей упругих и неупругих процессов.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 2, с. 57–70.
12. *Kogan M. N., Galkin V. S., Makashev N. K.* Generalized Chapman – Enskog method: derivation of the nonequilibrium gasdynamic equations.— In: *Rarefield Gas Dynamics*. V. 2. Paris, 1979, p. 693–734.
 13. *Макашев Н. К.* К выводу уравнений движения колебательно возбужденных газов.— *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*, 1982, т. 22, № 4, с. 913–925.
 14. *Колесниченко Е. Г.* Вывод гидродинамических уравнений для многоатомных и химически реагирующих газов.— *Докл. АН СССР*, 1978, т. 240, № 1, с. 40–42.
 15. *Колесниченко Е. Г.* Кинетика химических реакций и релаксационных процессов в газовых потоках.— В кн.: *Динамика разреженного газа*. Тр. 6-й Всес. конф., т. 1. Новосибирск, 1980, с. 68–73.
 16. *Колесниченко Е. Г., Лосев С. А.* Кинетика релаксационных процессов в движущихся средах.— В кн.: *Химия плазмы*. Вып. 6. М.: Атомиздат, 1979, с. 209–229.
 17. *Колесниченко Е. Г.* О методике вывода гидродинамических уравнений для сложных систем.— *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1981, № 3, с. 96–105.
 18. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
 19. *Валландер С. В., Нагнибеда Е. А., Рыдалевская М. А.* Некоторые вопросы кинетической теории химически реагирующей смеси газов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 280 с.
 20. *Макашев Н. К.* Свойства решения уравнения Больцмана при высоких энергиях поступательного движения молекул и их следствия.— *Докл. АН СССР*, 1981, т. 258, № 1, с. 52–56.
 21. *Асмолов Е. С., Макашев Н. К.* О возмущении равновесной кинетики высокопорговых химических реакций.— *Докл. АН СССР*, 1981, т. 261, № 3, с. 562–566.
 22. *Абрамов А. А., Макашев Н. К.* Нарушение равновесной кинетики высокопорговых реакций в течениях с переменной по пространству температурой газа.— *Докл. АН СССР*, 1982, т. 263, № 5, с. 1083–1087.
 23. *Макашев Н. К.* Особенности релаксации сильновозбужденных молекул и связанные с ними неравновесные эффекты в газодинамике.— *Докл. АН СССР*, 1982, т. 264, № 1, с. 52–55.
 24. *Макашев Н. К.* О решении уравнения Больцмана в задачах обтекания тел в режиме сплошной среды.— *Тр. ЦАГИ*, 1976, вып. 1742, с. 70–90.

Москва

Поступила в редакцию
13.IV.1983