МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1984

УДК 532.522.2+517.9

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЙ ТОНКИХ ВРАЩАЮЩИХСЯ СТРУЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

МЕНЬЩИКОВ В. М.

При изучении движений тонких струй жидкости основное внимание уделяется важным с практической точки зрения вопросам устойчивости и разрушения струй в полете. В качестве примера можно назвать кумулятивные струи, образующиеся при высокоскоростном соударении металлов [1, 2]. Наряду с изучением движения струй в рамках двумерных моделей [3–6] представляет интерес вопрос о возможных упрощениях задачи, обусловленных наличием в ней малых параметров.

В настоящее время получили широкое распространение методы упрощения задачи о движении струй, основанные на использовании интегральных законов сохранения и априорного представления кинематики движения [7–9]. По существу такие методы являются аналогами гидравлического приближения и приводят к уравнениям, которые следует рассматривать как уравнения некоторой феноменологической модели. В рамках таких подходов к упрощению задачи не представляется возможным получить корректным образом уравнения следующего приближения по малому параметру.

В данной работе предлагается регулярная процедура вывода приближенных уравнений движения прямолинейных тонких вращающихся струй вязкой несжимаемой жидкости и устанавливаются параметры подобия течений. В рамках модели, учитывающей в нулевом приближении эффекты вязкости, вращения струи и капиллярности, рассматривается задача об устойчивости свободного стационарного движения конечной струи.

1. Рассматривается нестационарное осесимметричное движение струи вязкой несжимаемой жидкости, обусловленное начальным полем скоростей и начальной конфигурацией струи. Пусть в цилиндрической системе координат (r, φ, z) область $D(t)$, занятая струей в момент времени t, определяется соотношениями $0\leqslant r\leqslant R(z, t)$, $z^0(t)\leqslant z\leqslant z^1(t)$. Здесь $r=R(z, t)$ — уравнение поверхности струи, а $z=z^i(t)$ $(i=0, 1)$ — уравнения, задающие текущие положения концов струи. Определим среднюю начальную скорость U поступательного движения струи формулой

$$U=\frac{2\pi}{Q}\iint\limits_{D(0)} w(r,z,0)\,r\,dr\,dz$$

где w — проекция скорости на ось z, а Q — объем области $D(t)$.

При определении характерных размерных величин, определяющих свободное движение струи, следует учесть, что скорость струи не может быть определяющим параметром, поскольку задача в целом инвариантна относительно перехода в движущуюся систему координат. В связи с этим примем, что начальными условиями определяются следующие характерные размерные величины: ΔU — максимальное отклонение продольной компоненты скорости от средней скорости U, d — характерный поперечный размер (радиус струи), L — характерный продольный размер (длина струи или расстояние, на котором достигается перепад скорости ΔU), Ω_0 — характерная (начальная) угловая скорость вращения струи. Введем в рассмотрение следующие безразмерные параметры:

$$\varepsilon^{1/2}=\frac{d}{L},\quad \mathrm{Re}=\frac{\rho\Delta UL}{\mu},\quad \lambda=\frac{\Omega_0 d}{\Delta U},\quad \mathrm{We}=\frac{\rho(\Delta U)^2 d}{\sigma},$$

где μ — динамический коэффициент вязкости, ρ, σ — плотность и коэффициент поверхностного натяжения струи.

Исходя из априорного представления о порядках малости зависимых и независимых величин в системе координат, двигающейся со скоростью U вдоль оси z, определим следующим образом переход к безразмерным переменным:

$$r'=\frac{r}{d},\quad z'=\frac{z}{L},\quad t'=\frac{\Delta U}{L}t,\quad R'=\frac{R}{d}$$

$$u'=\varepsilon^{-1/2}\frac{u}{\Delta U},\quad w'=\frac{w}{\Delta U},\quad \omega'=\frac{\omega}{\Omega_0},\quad p'=\frac{p}{\rho(\Delta U)^2}$$

Здесь u — радиальная компонента скорости, ω — угловая скорость вращения вокруг оси z, p — давление в струе.

В этих безразмерных переменных система уравнений Навье — Стокса, описывающая осесимметричное нестационарное движение жидкости, имеет вид (штрихи далее опускаются)

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{u}{r}=0$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\lambda^2\omega^2 r+\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial r}+w\frac{\partial \omega}{\partial z}+2\frac{\omega u}{r}\right)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}+\varepsilon\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right)\tag{1.1}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Начальные и граничные условия, выражающие симметрию течения относительно оси $r=0$, равенство нулю касательных напряжений и равенство нормального напряжения величине поверхностного натяжения, запишутся так:

$$t=0:\quad w=w^\circ(r,z;\varepsilon),\quad \omega=\omega^\circ(r,z;\varepsilon),\quad R=R^\circ(z;\varepsilon)\tag{1.2}$$

$$r=0:\quad u=\partial\omega/\partial r=\partial w/\partial r=0$$

$$r=R(z,t;\varepsilon):\quad u=\frac{\partial R}{\partial t}+w\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$-p+\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\mathrm{We}}\left(1+\varepsilon\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{R}-\varepsilon\frac{\partial^2 R/\partial z^2}{1+\varepsilon(\partial R/\partial z)^2}\right)=$$

$$=\frac{2\varepsilon}{\mathrm{Re}}\frac{(\partial R/\partial z)^2}{1-\varepsilon(\partial R/\partial z)^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial r}\right)\tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial r}=\varepsilon\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial \omega}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\varepsilon\left[-\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{2\partial R/\partial z}{1-\varepsilon(\partial R/\partial z)^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]$$

Начальные условия (1.2) в силу выбора системы координат удовлетворяют соотношению

$$\int\limits_{z^0(0)}^{z^1(0)} \int\limits_0^{R^0(z;\varepsilon)} w^0(r, z; \varepsilon) r\,dr\,dz = 0 \qquad (1.4)$$

Граничные условия на концах струи $z=z^i(t)$ $(i=0, 1)$ здесь не выписываются, поскольку они не будут использоваться при выводе приближенных уравнений. Заметим лишь, что рассматриваемые далее асимптотические разложения будут иметь место вплоть до концов струи только для струй с острыми передней и задней кромками. В случае истечения конечной струи из отверстия это требование должно быть наложено на головную часть струи.

2. Приведенные уравнения и граничные условия показывают, что асимптотика решения задачи (1.1)–(1.3) при $\varepsilon\to 0$ зависит от порядка малости по ε параметров λ, Re и We. Из анализа структуры уравнений (1.1)–(1.3) вытекает, что для описания принципиально различных содержательных случаев асимптотического разложения решения при $\varepsilon\to 0$ достаточно ограничиться рассмотрением следующих зависимостей Re, λ и We от ε:

$$\mathrm{Re}=K\varepsilon^{-\alpha},\quad \lambda=n\varepsilon^{\beta},\quad \mathrm{We}=q\varepsilon^{-\gamma}\quad (0\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant 1;\ 0\leqslant\beta\leqslant {}^1/_2) \qquad (2.1)$$

Постоянные K, n и q являются параметрами подобия течений [10].

При варьировании показателей α, β, γ в соотношениях (2.1) будут изменяться вид асимптотического разложения решения и уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты разложения. Наибольший интерес представляет классификация уравнений, которым удовлетворяют главные члены асимптотических разложений при различных значениях α, β, γ. Преследуя эту цель, заметим, что при $\lambda\to 0$ или $\mathrm{We}\to\infty$ задача (1.1)–(1.3) регулярно вырождается [10]. Вследствие этого можно сразу считать $\beta=\gamma=0$. Действительно, в силу регулярности вырождения уравнения для главных членов разложения в случаях $\beta+\gamma>0$ могут быть получены из аналогичных уравнений при $\beta=\gamma=0$ (при одном и том же значении α) путем подстановки в них вместо параметров подобия n и q выражений $n\varepsilon^{\beta}$ и $q\varepsilon^{-\gamma}$ и последующего предельного перехода $\varepsilon\to 0$. Таким образом, структура уравнений для главных членов разложения будет в основном определяться значением показателя α в (2.1). Анализ показывает, что надо различать три случая: $\alpha=0$, $0<\alpha<1$ и $\alpha=1$. В дальнейшем будем считать, что функция $w^\circ(r, z; \varepsilon)$ и $\omega^\circ(r, z; \varepsilon)$ в (1.2) удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{\varepsilon\to 0} w^\circ(r, z; \varepsilon) = w_0^\circ(z), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \omega^\circ(r, z; \varepsilon) = \omega_0^\circ(z) \qquad (2.2)$$

Спецификой получения приближенных уравнений при $0\leqslant\alpha<1$ является то, что для замыкания системы уравнений k-го приближения необходимо привлекать уравнения $k+1$-го приближения. Для иллюстрации метода получения приближенных уравнений рассмотрим более подробно основной случай, отвечающий значениям $\alpha=\beta=\gamma=0$ в соотношениях (2.1).

Представим искомые величины в виде рядов по целым степеням ε

$$w=w_0+\varepsilon w_1+\varepsilon^2 w_2+\ldots,\quad \omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots$$

$$u=u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\ldots,\quad p=p_0+\varepsilon p_1+\varepsilon^2 p_2+\ldots \qquad (2.3)$$

$$R=R_0+\varepsilon R_1+\varepsilon^2 R_2+\ldots$$

После подстановки выражений (2.3) в уравнения (1.1) и (1.3) получатся уравнения, имеющие вид полиномов по ε. Приравнивая коэффициенты этих полиномов, придем к бесконечной системе уравнений, содержащей уравнения нулевого, первого и т. д. приближений.

Легко видеть, что для нулевого приближения определяющими уравнениями будут следующие:

$$\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{\partial w_0}{\partial z}+\frac{u_0}{r}=0$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial r}-n^2r\omega_0^2=\frac{1}{K}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial r}-\frac{u_0}{r^2}\right) \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2\omega_0}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\omega_0}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_0}{\partial r}=0$$

$$r=0:\quad u_0=\partial\omega_0/\partial r=\partial w_0/\partial r=0$$

$$r=R_0(z,t):\quad u_0=\frac{\partial R_0}{\partial t}+w_0\frac{\partial R_0}{\partial z},\quad p_0-\frac{2}{K}\frac{\partial u_0}{\partial r}-\frac{1}{qR_0}=0 \tag{2.5}$$

$$\partial\omega_0/\partial r=\partial w_0/\partial r=0$$

Интегрирование уравнений (2.4) с учетом условий (2.5) дает

$$w_0=w_0(z,t),\quad \omega_0=\omega_0(z,t),\quad u_0=-\frac{r}{2}\frac{\partial w_0}{\partial z}$$

$$p_0=\frac{n^2}{2}\omega_0^2(r^2-R_0^2)-\frac{1}{K}\frac{\partial w_0}{\partial z}+\frac{1}{qR_0} \tag{2.6}$$

Из (2.6) и кинематического условия на поверхности струи $r=R_0(z,\ t)$ вытекает одно из искомых уравнений, которым должны удовлетворять функции $w_0(z,\ t)$, $\omega_0(z,\ t)$ и $R_0(z,\ t)$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t}+w_0\frac{\partial S_0}{\partial z}+S_0\frac{\partial w_0}{\partial z}=0\quad (S_0=R_0^2) \tag{2.7}$$

Соотношения (2.6), (2.7) исчерпывают всю информацию, которую можно извлечь из уравнений (2.4)–(2.5). Для получения двух недостающих уравнений нулевого приближения обратимся к исходным уравнениям первого приближения

$$\frac{\partial u_1}{\partial r}+\frac{\partial w_1}{\partial z}+\frac{u_1}{r}=0$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial r}-2n^2r\omega_0\omega_1+\frac{\partial u_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial u_0}{\partial r}+w_0\frac{\partial u_0}{\partial z}-\frac{1}{K}\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}=$$

$$=\frac{1}{K}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}-\frac{u_1}{r^2}\right) \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial\omega_0}{\partial t}+w_0\frac{\partial\omega_0}{\partial z}+\frac{2}{r}\omega_0u_0-\frac{1}{K}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial z^2}=\frac{1}{K}\left(\frac{\partial^2\omega_1}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\omega_1}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial t}+w_0\frac{\partial w_0}{\partial z}+\frac{\partial p_0}{\partial z}-\frac{1}{K}\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}=\frac{1}{K}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial r}\right)$$

Граничные условия с учетом их сноса на поверхность $r=R_0(z,\ t)$ в данном приближении имеют вид

$$r=0:\quad u_1=\partial\omega_1/\partial r=\partial w_1/\partial r=0$$

$$r=R_0(z,t):\quad u_1+R_1\frac{\partial u_0}{\partial r}=\frac{\partial R_1}{\partial t}+w_0\frac{\partial R_1}{\partial z}+w_1\frac{\partial R_0}{\partial z}$$

$$-p_1-R_1\frac{\partial p_0}{\partial r}+\frac{2}{K}\frac{\partial u_1}{\partial r}-\frac{1}{q}\left[\frac{R_1}{R_0^2}+\frac{\partial^2 R_0}{\partial z^2}+\frac{1}{2R_0}\left(\frac{\partial R_0}{\partial z}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{2}{K}\left(\frac{\partial R_0}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial w_0}{\partial z}-\frac{\partial u_0}{\partial r}\right) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial r}=\frac{\partial R_0}{\partial z}\frac{\partial\omega_0}{\partial z}\quad \frac{\partial w_1}{\partial r}=-\frac{\partial u_0}{\partial z}+2\frac{\partial R_0}{\partial z}\left(\frac{\partial w_0}{\partial z}-\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)$$

Интегрируя последнее уравнение системы (2.8) с учетом граничного условия при $r=0$, получим

$$w_1=\frac{K}{4}r^2\left(\frac{\partial w_0}{\partial t}+w_0\frac{\partial w_0}{\partial z}-\frac{2}{K}\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}-n^2\omega_0{}^2R_0\frac{\partial R_0}{\partial z}-\right.$$
$$\left.-n^2\omega_0\frac{\partial\omega_0}{\partial z}R_0{}^2-\frac{1}{qR_0{}^2}\frac{\partial R_0}{\partial z}\right)+\frac{K}{16}n^2r^4\omega_0\frac{\partial\omega_0}{\partial z}+w_{10}(z,t) \tag{2.10}$$

После интегрирования третьего уравнения системы (2.8) и удовлетворения граничному условию при $r=0$ для функции $\omega_1(r, z, t)$ будем иметь следующее представление:

$$\omega_1=\frac{K}{8}r^2\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial t}+w_0\frac{\partial\omega_0}{\partial z}-\omega_0\frac{\partial w_0}{\partial z}-\frac{1}{K}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial z^2}\right)+\omega_{10}(z,t) \tag{2.11}$$

Удовлетворяя двум последним граничным условиям системы (2.9), получим недостающие уравнения

$$S_0\left(\frac{\partial w_0}{\partial t}+w_0\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3}{K}S_0\frac{\partial w_0}{\partial z}+\frac{n^2}{4}\omega_0{}^2S_0{}^2+\frac{1}{q}S_0{}^{1/2}\right)$$
$$S_0{}^2\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial t}+w_0\frac{\partial\omega_0}{\partial z}-\omega_0\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)=\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial z}\left(S_0{}^2\frac{\partial\omega_0}{\partial z}\right) \tag{2.12}$$

Уравнения (2.7) и (2.12) в совокупности с формулами (2.6) полностью описывают нулевое приближение.

Для получения уравнений первого приближения надо проделать те же самые операции, что и в предыдущем случае, т. е. проинтегрировать остальные уравнения системы (2.8) с учетом граничных условий (2.9) и привлечь дополнительно уравнения второго приближения. Ясно, что уравнения k-го приближения при $k\geqslant1$ будут линейными уравнениями, а функции u, w, ω, p представятся в виде полиномов по степеням r, определяемыми (2.3) и формулами типа (2.10), (2.11).

3. Анализ асимптотических разложений решения задачи (1.1)—(1.3) при других значениях показателей α, β и γ в соотношениях (2.1) приводит к следующим выводам относительно структуры уравнений, описывающих главные члены разложения.

Для $0<\alpha<1$ и $\beta=\gamma=0$ нулевое приближение описывается формулами (2.6) и уравнениями (2.7), (2.12), в которых надо положить $K^{-1}=0$. Случаи $0\leqslant\alpha<1$ характеризуются тем, что во всех приближениях искомые функции представляются в виде полиномов по r и соответствующие уравнения содержат две независимые переменные z и t.

Существенно отличными от обсуждавшихся уравнений оказываются уравнения нулевого приближения при $\alpha=1$, $\beta=\gamma=0$. Проводя анализ уравнений (1.1)—(1.3) для этого случая и учитывая соотношения (2.2), приходим к следующим уравнениям и граничным условиям в нулевом приближении:

$$\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{\partial w_0}{\partial z}+\frac{u_0}{r}=0,\quad \frac{\partial p_0}{\partial r}-n^2r\omega_0{}^2=0$$
$$\frac{\partial\omega_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial\omega_0}{\partial r}+w_0\frac{\partial\omega_0}{\partial z}+2\frac{\omega_0u_0}{r}=\frac{1}{K}\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\omega_0}{\partial r}\right)$$
$$\frac{\partial w_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial w_0}{\partial r}+w_0\frac{\partial w_0}{\partial z}+\frac{\partial p_0}{\partial z}=\frac{1}{K}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_0}{\partial r}\right) \tag{3.1}$$
$$t=0:\quad w_0=w_0{}^\circ(z),\quad \omega_0=\omega_0{}^\circ(z),\quad R_0=R_0{}^\circ(z)$$
$$r=0:\quad u_0=\partial\omega_0/\partial r=\partial w_0/\partial r=0$$

$$r=R_0(z,t):\quad u_0=\frac{\partial R_0}{\partial t}+w_0\frac{\partial R_0}{\partial z},\quad p_0=\frac{1}{qR_0},\quad \frac{\partial \omega_0}{\partial r}=\frac{\partial w_0}{\partial r}=0$$

По своей структуре данные уравнения аналогичны уравнениям пограничного слоя, их стационарный аналог изучался в [5]. Легко видеть, что при $n=0$ (случай $\beta>0$) для решения задачи (3.1) справедливы соотношения

$$w_0=w_0(z,t),\quad \omega_0=\omega_0(z,t),\quad u_0=-\frac{r}{2}\frac{\partial w_0}{\partial z},\quad p_0=\frac{1}{qR_0}$$

в которых функции $w_0(z, t)$, $\omega_0(z, t)$ и $R_0(z, t)$ удовлетворяют уравнениям (2.7), (2.12) при $n=K^{-1}=0$.

Следует отметить, что в этом случае первое и последующие приближения описываются уравнениями, в которых искомые функции существенным образом зависят от трех независимых переменных: r, z, t. Здесь выделить явно зависимость от переменной r уже не удается.

Завершая анализ особенностей главных членов асимптотического разложения при $\varepsilon\to0$ для разных значений показателей α, β и γ, остановимся кратко на учете влияния внешнего воздействия на струю, обусловленного аэродинамическим сопротивлением. Предполагая режим движения струи гиперзвуковым, для внешнего давления $p_{\text{г}}$ на струю имеем оценку: $p_{\text{г}}\sim\varepsilon\rho_0U^2$, где ρ_0 — плотность окружающего воздуха. Следовательно, в граничных условиях на поверхности струи член, отвечающий за внешнее давление на струю, будет иметь следующий порядок малости: $\varepsilon\rho_0U^2/\rho(\Delta U)^2$. Отсюда вытекает, что если $\varepsilon\rho_0U^2/\rho(\Delta U)^2\sim o(1)$ при $\varepsilon\to0$, то обсуждавшиеся выше нулевые приближения асимптотических разложений останутся такими же и при учете внешнего воздействия воздуха на струю. В противном случае, т. е. если $p_{\text{г}}/\rho(\Delta U)^2\sim O(1)$, в левой части первого уравнения системы (2.12) добавится член $S_0\partial P/\partial z$, где $P=p_{\text{г}}/\rho(\Delta U)^2$.

4. Приведенный выше анализ асимптотических разложений решения задачи (1.1)–(1.3) при различных соотношениях (2.1) показывает, что в большинстве случаев уравнения нулевого приближения могут быть формально получены из уравнений (2.7), (2.12). В связи с этим остановимся более подробно на исследовании основных свойств начально-краевой задачи для обсуждаемых уравнений.

При рассмотрении свободного движения конечной струи ($z^0(t)\leqslant z\leqslant z^1(t)$) необходимо поставить соответствующие условия на концах струи. В случае заостренных концов, когда выполняются соотношения $R(z^i(t),\ t)=0$ и $\partial R(z^i(t),\ t)/\partial z\neq0$ $(i=0,\ 1)$, эти условия непосредственно вытекают из (1.3) и для нулевого приближения имеют вид

$$z=z^i(t):\quad \frac{dz^i}{dt}=w_0(z^i(t),t),\qquad \frac{\partial\omega_0}{\partial z}=\frac{\partial w_0}{\partial z}=0\quad (i=0,1)\tag{4.1}$$

Граничные условия (4.1) естественно задавать и при свободном движении конечных струй, для которых $R(z^i(t),\ t)\neq0$ $(i=0,\ 1)$. В этом случае, поскольку вблизи концов струи полученное асимптотическое разложение неприменимо, решение соответствующей задачи для уравнений (2.7), (2.12) с условиями (4.1) должно рассматриваться как внешнее решение, которое нужно срастить с внутренними вблизи концов струи.

Вид уравнений (2.7), (2.12) и граничных условий (4.1) упрощается, если перейти к лагранжевым переменным, в которых объемная лагранжева координата $x=x(z,\ t)$ определяется как решение следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial x}{\partial t}+w_0(z,t)\frac{\partial x}{\partial z}=0\quad (z^0(t)\leqslant z\leqslant z^1(t))\tag{4.2}$$

$$x(z,0)=\int\limits_{z_0^0}^{z} S_0(\xi,0)\,d\xi \quad (z_0^0\leqslant z\leqslant z_0^1) \tag{4.3}$$

Легко видеть, что в силу (2.7) для решения $x=x(z,\ t)$ задачи (4.2)—(4.3) выполнены соотношения

$$\partial x/\partial z=S_0, \qquad \partial x/\partial t=-w_0 S_0$$

Полагая

$$\int\limits_{z_0^0}^{z_0^1} S_0(\xi,0)\,d\xi=\frac{Q}{\pi}=m$$

и оставляя прежние обозначения для искомых величин (индекс 0 далее опускается), получим, что уравнения (2.7), (2.12), а также начальные и граничные условия в переменных $x,\ t$ примут вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+S^2\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{K}S^2\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{n^2}{4}\omega^2 S^2+\frac{1}{q}S^{1/2}\right) \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial (S\omega)}{\partial t}=\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x}\left(S^3\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)$$

$$t=0{:}\quad S=S^\circ(x), \qquad w=w^\circ(x), \qquad \omega=\omega^\circ(x) \tag{4.5}$$

$$x=0;\ b{:}\ \partial\omega/\partial x=\partial w/\partial x=0 \tag{4.6}$$

Функция $w^\circ(x)$ в силу (1.4) должна удовлетворять условию

$$\int\limits_0^m w^\circ(x)\,dx=0$$

В рамках сформулированной одномерной модели (4.4)—(4.6) свободного движения конечных струй рассмотрим в линейной постановке задачу об устойчивости стационарного решения $w=0$, $S=S_0=\mathrm{const}$, $\omega=\omega_0=\mathrm{const}$. Положим $w=w_1(x,\ t)$, $S=S_0+S_1(x,\ t)$, $\omega=\omega_0+\omega_1(x,\ t)$ и, считая малыми величины с индексом 1 линеаризуем систему (4.4). Для полученной таким образом линейной однородной системы уравнений будем искать частные решения вида

$$w_1=\exp\left(\frac{S_0^2}{K}\nu t\right)w^\circ(x), \qquad S_1=\exp\left(\frac{S_0^2}{K}\nu t\right)S^\circ(x),$$

$$\omega_1=\exp\left(\frac{S_0^2}{K}\nu t\right)\omega^\circ(x)$$

удовлетворяющие граничным условиям (4.6). Простые выкладки показывают, что система обыкновенных уравнений относительно функций w°, S°, ω° и граничные условия (4.6) приводят к следующей задаче для функции ω°:

$$(3\nu-a-b)\frac{d^4\omega^\circ}{dx^4}-\nu(4\nu-b)\frac{d^2\omega^\circ}{dx^2}+\nu^3\omega^\circ=0 \tag{4.7}$$

$$x=0;\quad m:\quad \frac{d\omega^\circ}{dx}=0,\qquad \frac{d^2\omega^\circ}{dx^2}-\nu\omega^\circ=0,\qquad a=\frac{K^2n^2\omega_0^2}{2S_0},\qquad b=\frac{K^2}{2qS_0^{3/2}} \tag{4.8}$$

Распространяя задачу (4.7)–(4.8) на случай комплексных ν и комплекснозначных функций ω°, можно установить следующие факты. Если $\mathrm{Im}\,\nu\neq 0$, то $\mathrm{Real}\,\nu<0$, т. е. осциллирующие решения могут только затухать со временем. При $a=0$ все собственные значения ν вещественны. Если $a+b>0$, то существует счетное число неотрицательных собственных значений ν, расположенных в интервале $0\leqslant\nu\leqslant(a+b)/3$, причем значению $\nu=0$ отвечает тривиальное решение: $w^\circ=S^\circ=0$, $\omega^\circ=\mathrm{const}$. Уравнение, из которого определяются все положительные собственные значения ν, имеет вид

$$2a\nu^{1/2}(a+b-3\nu)^{1/2}[1-\cos(\tau m)\operatorname{ch}(lm)]+[(2\nu-b)^2+ab]\sin(\tau m)\operatorname{sh}(lm)=0 \tag{4.9}$$

$$\tau^2=\frac{\nu(\sqrt{(b-2\nu)^2+4a\nu}+4\nu-b)}{2(a+b-3\nu)},\qquad l^2=\frac{\nu(\sqrt{(b-2\nu)^2+4a\nu}-4\nu+b)}{2(a+b-3\nu)}$$

Функция ω°, отвечающая собственному значению ν, удовлетворяющему уравнению (4.9), описывается формулой

$$\omega^\circ=A\{[l(\tau^2+\nu)\operatorname{sh}(lm)+\tau(\nu-l^2)\sin(\tau m)][l\sin(\tau x)-$$

$$-\tau\operatorname{sh}(lx)+\tau l[\operatorname{ch}(lm)-\cos(\tau m)][(\tau^2+\nu)\operatorname{ch}(lx)-(\nu-l^2)\cos(\tau x)]\}$$

где A — некоторая постоянная.

Из этой формулы и соотношения $\nu\omega_0S^\circ(x)=S_0(d^2\omega^\circ/dx^2-\nu\omega^\circ)$ можно получить выражение для $S^\circ(x)$.

Уравнение (4.9) показывает, что точка $\nu=(a+b)/3$ является точкой сгущения спектра. Поэтому данная величина определяет наибольший декремент нарастания возмущений. Время разрушения струи T, вычисленное по этому декременту, оказывается пропорциональным величине $\mu d/(\sigma+\rho d^3\Omega_0^2)$.

В заключение отметим, что при $n=q^{-1}=0$ методами работы [11] удается установить стабилизацию решения задачи (4.4)–(4.6) при $t\to\infty$. Предельное стационарное решение $w_\infty=0$, $\omega_\infty=\mathrm{const}$, $S_\infty(x)$ дается формулами

$$S_\infty(x)=S^\circ(x)+\frac{K}{3}\int_0^x w^\circ(\xi)\,d\xi$$

$$\omega_\infty=\int_0^m S^\circ(x)\,\omega^\circ(x)\,dx\Bigg/\left(\int_0^m S_\infty(x)\,dx\right)$$

Это стационарное решение является устойчивым решением задачи (4.4)–(4.6) при $n=q^{-1}=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
2. *Мали В. И.* Исследование струйных течений металлов при взрывных нагрузках: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1973. 126 с.
3. *Tomotika S.* On the instability of a cylindrical thread of a viscous liquid surrounded by another viscous fluid.— Proc. Roy. Soc. London (Ser. A), 1935, v. 150, № 870, p. 322–337.
4. *Епихин В. Е., Шкадов В. Я.* Течение и неустойчивость капиллярных струй, взаимодействующих с окружающей средой.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6, с. 50–59.
5. *Епихин В. Е.* Течение осесимметричных струй с предварительной закруткой.— Вестн. МГУ. Матем., механ., 1980, № 2, с. 71–75.
6. *Филянд Л. В.* Неустойчивость и распад капиллярных жидких струй в спутном потоке воздуха.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3, с. 124–128.
7. *Green A. E.* On the non-linear behaviour of fluid jets.— Int. J. Eng. Sci., 1976, v. 14, № 1, p. 49–63.
8. *Ентов В. М., Ярин А. Л.* Динамика струй капельной жидкости. Препринт Ин-та пробл. механ. АН СССР, № 127, 1979.
9. *Ярин А. Л.* Об уравнениях динамики струй капельной жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 1, с. 161–163.
10. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
11. *Зеленяк Т. И.* Качественная теория краевых задач для квазилинейных уравнений второго порядка параболического типа. Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1972. 146 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию 15.III.1983