МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1984

УДК 533.6.011.72+532.5.013.4

НЕЛИНЕЙНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СПОНТАННО ИЗЛУЧАЮЩЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

ЕГОРУШКИН С. А.

Вопрос об устойчивости плоской ударной волны в линейном приближении впервые рассмотрен в [1–4], где показано, что при $(\sigma M^2+M^2-1)/(\sigma M^2+1-M^2)<\delta<1$ начальные возмущения поверхности ударной волны устойчивы, а при $\delta>1$ и $\delta<-1-2M$ начальные возмущения экспоненциально растут, т. е. ударная волна неустойчива. Здесь M – число Маха за ударной волной, j – поток массы газа через единицу площади поверхности ударной волны, $\delta=-j^2(\partial(1/\rho)/\partial p)_h$ – безразмерная производная вдоль ударной адиабаты, σ^{-1} – отношение плотностей до и за разрывом. При $-1-2M<\delta<(\sigma M^2+M^2-1)/(\sigma M^2+1-M^2)$ одномерные начальные возмущения ударной волны превращаются при $t\to\infty$ в волны постоянной амплитуды и неизменной формы, распространяющиеся вдоль фронта разрыва.

Это явление, представляющее собой нейтральный случай в устойчивости, было названо [1] режимом спонтанного излучения звука разрывом.

В [1–4] было показано, что смешанная задача для уравнений акустики с граничными условиями на ударной волне оказывается некорректной, если ударная волна неустойчива. В [5–8] при помощи построений диссипативных интегралов энергии была доказана корректность рассматриваемой смешанной задачи для устойчивых ударных волн. В случае спонтанно излучающей ударной волны в настоящее время нет ни доказательства корректности, ни примера некорректности типа примера Адамара. В [1] было высказано предположение о том, что учет нелинейности должен привести к неустойчивости возмущений поверхности ударной волны и в режиме спонтанного излучения звука разрывом. Косвенным подтверждением этой гипотезы является и возможность распада спонтанно излучающей ударной волны на косые возмущения [9].

В настоящей работе для слабонелинейных возмущений поверхности спонтанно излучающей ударной волны выводится самосогласованное интегродифференциальное уравнение, у которого могут существовать неограниченно растущие со временем решения.

1. В идеальной двупараметрической среде рассмотрим плоскую ударную волну, находящуюся в режиме спонтанного излучения. Выберем декартову систему координат, ось Y которой совпадает с невозмущенной ударной волной, а область $x>0$ соответствует течению за волной. Пусть функция $x=\xi(y,t)$ описывает малые возмущения поверхности разрыва. Вопрос об устойчивости ударной волны сводится к нахождению при больших временах функции $\xi(y,t)$. Решение этой задачи в линейном приближении [2, 4] показывает, что функция ξ может быть представлена в виде двух волн постоянной амплитуды и остаточного члена, убывающего со временем. Волны постоянной амплитуды движутся соответственно вверх и вниз по разрыву со скоростью λ_1, определенной уравнением $\lambda_1^2(1+\delta)+\sigma(1-\delta)=-2\lambda_1\sqrt{\lambda_1^2M^2+M^2-1}$.

В нелинейном приближении необходимо учитывать взаимодействие уходящих от ударной волны звуковой и энтропийно-вихревой волн, порождающих возмущения второго порядка малости по амплитуде. Взаимодействие этих возмущений с ударной волной может стать причиной неустойчивости рассматриваемого течения. Для описания изложенного выше процесса самовоздействия ударной волны будем использовать уравнения газовой динамики с учетом членов, порядка не выше второго по амплитуде, и, следовательно, определять уходящие волны по линейной теории.

В связи с этим длина волны l уходящего возмущения определяется заданием начальной формы поверхности разрыва — функцией $\xi_0(y)=\xi(y, 0)$. Пусть $|\xi_0(y)|\leqslant\varepsilon_1\ll 1$. Из граничных условий на ударной волне следует, что возмущения газодинамических величин в области за ударной волной имеют порядок $\varepsilon_1/l=\varepsilon\ll 1$. Пусть начальное возмущение ξ_0 выбрано так, что $l\sim\varepsilon^\alpha$, $\alpha>0$. Тогда $\varepsilon_1\sim\varepsilon^{1+\alpha}$. Величине ε_1 поставим в соответствие некоторую длину $L\sim\varepsilon_1^{-1}$, характеризующую пространственный масштаб нелинейных процессов. Тогда величины L и l удовлетворяют неравенству $L/l\gg 1$, что позволяет описывать уходящие возмущения в приближении геометрической акустики [10, 11].

Будем предполагать, что уходящие от разрыва возмущения порождены одной из двух волн постоянной амплитуды, например движущейся вниз по разрыву. В дальнейшем будет показано, что влиянием второй волны постоянной амплитуды и остаточного члена на рассматриваемый механизм самовозбуждения спонтанно излучающей ударной волны можно пренебречь. Тогда индуцированные ударной волной возмущения потока будут стационарны в системе координат xy_1, движущейся со скоростью λ_1 вниз по разрыву. Перейдем в эту систему координат, положив $y_1=y+\lambda_1 t$, и все дальнейшее рассмотрение проведем в переменных x, y_1, t. В рассматриваемых координатах течение за ударной волной будет сверхзвуковым.

Согласно приближению геометрической акустики, возмущения газодинамических величин в виде волновых пакетов распространяются вдоль лучей с групповыми скоростями. Так как процесс распространения возмущений происходит на однородном и стационарном фоне, то лучи будут прямыми линиями, а амплитуды волновых пакетов постоянны вдоль лучей [12]. Поэтому возмущения r_j' какой-нибудь газодинамической величины определяются ее значениями r_{j0}' на ударной волне из соотношения

$$r_j'(x, y_1, t)=r_{j0}'(t-x/U_j, y_1-\mu_j x), \quad j=2, 3$$

При этом индекс 2 соответствует уходящей звуковой. а индекс 3 — энтропийно-вихревой волнам. Величина $r_{j0}'=0$ при $x>U_j t$. Последнее неравенство определяет переднюю границу возмущенной зоны. Величина μ_j есть наклон j-й характеристики в рассматриваемом стационарном сверхзвуковом потоке, а величина U_j — компонента групповой скорости j-й волны вдоль оси x.

Пусть p', s', ρ', u', v' — возмущения давления, энтропии, плотности и компонент вектора скорости в уходящих волнах. При $x=0$ они удовлетворяют следующим краевым условиям на ударной волне

$$u_2'+u_3'+\frac{1+\delta}{2}p_2'=0, \quad (\sigma-1)\frac{\partial\xi}{\partial y_1}-v_2'-v_3'=0 \tag{1.1}$$

$$\lambda_1\frac{\partial\xi}{\partial y_1}+\frac{1-\delta}{2}\frac{\sigma}{\sigma-1}p_2'=0, \quad P_S s_3'+(\delta M^{-2}-1)p_2'=0$$

$$P_S=\frac{\partial R}{\partial S}\left(\frac{\partial R}{\partial P}\right)^{-1}$$

Здесь $\rho=R(P,S)$ — уравнение состояния.

Зависимость уходящих возмущений от времени обусловлена только нелинейными эффектами. Поэтому при вычислении уходящих возмущений с точностью до членов первого порядка малости по амплитуде связь между величинами u_3', v_3' в вихревой и u_2', v_2', p_2' в звуковых волнах можно определять из линеаризованных стационарных уравнений газовой динамики. Подставляя соответствующие соотношения в краевые условия (1.1), найдем выражения для возмущений газодинамических величин в области за ударной волной через возмущения формы поверхности ударной волны

$$p'=A_2w_2,\quad \begin{pmatrix}u'\\ v'\\ \rho'\end{pmatrix}=\sum_{j=2,3}\begin{pmatrix}C_j\\ D_j\\ E_j\end{pmatrix}w_j \qquad (1.2)$$
$$s'=B_3w_3,$$

$$A_2=\frac{2(\sigma-1)\lambda_1}{\sigma(\delta-1)},\quad B_3=A_2\frac{\delta M^{-2}-1}{P_s},\quad D_2=\frac{MA_2}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$C_2=kD_2,\quad E_2=R_PA_2,\quad E_3=B_3R_S,\quad D_3=\lambda_1C_3$$

$$C_3=\frac{(1-\sigma)\lambda_1}{\sigma(\delta-1)}\left(\frac{2Mk}{\sqrt{k^2+1}}+1+\delta\right),\quad w_j=\frac{\partial\xi}{\partial y_1}\left(t-\frac{x}{U_j},y_1-\mu_jx\right)$$

$$k=(\lambda_1M^2-\sqrt{\lambda_1^2M^2+M^2-1})/(1-M^2)$$

Разложим уравнения газовой динамики и краевые условия на ударной волне в ряд по малой амплитуде ε. Уравнения и краевые условия, получающиеся в первом приближении, описывают уходящие от разрыва возмущения (1.2). Уравнения и краевые условия, получающиеся во втором приближении, служат для описания возмущений газодинамических величин второго порядка малости по параметру ε (в дальнейшем они обозначаются буквами с двумя штрихами).

Возмущения второго порядка малости порождаются в результате взаимодействия уходящих волн и, падая на ударную волну, изменяют форму ее поверхности. Пусть функция $x=\xi_1(y_1,t)$ описывает эти изменения. Она может быть определена из краевого условия на ударной волне

$$\left(\lambda_1\frac{\partial\xi}{\partial y_1}+\frac{\partial\xi_1}{\partial t}\right)\frac{\sigma-1}{\sigma}-p''\frac{1-\delta}{2}=h \qquad (1.3)$$

$$h=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1-\sigma}{\sigma}\lambda_1^2+1+\sigma\right)w^2-u'^2-\frac{1}{2}p'^2\delta_1\right],\quad w=\frac{\partial\xi}{\partial y_1}$$

где δ_1 — обезразмеренная вторая производная вдоль ударной адиабаты. Из (1.3) следует, что возмущения поверхности ударной волны определяются падающим на нее возмущением давления, которое удовлетворяет уравнению [11]

$$M^2\frac{\partial^2p''}{\partial t^2}+2M^2\frac{\partial^2p''}{\partial x\partial t}+2M^2\lambda_1\frac{\partial^2p''}{\partial t\partial y_1}+(M^2-1)\frac{\partial^2p''}{\partial x^2}+2M^2\lambda_1\frac{\partial^2p''}{\partial x\partial y_1}+$$
$$+(M^2\lambda_1^2-1)\frac{\partial^2p''}{\partial y_1^2}=f(x,y_1,t) \qquad (1.4)$$

$$f=a_1\left(\frac{\partial w_2}{\partial y_1}\right)^2+a_2\frac{\partial w_2}{\partial y_1}\frac{\partial w_3}{\partial y_1}+b_1w_2\frac{\partial^2w_2}{\partial y_1^2}+b_2w_3\frac{\partial^2w_2}{\partial y_1^2}$$

$$a_1=-A_2(\mu_2-\mu_3)^2\left(M^4+\frac{\partial^2R}{\partial P^2}\right)+(D_2-C_2\mu_2)^2$$

$$a_2=2(D_2-C_2\mu_3)(D_3-C_3\mu_2)-\frac{\partial R}{\partial S}A_2B_3(1+\mu_2\mu_3)$$

$$b_1=-A_2^2\frac{\partial^2R}{\partial P^2}(\mu_3-\mu_2)^2+2M^2A_2(\mu_2-\mu_3)(D_2-C_2\mu_2)$$

$$b_2=2M^2(\mu_2-\mu_3)A_2(D_3-C_3\mu_2)-\frac{\partial^2R}{\partial P\partial S}A_2B_3(\mu_2-\mu_3)^2$$

Граничные условия на ударной волне также могут быть сведены к одному соотношению для величины p'' [6, 8]

$$x=0:\ (2M^2+1+\delta)\frac{\partial^2 p''}{\partial t^2}+2(M^2-1)\frac{\partial^2 p''}{\partial x\partial t}+[(2M^2+1+\delta)\lambda_1^2+$$

$$+(1-\delta)\sigma]\frac{\partial^2 p''}{\partial y_1^2}+2\lambda_1(M^2-1)\frac{\partial^2 p''}{\partial x\partial y_1}=g_0\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\left(\frac{w^2}{2}\right) \tag{1.5}$$

Величина g_0 является константой и может быть выражена через параметры задачи M, λ_1, δ, σ, δ_1.

Решим уравнение (1.4) с краевым условием (1.5), записанным при $x=0$, и условием ограниченности решения при $x\to+\infty$. Тогда падающее на ударную волну возмущение давления p'' и индуцированное им изменение формы поверхности ударной волны (функция ξ_1) окажутся выраженными через величину ξ и ее производную $w=\partial\xi/\partial y_1$. Положив поэтому в (1.3) $\xi_1=\xi$, получим искомое уравнение, описывающее процесс самовоздействия ударной волны, т. е. изменение формы ее поверхности (левая часть (1.3)) за счет возмущений, порожденных этим же изменением (правая часть (1.3)).

Применим к (1.3)–(1.5) преобразование Фурье по переменной y_1 и преобразование Лапласа по переменной t. Тогда соотношения (1.4)–(1.6) запишутся в виде

$$(M^2-1)\frac{d^2p^\circ}{dx^2}+2M^2z_2\frac{dp^\circ}{dx}+p^\circ[M^2z_2^2+k^2]=f^\circ(z,k,x) \tag{1.6}$$

$$x=0:\quad (2M^2-1)\frac{dp^\circ}{dx}+[(2M^2+1+\delta)z_2^2-(1-\delta)\sigma k^2]p^\circ=g^\circ \tag{1.7}$$

$$x=0:\quad \xi^\circ z_2=\frac{(\delta-1)\sigma}{2(\sigma-1)}p^\circ+\frac{\sigma}{\sigma-1}h^\circ,\qquad z_2=z+ik\lambda_1$$

$$r''(y_1,t)\to r^\circ(k,z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-iky_1}\int\limits_0^{\infty}r''(y_1,t)e^{-zt}\,dt\,dy_1 \tag{1.8}$$

Решим уравнение (1.6) с краевым условием (1.7) и условием ограниченности решения при $x\to+\infty$. Подставим полученное выражение для p° в (1.8) и совершим обратное преобразование Лапласа. Результат может быть записан в виде свертки

$$\xi^\circ(t,k)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^t dt_0\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(t_0,s,k)\left[\frac{(\delta-1)\sigma}{2(\sigma-1)}G_1(t-t_0,s,k)+\frac{\sigma h_0}{\sigma-1}G_2(t-t_0,s,k)\right]ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\frac{(\delta-1)\sigma}{2(\sigma-1)}\int\limits_0^t dt_0\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ds\sum_{j=1}^{2}K_j(t_0,s,k,x)F_j(t-t_0,s,k,x)\,dx \tag{1.9}$$

$$G_1=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\exp(z(t-t_0))}{z_2D(z_2,k)}ks(k-s)^2g_0\,dz$$

$$G_2=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\exp[z(t-t_0)]}{z_2}s(k-s)\,dz$$

$$F_1=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\exp[z(t-t_0)]}{D(z_2,k)}(M^2-1)B_1(k,s)\exp[-x(\Lambda_2+ik\mu_2)]\,dz$$

$$F_2=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\exp[z(t-t_0)]}{D(z_2,k)}(M^2-1)B_2(k,s)\exp[-\Lambda_2x-ix(s\mu_2+(k-s)\mu_3]\,dz$$

$$D=z_2^2(1+\delta)-\sigma(\delta-1)k^2+2z_2\sqrt{M^2z_2^2+(1-M^2)k^2}$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{1-M^2}\left(M^2 z_2 + \sqrt{M^2 z_2^2 + (1-M^2)k^2}\right)$$

$$K_1 = \xi^\circ\left(t - \frac{x}{U_2}, s\right)\xi^\circ\left(t - \frac{x}{U_2}, k-s\right)$$

$$K_2 = \xi^\circ\left(t - \frac{x}{U_2}, s\right)\xi^\circ\left(t - \frac{x}{U_3}, k-s\right), \qquad K = K_2(x=0)$$

$$B_j = a_j s^2 (k-s)^2 + b_j s^3 (k-s), \qquad j=1,2$$

$$h_0 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1-\sigma}{\sigma}\lambda_1^2 + 1 + \sigma\right) - (C_2+C_3)^2 + \frac{1}{2}A_2^2\delta_1\right]$$

Для вычисления интегралов в формуле (1.9) в плоскости комплексного переменного z необходимо выделить однозначные ветви функций $D(z_2)$ и $\Lambda_2(z_2)$, для чего достаточно провести разрез вдоль мнимой оси $[-ik(\lambda_1+\sqrt{M^{-2}-1}),\ ik(\sqrt{M^{-2}-1}-\lambda_1)]$. Тогда функции G_1, F_1, F_2 будут равны сумме вычетов соответствующих подынтегральных выражений в их полюсах и интегралов по берегам разреза. Функция $D(z_2)$ имеет нуль первого порядка в точке $z_2 = i\lambda_1 k$, т. е. при $z=0$ [3, 4]. Множитель z_2^{-1} дает полюс первого порядка при $z = -i\lambda_1 k$, который попадает внутрь разреза и потому для дальнейшего несуществен.

В п. 2 настоящей статьи будет показано, что вкладом интеграла по берегам разреза также можно пренебречь. Тогда

$$G_1 = -\frac{(k-s)^2 s g_0}{\lambda_1 k d_1}, \qquad G_2 = s(k-s)\exp[i\lambda_1 k(t-t_0)] \tag{1.10}$$

$$F_1 = \frac{2B_1(M^2-1)}{ikd_1}\exp[ik(\mu_1+\mu_2)x], \qquad ikd_1 = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}D(z_2)$$

$$F_2 = \frac{2B_2(M^2-1)}{ikd_1}\exp[-ix(\mu_2 s + \mu_3(k-s) + k\mu_1)], \qquad ik\mu_1 = \Lambda_2(ik\lambda_1)$$

причем μ_1 есть наклон приходящей на ударную волну характеристики. Подставим полученные выражения в (1.9) и произведем обратное преобразование Фурье. Учитывая, что $\xi(y_1, t) = 0$ при $t<0$ и дифференцируя обе части получившегося соотношения по t, окончательно запишем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \alpha\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \beta\left\{\int_0^{x_2(t)}\left[a_1\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1}\right)^2 + b_1\varphi_2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y_1^2}\right]dx + \int_0^{x_3(t)}\left[a^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi_3}{\partial y_1} + b_2\varphi_3\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y_1^2}\right]dx\right\} \tag{1.11}$$

$$\alpha = \frac{(\delta-1)\sigma g_0}{2(\sigma-1)\lambda_1 d_1} - \frac{2\sigma h_0}{\sigma-1}, \qquad \beta = \frac{(\delta-1)\sigma(M^2-1)}{(\sigma-1)d_1}, \qquad x_2(t) = U_2 t$$

$$x_3(t) = t\min\{U_2, U_3\}, \qquad \varphi_j = \frac{\partial\xi}{\partial y_1}\left(t - \frac{x}{U_j}, y_1 - (\mu_1+\mu_j)x\right)$$

Первый член в правой части уравнения (1.11) связан с нелинейностью граничных условий на ударной волне, а второй и третий члены — с приходящими на ударную волну возмущениями, причем второй член порожден нелинейным взаимодействием уходящей звуковой волны с собой, а третий — взаимодействием уходящих звуковой и энтропийно-вихревой волн.

Уравнение (1.11) не описывает развитие плоских (т. е. независящих от y_1) возмущений поверхности ударной волны и процесс взаимодействия плоских и косых (т. е. зависящих от y_1) возмущений. Это связано с тем, что в основу вывода (1.11) было положено представление о том, что по линейной теории возмущение поверхности ударной волны представляет собой бегущую вдоль поверхности разрыва волну, т. е. зависимость рассматриваемых возмущений от y_1 считалась обязательной. В нелинейном анализе плоское возмущение появляется как результат взаимодействия волн типа $A_1(t)e^{ik_1y_1}$, $A_{-1}(t)e^{-ik_1y_1}$ и имеет, следовательно, второй порядок малости по амплитуде. Поэтому результат взаимодействия плоских и косых волн есть величина третьего порядка малости и соответствующий член в правой части (1.11) может быть опущен. В силу этого плоские волны рассматриваться в дальнейшем не будут.

2. Разложим уходящие от ударной волны возмущения в интеграл Фурье и изучим взаимодействие пары фурье-компонент этого разложения $A_{10}(t)e^{ik_1y_1}$ и $A_{01}(t)e^{ik_2y_1}$, описываемое уравнением (1.11). Взаимодействия волн $A_{10}e^{ik_1y_1}$, $A_{01}e^{ik_2y_1}$ приводит к появлению гармоник $A_{mn}(t)e^{i(k_1m+k_2n)}y_1$, где m, n — произвольные целые числа. Система обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие амплитуд A_{mn}, получается после подстановки суммы

$$\varphi=\sum_{m,n}A_{mn}(t)\,e^{i(k_1m+k_2n)y_1}$$

в уравнение (1.11).

Ранее отмечалось, что рассматриваемые возмущения имеют длину волны $l\sim\varepsilon^{\alpha}$, поэтому $k_1\sim\varepsilon^{-\alpha}\ll1$. Выберем волновое число k_2 так, чтобы $r\equiv\equiv k_2/k_1=-(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)^{-1}$, разложим правые части полученной системы уравнений для амплитуд A_{mn} в ряд по малому параметру k_1^{-1} и среди членов полученного разложения, описывающих взаимодействие каких-либо двух гармоник A_{mn}, A_{kl}, сохраним один главный. Можно показать, что для гармоник с номерами A_{n0}, A_{0n} этот член имеет порядок $O(k_1^2)$ и может быть записан в виде

$$\beta(a_2r+b_2)k_1^2n^2\int\limits_0^{x_3(t)}A_{n0}\left(t-\frac{x}{U_2}\right)A_{0n}\left(t-\frac{x}{U_3}\right)dx \tag{2.1}$$

Взаимодействие такого типа назовем резонансным. Главные члены, описывающие взаимодействие всех прочих гармоник, имеют вид

$$iO(k_1)A_{mn}(t)A_{kl}(t) \tag{2.2}$$

и являются нерезонансными.

При выводе уравнения (1.11) в п. 1 функции G_1, F_1, F_2 (см. (1.9), (1.10)) вычислялись без учета интеграла по разрезу в плоскости комплексного переменного z. Оценим вклад соответствующих членов в рассматриваемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (путем разложения их в ряд по степеням k_1^{-1}). Можно показать, что он имеет порядок $O(1)$ и, следовательно, несуществен. Поэтому пренебрежение в (1.10) интегралом по разрезу является законным. Аналогично доказывается возможность пренебрежения возмущениями, порожденными волной постоянной амплитуды, движущейся вверх по разрыву.

Пользуясь формулами (2.1) и (2.2), нетрудно проверить, что структура полученной системы такова, что ее решения удовлетворяют условию $A_{-m-n}=\bar{A}_{mn}$. Тогда связь амплитуд A_{10}, A_{01}, A_{11} между собой определится соотношениями

$$\begin{gathered}\frac{dA_{11}}{dt}=k_1^2h_{11}\int\limits_0^{x_3(t)}A_{10}\left(t-\frac{x}{U_2}\right)A_{01}\left(t-\frac{x}{U_3}\right)dx\\ \frac{dA_{10}}{dt}=ik_1h_{10}A_{11}(t)\bar{A}_{01}(t),\qquad \frac{dA_{01}}{dt}=ik_1h_{01}A_{11}(t)\bar{A}_{10}(t)\\ h_{11}=\beta(a_2r+b_2),\qquad h_{10}=\alpha+\beta V(r),\qquad h_{01}=\alpha+r^{-1}V(r^{-1})\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$V(r)=\left[\frac{(b_1(1+r^2)+r^2)-2a_1r(1+r)}{\mu_1+\mu_2}+\frac{b_2(1+r)^2-a_2r(1+r)}{(1+r)\mu_2-r\mu_3+\mu_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{b_2r^2-a_2r(1+r)}{(1+r)\mu_3-r\mu_2+\mu_1}\right]$$

Пусть $A_{10}(0)\sim A_{01}(0)\sim\varepsilon_1=\varepsilon^{1+\alpha}$ при $t=0$, а начальные значения всех прочих амплитуд равны нулю. Тогда можно показать, что при $t\leqslant T_0$ поведение решения основного уравнения (1.11) определяется тремя гармониками

$$A_{10}e^{ik_1y_1},\quad A_{01}e^{ik_2y_1},\quad A_{11}e^{i(k_1+k_2)y_1},$$

и уравнение (2.3) может быть рассмотрено отдельно от остальной части полной системы амплитудных уравнений. При этом

$$T_0\sim\varepsilon^{-\beta},\quad \beta=(2-\alpha)/3.$$

В системе (2.3) введем новые функции и новые независимые переменные по формулам

$$\begin{gathered}A_{10}(t)=\varepsilon_1a_{10}B_{10}(\tau),\quad A_{01}=\varepsilon_1a_{01}B_{01}(\tau),\quad A_{11}(t)=A_{11}{}^0B_{11}(\tau)\\ \tau=\varepsilon_1{}^\gamma t,\quad \varepsilon_1=\varepsilon^{1+\alpha},\quad \varepsilon_1a_{10}=A_{10}(0),\quad \varepsilon_1a_{01}=A_{01}(0)\end{gathered}\tag{2.4}$$

Тогда $B_{10}(0)=1$, $B_{01}(0)=1$ и $B_{11}(0)=0$. Подставляя соотношения (2.4) в систему (2.3), нетрудно проверить, что при $\gamma=(2-\alpha)/3$ и $A_{11}{}^\circ=a_{11}\varepsilon^s$, $s=(2-\alpha)/3(1+\alpha)$ уравнения для величин B_{ij} не зависят от ε, т. е. соотношения (2.4) дают явную зависимость решений системы (2.3) от амплитуды начальных возмущений. В дальнейшем будет показано, что функции $B_{ij}(\tau)$ могут обращаться в бесконечность в некоторый момент τ_0, причем $\tau_0\sim O(1)$. Момент времени t_0, соответствующий τ_0, равен $t_0=\tau_0\varepsilon^{(\alpha-2)}/3$. Правильность построенного решения на всем промежутке $[0,t_0]$ можно гарантировать, если $t_0\leqslant T_0$. Из приведенных выше связей величин t_0 и T_0 с малым параметром ε следует, что последнее неравенство выполнено, и обращение в бесконечность решений укороченной системы (2.3) обеспечивает неустойчивость решений уравнений (1.11).

3. Введем модули и аргументы комплексных величин $B_{ij}(\tau)$ по формулам $B_{11}=r_1\exp(i\psi_1)$, $B_{10}=r_2\exp(i\psi_2)$, $B_{01}=r_3\exp(i\psi_3)$. Система (2.3), записанная в переменных r_i, ψ_i, обладает первым интегралом

$$r_2{}^2-r_3{}^2h(a_{01}/a_{10})^2=R_0$$

где R_0 — константа интегрирования, $h=h_{10}/h_{01}$ (см. (2.3)). Если $h<0$, то r_2 и r_3 — ограниченные функции времени. Пусть поэтому $h>0$. Положив $a_{10}=a_{01}\sqrt{h}$, получим, что $R_0=0$, $r_2=r_3$, $\psi_2=\psi_3$.

Пусть для определенности $U_2>U_3$. Тогда в (2.3) $x_3(t)=U_3(t)$. Введем новую переменную интегрирования $\theta=\tau-x_1/U_3$, $x_1=\varepsilon_1{}^\gamma x$ и параметр $q_1=U_3/U_2<1$. Исключая величины ψ_3, r_3 и выбирая соответствующим образом константы a_{11}, a_{01}, систему (2.3) запишем в виде

$$\dot r_1=\int\limits_0^\tau r_2(\theta_1)r_2(\theta)\cos[\psi_2(\theta_1)+\psi_2(\theta)-\psi_1(\tau)]d\theta\tag{3.1}$$

$$r_1\dot\psi_1=\int\limits_0^\tau r_2(\theta_1)r_2(\theta)\sin[\psi_2(\theta_1)+\psi_2(\theta)-\psi_1(\tau)]d\theta$$

$$\dot r_2=r_1r_2\sin(2\psi_2-\psi_1),\quad r_2\dot\psi_2=r_1\cos(2\psi_2-\psi_1)$$
$$\theta_1=\tau-q(\tau-\theta)$$

Предположим, что существует решение системы (2.5), которое обращается в бесконечность в точке τ_0. Можно показать, что в окрестности такой точки решения (2.5) имеет асимптотику

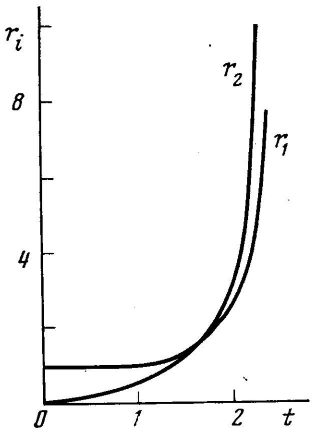
$$r_i=r_i^\circ/(\tau_0-\tau), \qquad \psi_2=-\sqrt{2}\ln(\tau_0-\tau)$$

$$r_1^\circ=\sqrt{3/2}, \qquad r_2^\circ=(^9/_4)^{1/4}\Delta\tau_0^{-1/2}$$

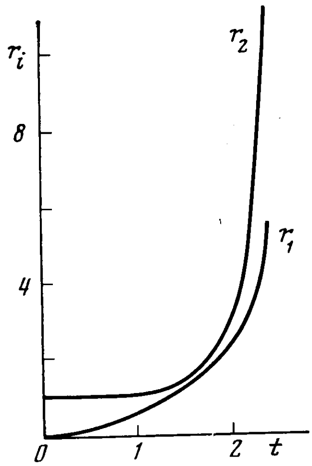
$$\psi_1=2\psi_2$$

Здесь $\Delta\tau_0$ — длина отрезка, на котором действует построенная асимптотика.

Для доказательства того что интегральные кривые системы (3.1) выходят при $\tau\to\tau_0$ на указанную асимптотику, были произведены численные расчеты. Система (3.1) интегрировалась методом Рунге — Кутта с переменным шагом, результаты счета хранились в памяти и использовались для вычислений интегралов в правой части (3.1) на каждом последующем шаге. Результаты некоторых расчетов, приведенные на фиг. 1 (Q=0,3) и 2 (Q=0,7), демонстрируют справедливость сделанных выше предположе-



Фиг. 1



Фиг. 2

ний о наличии точки нарушения регулярности решения и вместе с асимптотикой служат доказательством существования неограниченных решений системы (3.1), а следовательно, и неустойчивости спонтанно излучающей ударной волны в нелинейном приближении.

Достаточным условием неустойчивости является, таким образом, возможность сведения задачи (1.11) к системе (3.1), т. е. выполнение неравенства $h>0$. Величина h является дробно-линейной функцией параметра δ_1 — обезразмеренной второй производной вдоль ударной адиабаты. Поэтому неравенство $h_1>0$ можно рассматривать как ограничение на кривизну адиабаты в точке, соответствующей рассматриваемому разрыву.

Можно также показать, что все результаты остаются в силе, если в качестве r выбрать величину $r_1=-(\mu_1+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)^{-1}\equiv r^{-1}$ или рассмотреть уходящие возмущения, порожденные волной, движущейся вверх по разрыву.

В заключение выражаю глубокую благодарность А. Г. Куликовскому, поставившему задачу и высказавшему ряд ценных идей, способствовавших успешному завершению работы, а также А. А. Бармину и участникам семинара Г. Г. Черного за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дьяков С. П.* Об устойчивости ударных волн.– ЖЭТФ, 1954, т. 27, № 3, с. 288–295.
2. *Конторович В. М.* К вопросу об устойчивости ударных волн.– ЖЭТФ, 1957, т. 33, № 6, с. 1525–1526.
3. *Иорданский С. В.* Об устойчивости плоской стационарной ударной волны.– ПММ, 1957, т. 21, вып. 4, с. 465–472.
4. *Зайдель Р. М.* Развитие возмущений в плоских ударных волнах.– ПМТФ, 1967, № 4, с. 30–39.
5. *Годунов С. К., Гордиенко В. М.* Смешанная задача для волнового уравнения.– В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными.– Тр. семинара С. Л. Соболева, № 2. Новосибирск, 1977, с. 5–31.
6. *Блохин А. М.* Смешанная задача для системы уравнений акустики с граничными условиями на ударной волне.– Новосибирск, 1978. 18 с. (Препринт № 110 Вычисл. центра Сиб. отд. АН СССР).
7. *Марчук Н. Г.* Исследование корректности линеаризованной теории ударной волны с помощью интегралов энергии. Новосибирск, 1979. 33 с. (Препринт Вычисл. центра Сиб. отд. АН СССР, № 153).
8. *Блохин А. М.* О корректности смешанной задачи для системы уравнений акустики с краевыми условиями на ударной волне. Новосибирск, 1979. 79 с. (Препринт Вычисл. центра Сиб. отд. АН СССР, № 141).
9. *Егорушкин С. А.* Распад плоской ударной волны в двупараметрической среде с произвольным уравнением состояния.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 6, с. 147–153.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
11. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 206 с.
12. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.VII.1983