

УДК 533.6.011.8

## О РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДАХ ВЫВОДА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩИХ ГАЗОВ

КОЛЕСНИЧЕНКО Е. Г.

За последние годы в литературе был опубликован ряд работ, посвященных разработке методов получения гидродинамических уравнений для химически реагирующих газов из обобщенного уравнения Больцмана. Выводы разных авторов во многом не согласуются друг с другом и, кроме того, в вопросе о соотношении различных подходов существует еще ряд недоразумений. Это заставляет подробнее остановиться на смысле исходных предположений и пределах применимости указанных методов. Данная заметка посвящена анализу этих вопросов.

Условимся, что под выражением «вывод гидродинамических уравнений» понимается построение для определенного набора гидродинамических переменных  $\Gamma$  оператора  $U$ , позволяющего вычислить переменные  $\Gamma$  из решения уравнения  $U(\Gamma) = 0$ .

Остановимся сначала на работах [1–3], в которых развивается подход, названный авторами обобщенным методом Чепмена — Энскога. Для простоты обсудим его на примере четырехкомпонентной смеси газов из частиц без внутренних степеней свободы с одной химической реакцией  $\Omega + \Psi \rightleftharpoons \Lambda + \Delta$  (буквы здесь обозначают сорта химических компонентов смеси).

Исходным пунктом работ [1–3] является обобщенное уравнение Больцмана, записанное в следующей безразмерной форме:

$$\varepsilon \frac{df_{\Omega}}{dt} = \frac{1}{2} I_{\Omega}^e(f, f) + \frac{1}{2} \alpha I_{\Omega}^R(f, f) \quad (1)$$

Здесь  $f_{\Omega}$  — нормированная на числовую плотность  $n_{\Omega}$  функция распределения компонента  $\Omega$  смеси,  $I_{\Omega}^e$  — интеграл упругих столкновений,  $I_{\Omega}^R$  — интеграл столкновений, сопровождающихся химической реакцией. Схематически оба эти интеграла записываются как

$$\frac{1}{2} I_{\Omega}^{(e,R)}(f, f) = \sum_{\Psi, \Lambda, \Delta} \int \left( \frac{H_{\Omega\Psi}}{H_{\Delta\Lambda}} f_{\Lambda}' f_{\Delta}' - f_{\Omega} f_{\Psi} \right) g_{\Psi\Omega} d\sigma_{\Psi\Omega}^{(e,R)} d\zeta_{\Psi} \quad (2)$$

где  $H$  — статистические веса,  $g_{\Psi\Omega}$  — относительная скорость,  $d\sigma_{\Psi\Omega}^{(e,R)}$  — дифференциальное сечение рассеяния,  $\zeta_{\Psi}$  — скорость центра масс компонента  $\Psi$ . Параметр  $\varepsilon$  в (1) — число Кнудсена  $\varepsilon = \tau_e / \theta$ , где  $\theta$  — характерное газодинамическое время, а параметр  $\alpha$  интерпретируется как отношение времени свободного пробега  $\tau_e$  к характерному времени химической реакции  $\tau_R$ :  $\alpha = \tau_e / \tau_R$ . Следует отметить, что, поскольку размерность  $I^e$  и  $I^R$  одинакова, переход в кинетическом уравнении к безразмерным переменным в общем случае позволяет ввести только один безразмерный параметр — число Кнудсена. Из записи (2) операторов  $I^e$  и  $I^R$  очевидно, что введение второго параметра  $\alpha$  при операторе  $I^R$  при переходе к величинам порядка единицы возможно только в том случае, когда  $\sigma^R / \sigma^e = O(\alpha)$  при всех значениях относительной скорости сталкивающихся частиц. Посколь-

ку в общем случае отношение  $\sigma^e$  и  $\sigma^R$  сильно зависит от величины этой скорости, попытка охарактеризовать его одним параметром  $\alpha$  существенно сужает круг рассматриваемых ситуаций. Кроме того, при наличии энергетического порога у реакции порядок величины сечения не определяет однозначно порядка соответствующего времени релаксации. Поэтому указанная интерпретация накладывает существенные ограничения на характер исследуемых систем.

Основной установкой работ [1–3] является получение гидродинамических уравнений для плотностей химических компонентов смеси  $n_a$ , равномерно пригодных во всем интервале значений  $\alpha$ :  $\varepsilon \ll \alpha \ll 1$ . Ход рассуждений авторов заключается в следующем. Подставляя в (1) максвелловскую функцию распределения  $f_a^{(0)}$  и интегрируя его по скоростям, можно получить оценку

$$n_A^{(0)} n_A^{(0)} = K_p n_a^{(0)} n_v^{(0)} [1 + O(\varepsilon/\alpha)] \quad (3)$$

Здесь  $K_p$  — константа равновесия химической реакции,  $n_a^{(0)}$  — низшее приближение к плотности компонента  $\Omega$ , которая в данном методе раскладывается в ряд последовательных приближений  $n_a = n_a^{(0)} + n_a^{(1)} + \dots$ . Учитывая (3), находим, что  $\alpha I_a^R(f^{(0)}, f^{(0)}) = O(\varepsilon)$ . Отсюда авторы делают вывод, что в нулевом приближении по  $\varepsilon$  функция распределения при всех  $\alpha$  удовлетворяет уравнению  $I^e(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0$ , т. е. является максвелловской, а гидродинамические уравнения, в частности выражения для скоростей химических реакций, при любых  $\alpha$  с точностью до членов порядка  $\varepsilon$  могут быть вычислены по максвелловским функциям распределения.

Проанализируем подробнее, какие выводы действительно можно сделать из этих оценок. Для этого рассмотрим, следуя [1], вычисление первого приближения. Согласно [1], функции  $f_a^{(1)} = f_a^{(0)} \varphi_a^{(1)}$  удовлетворяют уравнениям, которые в безразмерной форме могут быть записаны как

$$\begin{aligned} \frac{df_a^{(0)}}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\varepsilon} I_a^R(f^{(0)}, f^{(0)}) = I_a^e(f^{(0)}, f^{(0)}) \varphi_a^{(1)} + \\ + \alpha I_a^{RS}(f^{(0)}, f^{(0)}) \varphi_a^{(1)} = [L_S \varphi_a^{(1)}]_a \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $I_\Omega^{RS}$  — симметризованный линейаризованный оператор неупругих столкновений. Нетрудно убедиться, что левая часть (4) может быть записана как

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\varepsilon} R^{(0)} X_a + n_a^{(0)} \frac{dF_a^{(0)}}{dt} \\ F_a^{(0)} = \frac{f_a^{(0)}}{n_a^{(0)}}, \quad v_a R^{(0)} = \frac{1}{2} \int d\xi_a I_a^R(f^{(0)}, f^{(0)}) \end{aligned}$$

где  $v_a = \pm 1$  — стехиометрические коэффициенты компонентов. Отсюда

$$\varphi_a^{(1)} = \left[ L_S^{-1} \left( \frac{\alpha}{\varepsilon} X R^{(0)} + n_a^{(0)} \frac{dF_a^{(0)}}{dt} \right) \right]_a = \frac{\alpha}{\varepsilon} R^{(0)} Y_a + Z_a$$

Опираясь на неявно используемое в [1] предположение, что  $\|L_S^{-1}\| = O(1)$ , получаем, что при выполнении (3)  $\varphi_\Omega^{(1)} = O(1)$ , так как при этом  $\alpha R^{(0)}/\varepsilon = O(1)$ . Полученная оценка согласуется с исходным предположением, однако, вычисляя вклад  $\varphi^{(1)}$  в выражение для скорости химической реакции, находим, что

$$R = R^{(0)} + R^{(1)} = R^{(0)} + \varepsilon \frac{R^{(0)}}{2\nu_0} \int d\xi_\alpha I_\alpha^R \left( f^{(0)}, \frac{\alpha}{\varepsilon} f^{(0)} Y \right) = R^{(0)} [1 + \alpha \eta]$$

где  $\eta = O(1)$  даже при условии, что (3) справедливо. Таким образом, относительная величина поправок первого порядка к константам скоростей реакций (т. е. к оператору  $U$ ) имеет порядок  $\alpha$ , а не  $\varepsilon$ . Отсюда следует, что данный метод нельзя рассматривать как разложение оператора  $U$  по параметру  $\varepsilon$ .

Можно было бы надеяться, что он позволяет по крайней мере определить в виде ряда по  $\varepsilon$  результат действия оператора  $U$  на гидродинамические переменные, удовлетворяющие ограничениям (3). Чтобы выяснить этот вопрос, обратимся к уравнениям для функций следующего приближения  $f_\alpha^{(2)} = f_\alpha^{(0)} \varphi_\alpha^{(2)}$ . Они имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{D_0 f_\alpha^{(1)}}{Dt} + \frac{D_1 f_\alpha^{(0)}}{Dt} + c_{\alpha i} \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial x_i} - \left[ \frac{D_0 u_i}{Dt} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial c_{\alpha i}} + \frac{D_1 u_i}{Dt} \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial c_{\alpha i}} + \right. \\ \left. + \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial c_{\alpha i}} c_{\alpha j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} I_\alpha^e (f^{(1)}, f^{(1)}) + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\varepsilon} I_\alpha^{RS} (f^{(1)}, f^{(1)}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\varepsilon} I_\alpha^{RA} (f^{(0)}, f^{(1)}) \right] = [L_S \varphi^{(2)}]_\alpha \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $c_{\alpha i} \equiv \xi_i - u_i$ ,  $u_i$  и  $x_i - i$ -я компонента среднемассовой скорости и пространственной координаты соответственно,  $I_\alpha^{RA}$  — антисимметричная часть линеаризованного оператора столкновений. При выполнении условий (3) взятая в квадратные скобки часть левой стороны равенства (5) состоит из членов порядка единицы или меньше. Однако  $D_1 f_\alpha^{(0)}/Dt$  содержит вклад от химической реакции, пропорциональный  $(\alpha/\varepsilon)^2 R^{(0)}$ , и соответственно  $\varphi^{(2)}$  будет содержать слагаемое вида  $(\alpha/\varepsilon)^2 R^{(0)} W_1$ , где  $W_1 = O(1)$ . Аналогично  $D_0 f_\alpha^{(1)}/Dt$  содержит слагаемое

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{\partial R^{(0)}}{\partial t} f_\alpha^{(0)} Y_\alpha = \frac{\alpha}{\varepsilon} \left( \frac{\partial R^{(0)}}{\partial n_\alpha} + \frac{\partial R^{(0)}}{\partial n_\nu} - \frac{\partial R^{(0)}}{\partial n_\lambda} - \frac{\partial R^{(0)}}{\partial n_\Delta} \right) \frac{\alpha}{\varepsilon} R^{(0)} f_\alpha^{(0)} Y_\alpha$$

приводящее к вкладу в  $\varphi^{(2)}$  вида  $(\alpha/\varepsilon)^2 R^{(0)} W_2$ . Таким образом,  $f_\alpha^{(2)}$  содержит члены вида  $(\alpha/\varepsilon)^2 R^{(0)} W$  и, следовательно,  $\varepsilon^2 f_\alpha^{(2)}/\varepsilon f_\alpha^{(1)} = O(\alpha)$ .

По индукции можно показать, что при использовании обсуждаемого подхода  $\varepsilon^k f_\alpha^{(k)}/\varepsilon^{k-1} f_\alpha^{(k-1)} = O(\alpha)$ . Следует подчеркнуть, что при  $\alpha \ll 1$  для произвольных  $X$ ,  $\|X\| = O(1)$ , принадлежащих области определения оператора  $L_S^{-1}$ , функция  $L_S^{-1} X$  оценивается величиной порядка  $\alpha^{-1}$ , а не 1, как предположено выше, следуя [1], поскольку ненулевой спектр оператора  $L_S$  начинается с величин порядка  $\alpha$ . Поэтому без дальнейших исследований можно только сказать, что предложенный в [1–3] метод в лучшем случае приводит к определению как функций распределения, так и оператора  $U$  в виде ряда по степеням  $\alpha$ , а не  $\varepsilon$ . При  $\alpha = O(1)$  эти разложения теряют смысл.

Остановимся еще на одном аспекте обсуждаемого подхода. Линеаризованный оператор неупругих столкновений  $I_{\alpha}^R$  можно представить в виде суммы симметричного  $I_{\alpha}^{RS}$  и антисимметричного  $I_{\alpha}^{RA}$  операторов. В безразмерной форме первый пропорционален  $\alpha(n_{\Lambda}^{(0)} n_{\Delta}^{(0)} + K_p n_{\alpha}^{(0)} n_{\Psi}^{(0)})$ , а второй  $-\alpha(n_{\Lambda}^{(0)} n_{\Delta}^{(0)} - K_p n_{\alpha}^{(0)} n_{\Psi}^{(0)})$ . Из оценки (3) следует, что  $I_{\alpha}^{RA}$  имеет множитель порядка  $\varepsilon$ , поэтому авторы [1] относят его к членам высших порядков малости. Однако при  $\alpha \sim \varepsilon$  (а, как показано выше, только этот случай имеет смысл) операторы  $I_{\alpha}^{RS}$  и  $I_{\alpha}^{RA}$  имеют одинаковый порядок, поэтому пренебрегать  $I_{\alpha}^{RA}$  по сравнению с  $I_{\alpha}^{RS}$  нет оснований.

В работе [1] рассматривается также смесь газов из многоатомных молекул с набором времен релаксации, характеризуемых набором параметров  $\alpha^{(r)}$ , и обсуждается определение функции первого приближения  $\varphi^{(1)}$  для ситуации, когда для части неупругих процессов  $\alpha^{(r)} = \alpha_1$ , а для остальных  $\alpha^{(r)} = \alpha_2 \ll 1$ . Отметим, что указанное предположение требует, как было показано выше, равномерной по всем квантовым числам малости отношения сечений соответствующих столкновений. Это условие чрезвычайно сильно ограничивает условия применимости предлагаемого подхода, поскольку в большинстве реальных случаев такая ситуация не осуществляется. Формальное его использование соответствует случаю  $\alpha_2 = O(1)$ . Опираясь на оценки, аналогичные проведенным выше, можно показать, что в этом случае ошибка в определении оператора  $U$  (скоростей релаксационных процессов) составляет величину порядка единицы.

В работах [4–5] обсуждается другой подход к определению первой поправки к максвелловской функции распределения для рассмотренной выше модели газа без внутренних степеней свободы, обобщенный потом в [6] на случай, когда заселенности колебательно-вращательных квантовых состояний рассматриваются как химические компоненты, участвующие в реакциях. В своих рассуждениях авторы [4, 5] тоже исходят из уравнения Больцмана, записанного в форме (1), и в основном опираются на оценки, приведенные в [1]. В частности, как и в [1], утверждается, что гидродинамические уравнения для плотностей химических компонентов смеси справедливы при произвольных  $\alpha$ , а также, что линеаризованный оператор столкновений можно симметризовать. Однако способ классификации членов по порядку величины при определении  $\varphi^{(1)}$  отличается от предложенного в [1] тем, что при исключении производных по времени в левой части уравнения (4) учитывается вклад от  $\varphi^{(1)}$  в скорость реакции. Благодаря этому авторам удалось в духе метода Чепмена – Энскога отказаться от разложения  $n_{\alpha}$ . При этом в [5] в согласии с ранее высказанным утверждением [8] и в явном противоречии с выводами [1–3] было отмечено, что константы скоростей реакций могут существенно (на основной порядок) отличаться от вычисленных по максвелловским функциям распределения.

Несмотря на это противоречие, в работе [2] высказывается утверждение об эквивалентности двух обсуждаемых подходов. Как было показано выше, методы [1–3] и соответственно [4–5] являются корректными только при  $\alpha = O(\varepsilon)$ , поэтому далее ограничимся анализом только этого случая. Предложенное в [2] доказательство эквивалентности базируется на том соображении, что разность  $\chi$  между функцией  $\varphi_M^{(1)}$ , найденной в [4–5], и выраженной через полные газодинамические величины функцией  $\varphi_G^{(1)}$ , определенной в [1], удовлетворяет, согласно аргументам [2], уравнению

$$(L^e + \alpha L^{RS})\chi = L_S \chi = O(\varepsilon) \quad (6)$$

Отсюда делается вывод, что  $\chi = O(\varepsilon)$  и, следовательно, определенные с помощью  $\varphi_M^{(1)}$  и  $\varphi_G^{(1)}$  гидродинамические уравнения совпадают с точностью

до неперспективных членов. Однако, как уже указывалось, при  $\alpha = O(\epsilon)$  оператор  $L_s$  имеет собственные значения порядка  $\epsilon$ . При этом из уравнения (6) следует только, что  $\chi = O(1)$ . Поэтому приведенных в [2] аргументов недостаточно для доказательства эквивалентности получаемых функций.

Одной из причин возникшего противоречия является следующее обстоятельство. В работах [4–6] не было четко сформулировано последовательного метода асимптотического решения кинетических уравнений. В частности, не было четко указано, что понимают авторы под гидродинамическими уравнениями различных приближений. Из анализа работ [4–5] можно вместе с авторами статьи [2] заключить, что под уравнениями первого приближения в них понимается система гидродинамических уравнений, вычисленная с помощью функций  $\phi^{(1)}$ .

В работе [9] был опубликован регулярный метод получения гидродинамических уравнений в виде ряда по малому параметру  $\epsilon$ , в частности, было показано, что для получения уравнения первого приближения следует учитывать вклад функции  $\phi^{(2)}$  в скорость химической реакции. Насколько можно судить по [7], к этой точке зрения присоединились и авторы работ [4–6]. В этом случае об эквивалентности подходов не приходится, очевидно, говорить, даже если бы было доказано совпадение функций  $\phi^{(1)}$ .

Если обратиться к анализу реальных ситуаций, то можно заметить, что в большинстве случаев малость скорости химической реакции по сравнению со скоростью поступательной релаксации обуславливается не малостью отношений соответствующих сечений, а наличием высокой энергии активации реакции  $E$ , так что  $\tau_R \approx \tau_c \exp(E/kT)$ . В этих условиях возмущения равновесного распределения могут очень сильно сказываться на скорости химической реакции [10–11], причем наиболее существенным является обычно возмущение распределения по внутренним степеням свободы. Для исследования этих ситуаций был развит подход, различные аспекты которого обсуждаются в [8–10, 12–14]. (Заметим, что он применим и при  $E=0$ ,  $\alpha \ll 1$ .) Легко видеть, что этот случай никак не вписывается в рамки исходных положений работ [1–7], поскольку при этом отношение сечений  $\alpha = O(1)$ , а отношение времен релаксации  $\tau_c/\tau_R \ll 1$ .

Если же говорить о формальном применении результатов подходов [1–7] к рассмотрению модели газа из частиц без внутренних степеней свободы, между которыми протекает химическая реакция с энергетическим порогом, то метод [1–3] без дальнейших предположений о виде  $\sigma^R$  может приводить к существенным ошибкам, что подтверждается результатами одного из его авторов [15]. Полученные в [4, 5] уравнения для функции  $\phi^{(1)}$ , определяющей скорость реакции в эйлеровском приближении, с точностью до симметризации линеаризованного оператора столкновений совпадает с результатами метода [10], примененного к этому частному случаю. В этом смысле в работе [14] было отмечено, что метод [4–7] позволяет для данной модели в принципе учесть сильное влияние возмущений равновесных функций распределения на кинетику химических реакций. Неточность, связанная с неоправданной, как было указано выше, симметризацией в [4–7] линеаризованного оператора столкновений, до настоящего времени достаточно полно не исследовалась.

Отметим также, что развиваемый в [8–10, 12–14] подход принципиально отличается от предлагаемых в [1–7] по своим методологическим установкам.

1. Авторы [8–10, 12–14] исходят из того, что вывод гидродинамических уравнений для релаксирующих и реагирующих газов сводится к асимптотическому решению задачи Коши для обобщенного уравнения Больцмана и является частным случаем задачи о сингулярно возмущенных уравнениях. Традиционный подход к ней заключается в утверждении, что при наличии быстрых и медленных процессов асимптотическое решение позволяет построить замкнутую систему уравнений для медленных переменных. В соответствии с этим вывод гидродинамических уравнений должен указать критерии выбора набора переменных  $\Gamma$ , являющихся медленными (гидродинамическими) переменными данной задачи, и дать алгоритм построения оператора  $U$  для этого набора.

С другой стороны, авторы работ [1–7] исходят из возможности получения замкнутой системы уравнений для плотностей химических компонентов смеси  $n_\alpha$ , равномерно пригодных при всех значениях  $\alpha$  в интервале  $\varepsilon \leq \alpha \leq 1$ . Поскольку при  $\alpha = O(1)$   $n_\alpha$  не являются медленными переменными, такая установка сводится к утверждению, что замкнутую систему уравнений можно получить для набора, содержащего как медленные, так и быстрые переменные. Поэтому вопрос о выборе макроскопических переменных в этих работах вообще не ставится и соответственно не решается. Следует также констатировать, что указанное утверждение не вписывается в рамки традиционной теории сингулярно возмущенных уравнений. Поэтому его обоснование требует фактически пересмотра этой теории.

2. Авторы [8–10, 12–14] исходят из того, что принципиальной разницы между выводом макроскопических уравнений для пространственно однородных и пространственно неоднородных систем не существует. В частности, установление химического равновесия в пространственно однородной системе должно описываться теми же макроскопическими уравнениями, что и для пространственно неоднородных систем, если положить в них градиенты гидродинамических переменных равными нулю.

С другой стороны, в [1–7] предпринимается попытка представить скорость химической реакции – величину, характеризующую локальные процессы внутренней релаксации, – в виде разложения по степеням числа Кнудсена – параметра, характеризующего пространственную неоднородность системы. В пространственно однородных системах с неравновесными начальными условиями или, например, в течении за фронтом ударной волны, где число Кнудсена мало, а неравновесность по концентрациям велика, это разложение, рассматриваемое как способ определения оператора  $U$ , теряет смысл. Поэтому для получения уравнений, описывающих эволюцию таких систем, подходы работ [1–7] принципиально неприменимы.

Из сказанного можно сделать следующие выводы. Исходные положения развитого в [1–3] подхода не позволяют исследовать кинетику химических реакций с высокой энергией активации. Кроме того, содержащееся в [1–7] утверждение о возможности получения равномерно пригодных по  $\alpha$  гидродинамических уравнений для плотностей химических компонентов смеси не вытекает из результатов этих статей. Поэтому методы [1–7] при рассмотрении реальных ситуаций могут быть использованы только для получения уравнений для заселенностей колебательно-вращательных состояний молекул в условиях, когда дифференциальные сечения рассеяния для всех неупругих переходов, в частности поступательно-вращательных, равномерно малы по сравнению с дифференциальным сечением упругих столкновений.

Это обстоятельство существенно ограничивает возможности указанных подходов в получении макроскопического описания течения многоатомного газа, поскольку: а) в подавляющем большинстве случаев сечения поступательно-вращательных переходов и упругих столкновений имеют одинаковый порядок величины; б) даже при выполнении указанного соотношения получающаяся система уравнений для заселенностей колебательно-вращательных состояний требует дальнейших асимптотических упрощений, так как реальные течения чаще всего могут быть описаны в терминах существенно меньшего числа макроскопических переменных и соответственно такого же числа гидродинамических уравнений. В отличие от подхода, развитого в [8–10, 12–14], методы работ [1–7] не могут быть непосредственно использованы для получения таких уравнений.

Автор благодарит С. А. Лосева за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С., Коган М. Н., Макашев Н. К. Обобщенный метод Чепмена – Энскога. Ч. 1. Уравнения неравновесной газовой динамики. – Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 5, с. 66–76.
2. Коган М. Н., Макашев Н. К. О построении уравнений газодинамики для многоатомных газов с произвольным отношением скоростей упругих и неупругих процессов. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2, с. 57–70.
3. Галкин В. С., Коган М. Н., Макашев Н. К. Обобщенный метод Чепмена – Энскога. – Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 2, с. 304–307.
4. Мацук В. А., Рыков В. А. О методе Чепмена – Энскога для смеси газов. – Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 1, с. 49–51.
5. Мацук В. А., Рыков В. А. Распространение метода Чепмена – Энскога для смеси реагирующих газов. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 1, с. 167–182.

6. *Мацук В. А.* О методе Чепмена – Энскога для химически реагирующей газовой смеси с учетом внутренних степеней свободы. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 4, с. 1043–1048.
7. *Мацук В. А.* Метод Чепмена – Энскога для химически реагирующей газовой смеси: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. М., 1978. 15 с.
8. *Колесниченко Е. Г., Гейгер В. М.* О применении метода Энскога – Чепмена для вывода гидродинамических уравнений для химически реагирующих газов. – Теплофиз. высоких температур, 1974, т. 12, № 6, с. 1193–1200.
9. *Колесниченко Е. Г.* Вывод гидродинамических уравнений для многоатомных и химически реагирующих газов. – Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 1, с. 40–42.
10. *Колесниченко Е. Г.* Кинетика химических реакций и релаксационных процессов в газовых потоках. – 6-я Всес. конф. по динам. разрежен. газов. Тез. докл. Новосибирск, 1979, с. 24.
11. *Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И.* Релаксационные процессы в ударных волнах. М.: Наука, 1965. 484 с.
12. *Колесниченко Е. Г.* О применении метода квазистационарного состояния для интегрирования кинетических уравнений. – Теплофиз. высоких температур, 1973, т. 11, с. 46–50.
13. *Колесниченко Е. Г., Лосев С. А.* Кинетика релаксационных процессов в движущихся средах. – В кн.: Химия плазмы. Вып. 6. М.: Атомиздат, 1979, с. 209–229.
14. *Колесниченко Е. Г.* О методике вывода гидродинамических уравнений для сложных систем. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3, с. 96–105.
15. *Макашев Н. К.* О поведении решения уравнения Больцмана в области высокоскоростного «хвоста» функции распределения. – В кн.: Динамика разреженного газа. Тр. 6-й Всесоюз. конф., Новосибирск, 1979. Ч. 1. Новосибирск, 1980, с. 80–85.

Москва

Поступила в редакцию  
4.V.1982