

УДК 532.526.2.013.4

**РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК УСТОЙЧИВОСТИ ПОГРАНИЧНОГО
СЛОЯ СО ВДУВОМ ПРИ НАЛИЧИИ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО
ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ**

ЕРОШЕНКО В. М., ЗАЙЧИК Л. И., ПЕРШУКОВ В. А.

В рамках линейной теории устойчивости автомодельного пограничного слоя на пластине со вдувом исследовалась в работах [1, 2] соответственно на основе решения обычного и модифицированного с учетом непараллельности течения уравнения Орра — Зоммерфельда. В диапазоне изменения скорости вдува вплоть до отщеснения пограничного слоя получено уменьшение критического числа Рейнольдса с ростом интенсивности вдува. Расчеты устойчивости градиентных течений для семейства профилей скорости Фокнера — Скэн на проницаемых поверхностях на основе обычного уравнения Орра — Зоммерфельда выполнены в [3]. Аналогично [1, 2] получено уменьшение устойчивости пограничного слоя к малым возмущениям с ростом параметра вдува. Невязкая устойчивость течения вблизи критической точки при сильном вдуве исследовалась в [4].

В данной работе исследуется вязкая и невязкая устойчивость автомодельного течения Фокнера — Скэн на проницаемой поверхности в широком диапазоне изменения интенсивности вдува.

1. Рассматривается обтекание проницаемой поверхности при степенных законах изменения скорости во внешнем потоке $u_e \sim x^m$ и изменения скорости вдува $V_w \sim x^{(m-1)/2}$ ($m > 0$). В этом случае система уравнений пограничного слоя имеет автомодельное решение

$$\begin{aligned} \frac{u_x}{u_e} &= f'(\eta); & \frac{u_y}{u_e} &= -\sqrt{\frac{m+1}{2Re_x}} \left(f + \frac{m-1}{m+1} \eta f' \right); \\ \eta &= \frac{y}{x} \sqrt{\frac{(m+1)Re_x}{2}}; & Re_x &= \frac{u_e x}{\nu} \\ f''' + ff'' + \beta(1-f'^2) &= 0; & \beta &= \frac{2m}{(m+1)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\eta=0, \quad f=-A, \quad f'=0; \quad \eta=\infty, \quad f'=1; \quad A = \frac{V_w}{u_1} \sqrt{\frac{2Re_x}{(m+1)}}$$

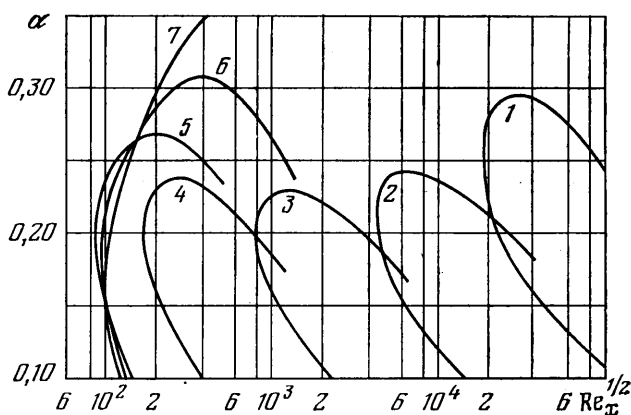
Здесь A — параметр вдува.

Уравнение для амплитуды малых возмущений в автомодельных переменных и граничные условия имеют вид

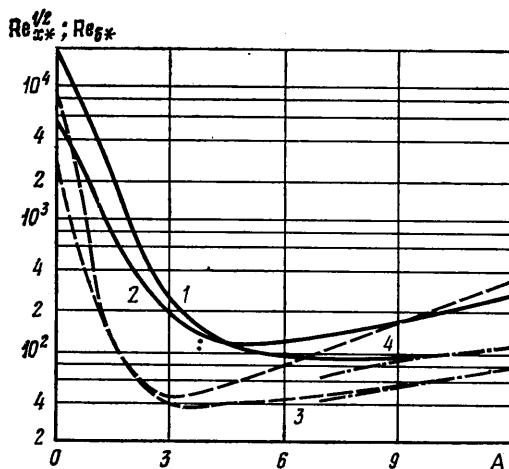
$$\begin{aligned} \varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi &= i\alpha \sqrt{\frac{2Re_x}{(m+1)}} [(f'-c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - \varphi f'''] - \\ &- \left(f + \frac{m-1}{m+1} \eta f' \right) (\varphi''' - \alpha^2 \varphi') + \left(\frac{3m-1}{m+1} f'' + \frac{m-1}{m+1} \eta f'' \right) \varphi' \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\eta=0, \quad \varphi=\varphi'=0; \quad \eta=\infty, \quad \varphi''-\alpha^2\varphi=0; \quad \varphi'+\alpha\varphi=0 \quad (1.3)$$

Последние два члена в уравнении (1.2) характеризуют непараллельность течения, вызванную наличием поперечной составляющей скорости. Роль этих членов возрастает с увеличением интенсивности вдува. Уравнение (1.2) с граничными условиями (1.3) и уравнением (1.1) для опре-



Фиг. 1



Фиг. 2

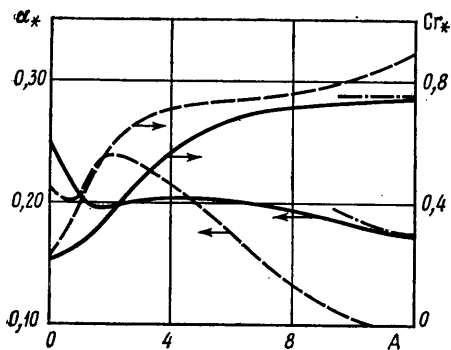
деления скорости невозмущенного течения решалось методом дифференциальной прогонки [5].

2. Расчеты вязкой устойчивости проведены для двух представляющих наибольший практический интерес случаев обтекания лобовой точки цилиндрического ($\beta=1$) и сферического ($\beta=1/2$) тел.

На фиг. 1 представлены нейтральные кривые для случая $\beta=1$ (кривые 1—7 соответствуют значениям параметра вдува $A=0; 1; 2; 3,5; 7; 9; 11$). Графики зависимости критических параметров от скорости вдува приведены на фиг. 2, 3 (сплошные линии). С ростом параметра вдува критические числа Рейнольдса Re_{x*} (1) и $Re_{\delta*}$ (2) ($Re_{\delta*}=u_0\delta/\nu$, δ — толщина потери импульса) сначала падают, достигают минимальных значений, а при больших значениях A начинают расти пропорционально A^2 . Критическая скорость распространения возмущений c_{r*} с увеличением интенсивности вдува растет и стремится к постоянному значению, при этом координата критической точки $\eta_0(f'(\eta_0)=c_{r*})$ увеличивается пропорционально A . При больших интенсивностях вдува область неустойчивости в плоскости ($\alpha-Re_x$) становится незамкнутой, верхняя ветвь имеет асимп-

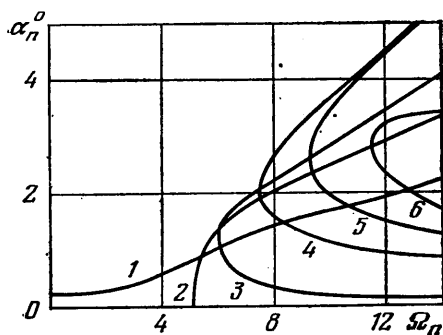
тотому $\alpha \sim Re_x^{1/2}$, а критическое значение падает по закону $\alpha_* \sim A^{-1}$. Следует указать, что при $A \geq 3$ верхняя ветвь нейтральной кривой на плоскости $(\alpha - Re_x)$ соответствует нижней ветви в плоскости $(c_r - Re_x)$, т. е. в отличие от течения на непроницаемой поверхности коротковолновые возмущения распространяются с меньшей скоростью, чем длинноволновые.

В случае $\beta = 1/2$ характер деформации нейтральных кривых $\alpha(Re_x)$ с ростом интенсивности вдува A такой же, как и при $\beta = 1$. При больших A область нарастающих возмущений становится незамкнутой и верхняя ветвь нейтральной кривой имеет асимптотику $\alpha \sim Re_x^{1/2}$. Однако нейтральные кривые $c_r(Re_x)$ при сильном вдуве существенно отличаются от случая $\beta = 1$: область нарастающих возмущений становится незамкнутой — верхняя ветвь нейтральной кривой $c_r(Re_x)$ неограниченно возрастает с ростом числа Рейнольдса Re_x . Следовательно, фазовая скорость распространения длинноволновых возмущений, соответствующих малым волновым числам α , превышает скорость внешнего потока. Зависимости критических параметров устойчивости от интенсивности вдува представлены на фиг. 2, 3 (пунктирные линии). Видно, что, как и при $\beta = 1$, критические

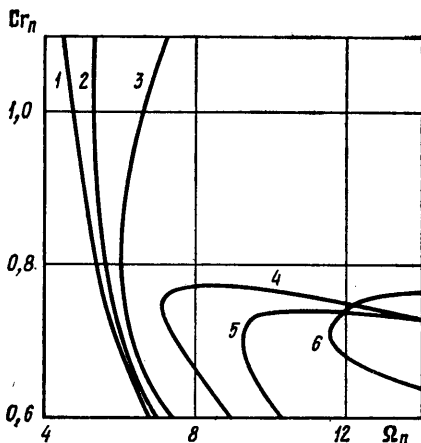


Фиг. 3

параметры устойчивости от интенсивности вдува представлены на фиг. 2, 3 (пунктирные линии). Видно, что, как и при $\beta = 1$, критические



Фиг. 4



Фиг. 5

числа Re_{x*} (3), Re_{x*} (4) с ростом параметра A вначале падают, достигают минимума и далее возрастают пропорционально A^2 , при этом α_* стремится к нулю, а c_{r*} неограниченно возрастает.

3. При сильном вдуве ($A \rightarrow \infty$) вся область течения может быть разделена на две зоны — внешнюю и внутреннюю (пристенную). Во внешней зоне имеет место потенциальное течение, а во внутренней — вихревое, которое может быть рассчитано из решения уравнений движения (1.1) в невязком приближении [6]

$$FF'' + \beta(1 - F'') = 0; \quad \xi = 0, \quad F = -1, \quad F' = 0 \quad (3.1)$$

$$F = f/A, \quad \xi = \eta/A$$

Положение разделяющей линии тока ($F=0$), которая определяет толщину невязкой вихревой зоны пограничного слоя, находится из соотношения

$$\xi_0 = \int_{-1}^0 \frac{dF}{\sqrt{1-|F|^{2\beta}}} = \frac{1}{2\beta} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\beta\right)$$

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

При интенсивном вдуве расчет устойчивости аналогично задаче об определении гидродинамических характеристик невозмущенного течения (3.1) может быть выполнен на основе невязкого приближения, т. е. без учета левой части уравнения (1.2)

$$\left(F + \frac{m-1}{m+1} \xi F'\right) (\varphi''' - \alpha^\circ \varphi') - \left(\frac{3m-1}{m+1} F'' + \frac{m-1}{m+1} \xi F'''\right) \varphi' -$$

$$-i\alpha^\circ \sqrt{\frac{2}{m+1}} \Omega [(F' - C)(\varphi'' - \alpha^\circ \varphi) - F'''\varphi] = 0 \quad (3.2)$$

$$\xi = 0, \quad \varphi = \varphi' = 0; \quad \xi = \xi_0, \quad \varphi' + \alpha^\circ \varphi = 0$$

$$\Omega = \frac{\text{Re } x^{1/2}}{A} = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{u_s}{V_w}, \quad \alpha^\circ = A\alpha$$

Из решения задачи на собственные значения (3.2) определяются нейтральные кривые $\alpha_n^\circ(\Omega_n)$, $c_{rn}(\Omega_n)$ и критические параметры, соответствующие минимальному значению Ω_n . Расчеты проведены в диапазоне изменения параметра давления $0,25 \leq \beta \leq 1,5$. Нейтральные кривые $\alpha_n^\circ(\Omega_n)$, $c_{rn}(\Omega_n)$ приведены на фиг. 4, 5 (кривые 1-6 соответствуют значениям параметра $\beta=0,3; 0,5; 0,6; 1,0; 1,25; 1,5$).

Получено, что при $\beta > 1/2$ область нарастающих возмущений ограничена нейтральной кривой, имеющей две ветви, причем верхняя ветвь нейтральной кривой $\alpha_n^\circ(\Omega_n)$ соответствует нижней ветви нейтральной кривой $c_{rn}(\Omega_n)$. Верхняя ветвь нейтральной кривой $\alpha_n^\circ(\Omega_n)$ имеет асимптотику $\alpha_n^\circ = k\Omega_n$, а коэффициент k принимает максимальное значение при $\beta=1$. Значения c_{rn} на верхней ветви нейтральной кривой могут превышать единицу. Критическое значение Ω_{n*} увеличивается с ростом параметра β . Полученные результаты для критических параметров при $\beta=1/2$; 1, как видно из фиг. 2, 3, хорошо согласуются с решениями уравнения (1.2) для сильного вдува (штрихпунктирные линии).

В [4] рассмотрена устойчивость течения вблизи лобовой точки цилиндрического тела ($\beta=1$) относительно симметричных к внешней границе пристенного слоя возмущений ($\varphi'(\xi_0)=0$). Полученные в [4] значения критических параметров ($\alpha_{n*}^\circ=2,07$; $\Omega_{n*}=7,00$; $c_{rn*}=0,74$) оказываются близкими к значениям, вычисленным из решения задачи (3.2) ($\alpha_{n*}^\circ=1,97$; $\Omega_{n*}=7,51$; $c_{rn*}=0,75$). Следовательно, влияние граничного условия на внешней границе пограничного слоя не очень существенно.

Невязкий профиль скорости при $\beta=1/2$ ($F'=\xi/2$) является примечательным в том смысле, что он разделяет профили осевой скорости с отрицательной кривизной при $\beta > 1/2$ от профилей с положительной кривизной при $\beta < 1/2$. Распределения осевой скорости, полученные из решения уравнений движения с учетом вязкости (1.1), при $\beta < 1/2$ характеризуются наличием точки перегиба при сильном вдуве.

При $\beta \leq 1/2$ нейтральные кривые $\alpha_n^\circ(\Omega_n)$, $c_{rn}(\Omega_n)$ имеют одну ветвь. Слева от нейтральных кривых находится область затухающих возмущений, а справа — нарастающих. Критическое число Ω_{n*} при $\beta < 1/2$ становится равным нулю, что свидетельствует об отсутствии асимптотической зави-

симости критического значения числа Рейнольдса $Re_{*} \sim A^2$ при больших вдувах для профилей скорости с точкой перегиба.

Таким образом, наличие точки перегиба в профилях осевой скорости, как и в задаче Рэлея для непроницаемой поверхности, оказывает существенное влияние на характер устойчивости пограничного слоя при вдуве.

4. Для случая $\beta=1/2$ задача о невязкой устойчивости течения при сильном вдуве допускает простое аналитическое решение. Решением уравнения (3.1) для этого случая будет

$$F=1/4\xi^2-1, \quad \xi_0=2 \quad (4.1)$$

С учетом (4.1) решение уравнения (3.2), удовлетворяющее граничным условиям $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$, имеет вид

$$\varphi=D \left[\left(\int_0^{\xi} \exp \left[-i\alpha^\circ \sqrt{\frac{3}{2}} \Omega \left(\frac{\xi^2}{4} - c\xi \right) \right] \operatorname{ch}(\alpha^\circ \xi) d\xi \operatorname{sh}(\alpha^\circ \xi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\int_0^{\xi} \exp \left[-i\alpha^\circ \sqrt{\frac{3}{2}} \Omega \left(\frac{\xi^2}{4} - c\xi \right) \right] \operatorname{sh}(\alpha^\circ \xi) d\xi \operatorname{ch}(\alpha^\circ \xi) \right) \right]$$

где D — постоянная.

Из граничного условия $\varphi'(\xi_0)+\alpha^\circ\varphi(\xi_0)=0$ получается характеристическое уравнение для определения собственных значений

$$\int_0^2 \exp \left[-i\alpha^\circ \sqrt{\frac{3}{2}} \Omega \left(\frac{t^2}{4} - ct \right) - \alpha^\circ t \right] dt = 0 \quad (4.2)$$

Результаты расчета нейтральных кривых $\alpha_n^\circ(\Omega_n)$, $c_{rn}(\Omega_n)$ по уравнению (4.2) хорошо согласуются с результатами прямого численного интегрирования уравнения (3.2).

При $\alpha_n^\circ \rightarrow \infty$ нейтральные кривые имеют асимптотику $\Omega_n M \alpha_n^\circ$, $c_r = N/\alpha_n^\circ$, где коэффициенты M , N определяются из решения системы уравнений

$$\int_0^\infty \cos(\gamma) \exp(-t) dt = 0; \quad \int_0^\infty \sin(\gamma) \exp(-t) dt = 0, \quad \gamma = \sqrt{\frac{3}{2}} M \left(\frac{1}{4} t^2 - Nt \right)$$

$$\alpha_n^\circ \rightarrow 0; \quad \Omega_n = \Omega_{n*} = \sqrt{2/3} 2\pi, \quad c_{rn} = 1/(2\alpha_n^\circ)$$

Из уравнения (4.2) может быть установлена связь между параметрами нарастающих ($c_i > 0$) и затухающих ($c_i < 0$) возмущений и параметрами нейтральных возмущений ($c_i = 0$)

$$\alpha^\circ = \alpha_n^\circ (1 - \Omega_n c_i), \quad \Omega = \Omega_n / (1 - \Omega_n c_i) \quad (4.3)$$

где α_n° , Ω_n — параметры нейтральных возмущений. Из формулы (4.3) можно определить максимальную скорость нарастания возмущений $c_{i \max} = 1/\Omega_{n*} = \sqrt{3}/2\pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tsou F. K., Sparrow E. M. Hydrodynamic stability of boundary layers with surface mass transfer. — Appl. Sci., Res., 1970, v. 22, № 3–4, p. 273–286.
2. Chen T. S., Sparrow E. M., Tsou F. K. The effect of mainflow transverse velocities in linear stability theory. — J. Fluid. Mech., 1971, v. 50, № 4, p. 741–750.
3. Грудцина Н. М., Заметалин В. В. Устойчивость ламинарных пограничных слоев с отсосом и вдувом. — В кн.: Аэрогазодинамика. Новосибирск: Наука, 1973, с. 74–77.
4. Ерошенко В. М., Зайчик Л. И., Рабовский В. Б. Устойчивость плоского течения вблизи критической точки при сильном вдуве. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 2, с. 157–158.
5. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. — Новосибирск: Наука, 1977, 366 с.
6. Гершбейн Э. А. Об автоматических численных и асимптотических решениях уравнений пограничного слоя при больших вдувах. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 3, с. 49–52.

Москва

Поступила в редакцию
17.1.1983