МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1984

УДК 532.516.5

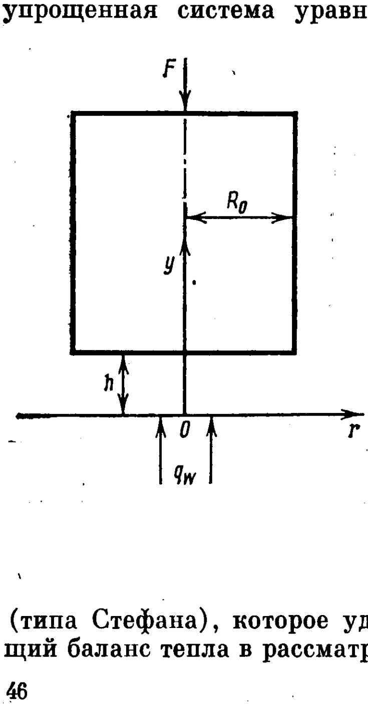
СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОМАССООБМЕНА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ

ОМЕЛЬЧЕНКО К. Г., ТРЕНЁВ М. Г.

Исследование процессов тепломассообмена, как правило, связано с решением сопряженных задач математической физики. В некоторых случаях, когда условия на сопрягаемых границах могут быть заданы в виде простых корреляционных связей, задача может быть проанализирована с помощью последовательных приближений путем раздельного параметрического решения каждой задачи в отдельности, например задача пограничного слоя с нетеплоизолированной стенкой. В тех случаях, когда корреляционные связи имеют сложный вид либо последовательные приближения не сходятся (случаи, близкие к равновесию), либо сами сопрягаемые границы не могут быть определены заранее, задачи не разделяются и возникает необходимость совместного их решения. Именно к такому типу относится рассматриваемая задача о течении и теплообмене жидкости при фазовом переходе. Такого рода задачи возникают, в частности, при внутреннем охлаждении оболочки за счет теплот фазовых переходов энергоемких веществ. В работе получены аналитические решения задач о течении и теплообмене жидкости (газа), образованной в результате фазового перехода твердого вещества при интенсивном нагреве.

Постановка задачи. Пусть на плоскость $y=0$ со стороны $y<0$ падает постоянный тепловой поток q_w; со стороны $y>0$ к ней поджимается с силой F круглый стержень радиуса R_0, который под действием теплового потока плавится (сублимирует); образовавшиеся продукты фазового перехода вытекают через зазор h, который должен быть определен в результате решения (см. фигуру).

Для математического описания рассматриваемой задачи используется упрощенная система уравнений Навье — Стокса (течение несжимаемой жидкости в окрестности критической точки) для квазистационарного случая [1] и соответствующие граничные условия



$$u\frac{\partial u}{\partial r}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial p}{\partial y}=0$$
$$r\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial ru}{\partial r}=0,\quad \rho c v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\lambda\frac{\partial T}{\partial y},\qquad (1)$$
$$\frac{\partial T}{\partial r}=0$$

$$y=0:\quad u=0,\quad v=0,\quad \frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{q_w}{\lambda}$$
$$y=h:\ u=0,\quad T=T_n;\quad r=R_0:\ p=p_0\qquad (2)$$

Уравнения (1) и граничные условия (2) должны быть дополнены соотношениями, выражающими равновесие сил и условие на поверхности фазового перехода (типа Стефана), которое удобнее использовать в виде, выражающем общий баланс тепла в рассматриваемом объеме

$$F=2\pi\int\limits_0^{R_0} pr\,dr,\quad H\rho v_n=-q_w+\frac{2}{R_0}\int\limits_0^h \rho cu(R_0,y)(T-T_n)\,dy \tag{3}$$

Сначала рассмотрим решение задачи (1)—(3) для некоторых частных случаев.

Случай большой вязкости. В этом случае инерционные члены в первом уравнении системы (1) могут быть опущены и система преобразуется к виду, соответствующему течению жидкой пленки [2]. В работе [3] рассмотрена эта задача и получено ее аналитическое решение, зависящее от параметров

$$\beta_1=\frac{H\lambda}{q_wR_0c}\sqrt[4]{\frac{2Fc\rho}{3\pi\mu\lambda}},\quad \beta_2=\frac{H\lambda}{q_whc},\quad \beta_3=\frac{\lambda\Delta T}{hq_w} \tag{4}$$

С помощью параметра β_1, вычисленного по исходным данным задачи, по таблицам либо уравнению, представленным в работе [3], находятся параметры β_2, β_3 и определяются все характеристики рассматриваемого процесса: h — величина зазора, ΔT — перепад температур в нем и v_n — линейная скорость плавления.

Случай идеальной жидкости. В этом случае первое уравнение системы (1) примет вид

$$u\frac{\partial u}{\partial r}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

Интегрируя уравнение неразрывности (1) по y от 0 до h и по r от 0 до r и учитывая граничные условия (2), получим

$$\frac{r}{2}v_n=-\int\limits_0^h u(r,y)\,dy$$

и в силу произвольного r и того же уравнения неразрывности

$$u(r,y)=ru_1(y),\quad v=v(y) \tag{5}$$

Этот вид u и v является общим для рассматриваемой задачи, поскольку получен из уравнений и граничных условий без дополнительных предположений.

Подставляя (5) в первое уравнение (1) и используя граничные условия (2) (кроме $u(0)=0$) и соотношения (3), получим решение

$$p=\frac{2(p_0-F_1)}{R_0}r^2+2F_1-p_0,\quad F_1=\frac{F}{\pi R_0^2} \tag{6}$$

$$u=r\sqrt{\alpha}\left(1-\frac{y}{h}\right),\quad v=\sqrt{\alpha}y\left(\frac{y}{h}-2\right)$$

$$\alpha=\frac{4(F_1-p_0)}{\rho R_0^2},\quad h=-\frac{v_n}{\sqrt{\alpha}}$$

Предполагая, что конвективный теплообмен в газе отсутствует и что продукты фазового перехода прозрачны для излучения (диатермическая среда), можно определить v_n и ΔT

$$v_n=-\frac{q_w}{\rho H},\quad q_w=\varepsilon\sigma[(T_n+\Delta T)^4-T_n^4]$$

$$\Delta T=\sqrt[4]{\frac{q_w}{\varepsilon\sigma}+T_n^4}-T_n,\quad \varepsilon=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

Аналогичным образом можно получить формулы с введением эффективного коэффициента теплопроводности в зазоре.

Общий случай. В этом случае вязкостные и инерционные члены имеют один и тот же порядок, т. е. необходимо решать систему (1) в полном виде. С учетом (5) первые два уравнения системы и граничные условия представим в виде

$$(v')^2-2vv''+2\nu v'''=4\alpha, \quad u_1=-\frac{v'}{2}; \quad \nu=\frac{\mu}{\rho} \tag{7}$$

$$y=0:\ v=v'=0; \quad y=h:\ v'=0$$

Решение уравнения (7) будем искать в виде

$$v=\sum_0^\infty a_n y^n \tag{8}$$

Для определения рекуррентного вида коэффициентов a_n путем дифференцирования (7) получим уравнение

$$vv'''-\nu v^{\mathrm{IV}}=0 \tag{9}$$

с помощью которого легко устанавливаются соотношения

$$a_n=\sum_2^{n-4}(n-k-1)(n-k-2)(n-k-3)a_k a_{n-k-1}[n(n-1)(n-2)(n-3)\nu]^{-1} \tag{10}$$

Ограничиваясь первыми членами ряда до $n=9$ и используя граничные условия (7), получим

$$v=a_2y^2+\frac{\alpha}{3\nu}y^3+\frac{4\alpha a_2}{6!\nu^2}y^6+\frac{4\alpha^2}{7!\nu^3}y^7 \tag{11}$$

$$u=-r\left(a_2y+\frac{\alpha}{2\nu}y^2+a_2\frac{2\alpha}{5!\nu^2}y^5+\frac{2\alpha^2}{6!\nu^3}y^6\right)$$

$$a_0=a_1=0, \quad a_2=-\frac{6!\nu^2h\alpha+4\alpha^2h^5}{2\cdot 6!\nu^3+4!\alpha\nu h^4}$$

Следует отметить, что полученное решение (8), (10), (11) не переходит при $\nu\to 0$ в частное решение (6) (предельный случай), поскольку в уравнении ν является коэффициентом при старшей производной; кроме того, при получении выражений для v и u (11) использовано граничное условие $v'(0)=u_1(0)=0$, которому не удовлетворяет решение (6). При $\nu\to 0$ количество рассматриваемых членов ряда (10) должно увеличиваться, так как в выражении для a_n (10) ν находится в знаменателе. Именно это условие ограничивает при малых ν применимость формул (11).

Очевидно, что если в уравнениях (7) или (9) положить $\nu=0$, то решение (8) принимает вид (6).

Если рассмотреть случай большой вязкости, то, пренебрегая членами порядка $1/\nu^2$ и выше, решение (11) можно записать в виде

$$a_2\cong-\frac{h\alpha}{2\nu}, \quad v\cong-\frac{\alpha}{\nu}y^2\left(\frac{h}{2}-\frac{y}{3}\right),$$

$$u\cong r\frac{\alpha}{2\nu}y(h-y)$$

Полученные выражения для $v(y)$ и $u(r, y)$ в точности соответствуют частному случаю [3].

Решение последнего уравнения системы (1) с учетом (11) примет вид

$$T-T_n=\frac{q_w}{\lambda}\int\limits_v^h \exp\left\{-\frac{\rho c}{\lambda}\frac{\alpha}{\nu}\int\limits_0^\xi\left[\eta^2\left(\frac{h}{2}-\frac{\eta}{3}\right)+\frac{2\alpha}{6!\nu^2}\eta^6\left(h-\frac{2}{7}\eta\right)\right]d\eta\right\}d\xi \tag{12}$$

Для определения неизвестной величины h необходимо использовать второе соотношение (3), которое с учетом (11) и (12) можно записать в виде

$$\frac{\beta_2\beta_1}{\sqrt[4]{\beta_1}}\left(\frac{1}{6}+\frac{\beta_1}{\beta_0}\frac{10}{7!}\right)=1-\int\limits_0^1\left[\beta_1(\eta-\eta^2)+\frac{\beta_1^2 2}{\beta_0 5!}\left(\eta^5-\frac{\eta^6}{3}\right)\right]f(\eta)\,d\eta \tag{13}$$

$$f(\eta)=\int\limits_\eta^1 \exp\left\{-\left[\frac{\beta_1}{6}\left(\xi^3-\frac{\xi^4}{2}\right)+\frac{\beta_1^2 2}{\beta_0 7!}\left(\xi^7-\frac{\xi^8}{4}\right)\right]\right\}d\xi$$

$$\beta_0=\frac{\rho c v}{\lambda},\quad \beta_1=\frac{\alpha\rho c h^4}{\lambda\nu},\quad \beta_2=\frac{H\lambda}{q_w c}\sqrt[4]{\frac{\alpha\rho c}{\lambda\nu}}$$

Уравнение (13) решено численно, и результаты представлены в виде зависимости β_2 от β_1 для дискретных значений β_0 в таблице.

β_1	$\beta_0=0,2$	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6
1	5,202	5,357	5,410	5,437	5,454	5,465	5,472	5,479
0,9	5,711	5,864	5,916	5,943	5,959	5,970	5,977	5,983
0,8	6,280	6,478	6,530	6,556	6,572	6,582	6,590	6,596
0,7	7,095	7,242	7,293	7,318	7,334	7,344	7,351	7,357
0,6	8,079	8,223	8,272	8,297	8,312	8,322	8,329	8,334
0,5	9,396	9,535	9,583	9,607	9,621	9,631	9,637	9,643
0,4	11,27	11,40	11,45	11,47	11,48	11,49	11,50	11,50
0,3	14,18	14,31	14,35	14,37	14,38	14,39	14,40	14,40
0,2	19,50	19,61	19,65	19,67	19,68	19,69	19,70	19,70
0,1	33,26	33,36	33,39	33,41	33,42	33,43	33,43	33,44
0,08	39,43	39,53	39,59	39,58	39,58	39,59	39,60	39,60
0,06	49,07	49,16	49,19	49,20	49,21	49,22	49,22	49,22
0,04	66,70	66,78	66,81	66,82	66,83	66,83	66,84	66,84
0,02	112,5	112,6	112,6	112,6	112,6	112,6	112,6	112,6
0,008	224,0	224,1	224,1	224,1	224,1	224,1	224,1	224,1
0,004	337,0	337,1	337,1	337,1	337,1	337,1	337,1	337,1

Таким образом, по параметрам β_0 и β_2, определенным по исходным данным задачи, с помощью таблицы определяется параметр β_1, затем величина h рассчитывается по формуле

$$h=\sqrt[4]{\frac{\beta_1\lambda\nu}{\alpha\rho c}} \tag{14}$$

после чего все интересующие величины (u, v, v_n, ΔT) находятся по формулам (11), (12).

Пример расчета. Рассмотрим применение полученных решений для случая большой вязкости (расплав металла); исходные данные: $R=10$ кг; $R_0=2\cdot10^{-2}$ м; $q_w=1000$ ккал/м^{2}с; $H=300$ ккал/кг; $\rho=3000$ кг/м^3; $T_n=1500$ К; $c=0,1$ ккал/кг·град; $\mu=0,02$ кг·с/м^2; $\lambda=0,01$ ккал/м·с·град. Значения параметров β_0, β_1, β_2, определяемые (13) и таблицей, составляют: $\beta_0=0,2$; $\beta_2=99,173$; $\beta_1=0,027$. Рассчитанные по формулам (14), (12) и (11) параметры равны: $h=0,1226\cdot10^{-3}$; $v_n=0,001138$; $\Delta T=13,13$. Соответствующие значения, определяемые по формулам частного случая [3], составят: $h=0,119\cdot10^{-3}$; $v_n=0,00115$; $\Delta T=11,89$.

В случае идеальной жидкости (пары сублимации): $F=10$; $R_0=2\cdot10^{-2}$; $q_w=1000$; $H=1000$; $T_n=1300$; $\rho=300$; $c=0,2$; $\mu=0,2\cdot10^{-4}$; $\lambda=0,2\cdot10^{-4}$. Значения параметров β_0, β_1, β_2 (13) составляют $\beta_0=0{,}2$; $\beta_2=5{,}878$; $\beta_1=0{,}89$. По формулам (14), (12) и (11) получаем $h=0{,}165\cdot10^{-4}$; $v_n=0{,}0028$; $\Delta T=813$. По формулам (6) для предельного случая $h=0{,}064\cdot10^{-4}$; $v_n=0{,}0033$; $\Delta T=1969$ ($\varepsilon=0{,}6$).

Следует отметить, что если для случая большой вязкости величины h, v_n и ΔT, определяемые по общему и частному решениям, близки, то для случая малой вязкости величины h и v_n существенно различаются. Различие в ΔT не является характерным, поскольку может быть сведено к минимуму введением эффективного коэффициента теплопередачи. Рассмотрение случаев с еще меньшей вязкостью ($\mu\leqslant0{,}1\cdot10^{-5}$), при которых величины h и v_n будут сближаться для общего и частного случаев, требует удержания большего числа членов ряда (8), при этом в значительной степени усложнятся формулы (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 528 с.
2. *Полежаев Ю. В., Юревич Ф. Б.* Тепловая защита. М.: Энергия, 1976, 391 с.
3. *Омельченко К. Г., Тренев М. Г.* Течение и теплообмен вязкой жидкости при фазовом переходе.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3, с. 128–131.

Москва

Поступила в редакцию
25.I.1983