

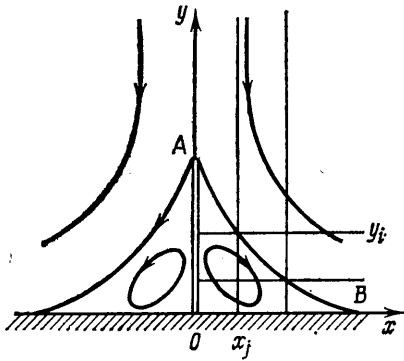
УДК 532.516.5

**РАСЧЕТ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ МАЛОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ
С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ БЭТЧЕЛОРА**

ЧЕРНЫШЕНКО С. И.

Работа посвящена анализу условий применимости и примерам применения модели Бэтчелора.

1. Вопрос о пределе при $Re \rightarrow \infty$ стационарных решений уравнений Навье – Стокса при наличии в потоке больших отрывных зон окончательно не решен [1]. Значительным успехом явились работы [2–4], в которых постулировано, что длина отрывной зоны растет линейно с числом Рейнольдса Re при $Re \rightarrow \infty$. Пока не удалось построить асимптотическую структуру области замыкания отрывной зоны, отвечающую модели работ [2–4], и доказать тем самым самосогласованность построенного в них асимптотического разложения. В отличие от этой модели модель Бэтчелора [5] получается в предположении, что размеры отрывной зоны остаются конечными при $Re \rightarrow \infty$. В этом случае пределом вязкого течения при $Re \rightarrow \infty$ будет вихрепотенциальное течение идеальной жидкости, т. е. течение с постоянной завихренностью внутри отрывной зоны, потенциальное вне ее и с тангенциальным разрывом вдоль ее границы [6]. Исследования частных случаев [7, 8], приближенные [9] и численные [10] расчеты показывают, что вихрепотенциальное течение с одной отрывной зоной однозначно определяется заданием двух независимых свободных параметров, в качестве



Фиг. 1

которых можно взять положение точки отрыва и величину завихренности ω или ω и скачок постоянной Бернулли на границе отрывной зоны $[H]$. Вопросу об определении свободных параметров посвящены работы [11–13]. Одно из условий для определения ω и $[H]$ носит локальный характер и должно быть получено путем анализа окрестности точки отрыва [13]. Например, при отрыве от гладкой поверхности следует использовать условие Бриллюэна – Вилля [4]. Второе условие глобального характера получается при анализе циклического пограничного слоя в отрывной зоне. Формулировка этого условия и пример его применения даны в [13].

Ниже изложен расчет с помощью модели Бэтчелора изображенного на фиг. 1 течения около пластинки, установленной перпендикулярно стенке в критической точке течения. Далее описан метод решения соответствующей вихрепотенциальной задачи. Затем об-

суждены некоторые вопросы, связанные с применением точной формы условия для определения завихренности [13]. Показано также, что вихрепотенциальное течение не может быть пределом при $Re \rightarrow \infty$ ламинарного течения за уступом, и приведены доводы в пользу аналогичного утверждения относительно обтекания тупых тел.

2. При обтекании пластинки, установленной в критической точке на плоскости (фиг. 1), размеры отрывной зоны должны оставаться конечными при $Re \rightarrow \infty$. Для определения предельного при $Re \rightarrow \infty$ течения необходимо найти положение точки отрыва, величину завихренности в отрывной зоне и рассчитать вихрепотенциальное течение. Согласно [14], в пределе при $Re \rightarrow \infty$ точка отрыва находится на передней кромке пластины. Чтобы определить завихренность в зоне отрыва, надо уметь находить вихрепотенциальное течение при произвольном ω [13].

Функция тока вихрепотенциального течения удовлетворяет уравнению

$$\Delta\psi = \begin{cases} 0, & \psi > 0 \\ -\omega, & \psi < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Вне отрывной зоны $\psi > 0$, а внутри $\psi < 0$. Течение рассматривается только по одну сторону от оси симметрии. На линии разрыва

$$\frac{1}{2}[(\nabla\psi)^2] = [H] \quad (2.2)$$

Существуют численные методы, основанные на сведении этой задачи к системе нелинейных интегральных уравнений [10]. Будем решать задачу (2.1), (2.2) методом установления, положив

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - \Delta\psi = \omega\Phi(\psi) - [H]F_+ \quad (2.3)$$

где $\Phi(x) = \{0, x < 0; 1, x \geq 0\}$, а дополнительные члены справа обеспечивают выполнение условий на разрыве.

Введем прямоугольную сетку. Линии $y = y_i$ выберем произвольным образом, но так, чтобы одна из этих линий проходила через точку отрыва A . Линии $x = x_j$ выберем так, чтобы они проходили через точки пересечения линии разрыва и линий $y = y_i$. Записать разностный эквивалент условия на разрыве при таком выборе сетки так же просто, как и в подходящей криволинейной системе координат; в то же время прямоугольность сетки доставляет большие преимущества при расчете. В процессе счета положение линий $x = x_j$ меняется в соответствии с изменением положения линии $\psi = 0$. Правее точки B значения x_j выбираются так, чтобы разности $x_j - x_{j-1}$ плавно изменялись с изменением j , а последняя линия проходила на заданном расстоянии от точки B . Проинтегрировав (2.3) по прямоугольной ячейке около каждого узла сетки, получим систему разностных уравнений, которая была решена численно по продольно-поперечной схеме [15]. Сильная нелинейность в (2.3) приводит к расходимости вычислений. Расходимость удалось ликвидировать, наложив дополнительное условие положительности всех собственных значений оператора перехода на новый временной слой.

Применительно к продольно-поперечной схеме это означает, что величина $2/\tau$, где τ — шаг по времени, должна лежать вне спектров разностных операторов, аппроксимирующих вторые производные по x и y . Тогда для обеспечения хорошей скорости сходимости необходимо вести расчет двойным шагом по времени: τ_1 и τ_2 . При этом значение $2/\tau_1$ должно лежать на левой границе спектров, а $2/\tau_2$ — на правой. Опыт показывает, что скорость сходимости при этом мало отличается от скорости сходимости при решении линейной задачи с постоянным оптимальным шагом. Расчет границ спектров был произведен специальной подпрограммой. Это позволило ускорить сходимость в 4 раза по сравнению со скоростью сходимости, полученной при использовании известных оценок границ спектра.

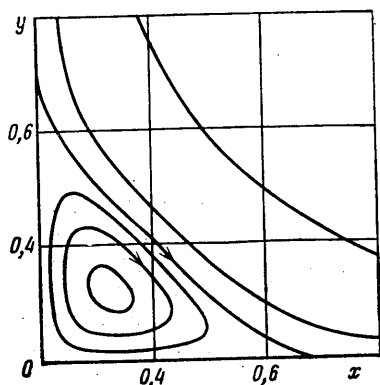
Для решения вихрепотенциальной задачи в областях другой формы необходимо предварительно сделать конформное отображение этих областей на квадрант. При этом правая часть (2.3) оказывается умноженной на якобиан отображения, что не приводит к серьезным изменениям в программе, хотя может влиять на сходимость. Метод был проконтролирован

с помощью формулы Стокса $\int_{AOB} \omega \, d\sigma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$, проверки условия симметрии

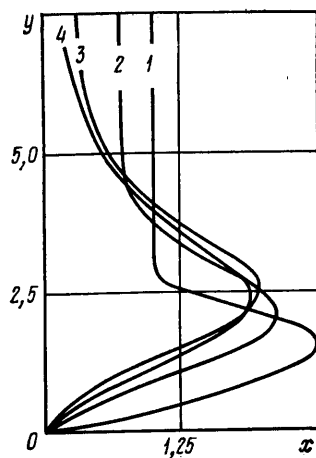
решения относительно прямой $x = y$, сравнением с точным решением [16] при $\omega = 0$, а также сравнением с решением работы [9] в случае обтекания уступа. Рассогласование всякий раз оказывалось в пределах точности рас-

чета. При расчетах обтекания уступа было обнаружено свойство немонотонности давления, которое исследовано в п. 4.

Линии тока $\psi = -0,06; -0,04; -0,02; 0,0; 0,08; 0,4$ течения по схеме фиг. 1 в части расчетной области изображены на рис. 2. Величина завихренности была определена приближенно по методу [13], причем в качестве средней скорости в слое смешения была взята полусумма скоростей по разные стороны слоя, а в пристенном слое — скорость на его внешней границе. Расчет проведен для $\psi \rightarrow xy$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, и оказалось, что в отрывных зонах $\omega = \pm 3,34$, а $[H] = 0,248$. Для сравнения укажем, что при $\omega = 0$,



Фиг. 2



Фиг. 3

т. е. в струйном течении, $[H] = 0,281$. Вторичным отрывом, который, вообще говоря, возникает вблизи точки O , в приближенном методе [13] можно пренебречь.

3. При вычислении точного значения ω (см. [13]) в циклическом пограничном слое на участке AO в процессе расчета возникают отрицательные скорости. Это свидетельствует о возникновении вторичного отрыва вблизи A . В общем случае обращение скорости циркуляционного невязкого течения на границе циклического слоя в точке A в нуль не обязательно влечет за собой возникновение отрицательных скоростей внутри слоя. В отличие от обычного пограничного слоя в циклическом слое скорость внутри слоя может оказаться больше скорости на его внешнем, граничащем с отрывной зоной крае. Это заведомо имеет место на участке смешения между точками A и B . Поэтому и в точке, где скорость невязкого течения обращается в нуль, скорость в пограничном слое может быть положительной. Это подтверждено специальным численным расчетом участка пограничного слоя от $x = 0,5$ до $x = 1$ при скорости на внешней границе слоя $U(x) = 4x(1-x)$ и начальном профиле скорости в слое при $x = 0,5$, заданном формулой

$$u_0(y) = \begin{cases} 1, & y > 2,5 \\ 0,4y + U_m y(2,5 - y)/1,25^2, & y < 2,5 \end{cases}$$

Результат расчета при $U_m = 2$ приведен на фиг. 3. Кривые 1–4 соответствуют значениям $x = 0,52; 0,8; 0,92; 1,0$. Видно, что в непосредственной близости к точке $x = 1$ касательное трение не только не стремится к нулю, но даже растет.

Течение, подобное изображенному на фиг. 1, могло бы возникнуть и в отсутствие пластинки в результате разрушения набегающего на плоскость следа [17]. Но применение результатов [17] для определения положения точки отрыва было бы необоснованным, так как исследование ло-

кальной структуры окрестности точки отрыва проведено в [17] в предположении о струйном характере течения в глобальном масштабе. Наличие циклического слоя, подходящего к точке отрыва из отрывной зоны, при этом не учитывалось. Использованные выше результаты [14] для пластины представляются менее зависимыми от наличия циклического слоя.

4. При обтекании уступа поток отрывается от его угловой кромки. Согласно [18], перед точкой отрыва с угловой кромки градиент давления направлен против потока и стремится к бесконечности при приближении к кромке. Покажем, что при обтекании уступа в модели Бэтчелора градиент давления направлен по потоку. Предположим, что длина отрывной зоны много больше ее высоты или, что эквивалентно, что $\omega \ll 1$. Из результатов [13] следует, что это предположение соответствует вполне реальному случаю, когда набегающий на уступ пограничный слой начинается на расстоянии от уступа, много большем его высоты. В работе [9] получено решение этой задачи в характерном масштабе, в котором длина отрывной зоны остается конечной, а высота ступеньки стремится к нулю. Рассмотрим течение в масштабе высоты ступеньки. Функция тока ψ удовлетворяет уравнениям (2.1) с условием (2.2). Положим длину отрывной зоны равной $2\varepsilon^{-1}$. Если $\psi_v' \rightarrow 1$ при $x, y \rightarrow \infty$, то [9]

$$\begin{aligned} \omega &= \omega^* \varepsilon^{1/2} + \dots, \quad [H] = 1/2 + \varepsilon h^* + \dots, \\ \omega^* &= 3,165, \quad h^* = -0,418 = -(\omega^*)^2/24 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Начальное приближение в рассматриваемом масштабе тривиально: линия раздела — прямая, а функция тока внутри отрывной зоны [9]

$$\psi = -\omega^* \varepsilon^{1/2} \left[\psi_0(x, y) + \frac{1}{2}(y^2 - y) \right] + \dots$$

$$\psi_0 = 4\pi^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-3} \sin[(2n+1)\pi y] \exp[-(2n+1)\pi x].$$

Координатная система x, y показана на фиг. 4. Положив вне отрывной зоны $\psi = y - 1 + \varepsilon \psi_1(x, y) + \dots$, из (2.1), (2.2) и (4.1) получим

$$x > 0, \quad \psi_{1y}'(x, 1) = 2h^* + \omega^* \left[\frac{1}{2} + \psi_{0y}'(x, 1) \right]^2 = f(x) \quad (4.2)$$

$$x < 0, \quad \psi_1 = 0 \quad (4.3)$$

Для дальнейшего существенно очевидное неравенство $f'(x) \geq 0$. Введем аналитическую функцию $G(z) = z^{-1/2} [\psi_{1y}' + i\psi_{1x}' - f(\infty)]$ переменной $z = x + i(y-1)$. Условия (4.2), (4.3) задают действительную часть $G(z)$ на всей действительной оси.

Применив формулу Шварца, получим после преобразования

$$\psi_{1y}' + i\psi_{1x}' = f(\infty) + \frac{\sqrt{z}}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{f(t) - f(\infty)}{\sqrt{t(t-z)}} dt + iV_{\infty} \sqrt{z} \quad (4.4)$$

где V_{∞} — произвольная действительная константа. Слагаемое $iV_{\infty} \sqrt{z}$ является собственным решением. Другие собственные решения имеют вид \sqrt{z}^{2n+1} . Собственные решения с $n \geq 0$ не удовлетворяют условию сращивания на бесконечности $\psi_{1y}' \rightarrow f(\infty)$ при $x, y \rightarrow \infty$ и должны быть отброшены. Решения с $n < 0$ исключим по принципу минимальной особенности [19].

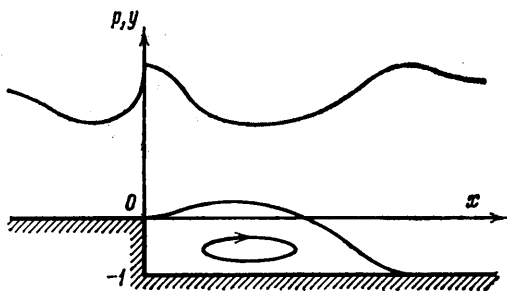
Полученный результат проверен сравнением (4.4) и точного [20] решения для такой $f(x)$, что область годографа скорости — полукруг, диа-

метр которого соответствует верхней стенке уступа, а полуокружность — линии тока, отходящей от угловой кромки.

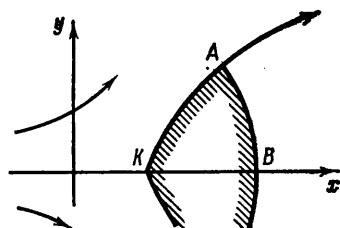
Из (4.4) получим при $z=x$, что x — компонента скорости течения

$$u = 1 + \varepsilon \left[f(0) - \sqrt{-x} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(t) - f(0)}{\sqrt{t}(x-t)} dt \right] + O(\varepsilon^2)$$

Таким образом, при приближении к точке отрыва скорость течения уменьшается. Градиент давления соответственно неблагоприятен и стремится к бесконечности при приближении к точке отрыва. Поведение давления вдоль нулевой линии тока показано на фиг. 4. Ламинарный погра-



Фиг. 4



Фиг. 5

ничный слой, согласно современным представлениям, не может преодолеть такой градиент давления и должен оторваться выше по течению от угловой точки. Отметим, что для аналогичного утверждения относительно турбулентного слоя нет оснований [21]. Можно заключить, что для описания ламинарного отрывного течения за уступом модель Бэтчелора непригодна. Аналогичный результат для обтекания впадины получен в [22].

5. Полученное выше немонотонное поведение скорости не является специфической чертой обтекания уступа, приближения вытянутой отрывной зоны или даже модели Бэтчелора и носит весьма общий характер. Пусть тело клинообразной формы (фиг. 5) обтекается с отрывом идеальной жидкостью. Пусть модель отрывного течения такова, что сопротивление тела равно нулю. Проинтегрировав давление по поверхности тела, получим в проекции на ось x

$$\int_K^A p dy = \int_B^A p dy$$

Пусть в точке A давление $p = p_0$. Так как точка A является точкой торможения потока внутри отрывной зоны, то вдоль AB $p = p_0 - \rho v^2 / 2 \leq p_0$. Поэтому

$$\int_K^A p dy \leq \int_B^A p_0 dy. \quad (5.1)$$

В точке K давление равно давлению торможения, которое больше p_0 . Чтобы было выполнено (5.1), необходимо, чтобы где-либо на KA давление стало меньше p_0 . Затем при приближении к точке A давление должно повышаться. Таким образом, наличие зоны неблагоприятного градиента давления на участке поверхности тела перед точкой отрыва есть общее свойство всех моделей с нулевым сопротивлением. Разумеется, не доказано, что градиент давления не может поменять знак еще раз вблизи точки отрыва, но для тел простой формы это мало вероятно.

Полученные результаты позволяют заключить, что при использовании модели Бэтчелора следует обращать особое внимание на анализ структуры течения в ближайшей окрестности точки отрыва. Такой анализ не только дает условие для определения положения точки отрыва, подобное, например, использованному в п. 2, но может указать и на непригодность модели Бэтчелора, как это было в п. 4. Подчеркнем, что в отличие от струйных моделей модель Бэтчелора учитывает течение внутри отрывной зоны, которое заметно сильнее при турбулентном режиме, а согласно замечанию в конце п. 4, рассуждения о непригодности модели Бэтчелора для течения за уступом нельзя распространить на турбулентные течения.

Автор благодарен Н. А. Слезкину и Г. Ю. Степанову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stewartson K.* High Reynolds number flows.— Lect. Notes Math., 1980, v. 771, p. 505–518.
2. *Сычев В. В.* Об установившемся ламинарном течении жидкости за тупым телом при большом числе Рейнольдса.— Докл. на VIII Симп. по современным проблемам механики жидкостей и газов. Тарда, Польша, 1967. 25 с.
3. *Smith F. T.* Laminar flow of an incompressible fluid past a bluff body: the separation, reattachment, eddy properties and drag.— J. Fluid Mech., 1979, v. 92, № 1, p. 171–205.
4. *Сычев В. В.* Асимптотическая теория отрывных течений.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 2, с. 20–30.
5. *Batchelor G. K.* A proposal concerning laminar wakes behind bluff bodies at large Reynolds number.— J. Fluid Mech., 1956, v. 1, № 4, p. 338–398.
6. *Batchelor G. K.* On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number.— J. Fluid Mech., 1956, v. 1, № 2, p. 177–190.
7. *Лаврентьев М. А.* О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй.— Матем. сб., 1938, т. 4, № 3, с. 391–454.
8. *Шабат А. Б.* Об одной схеме плоского движения жидкости при наличии на дне траншеи.— ПМТФ, 1962, № 4, с. 68–80.
9. *Childress S.* Solutions of Eulers equations containing finite eddies.— Phys. Fluids, 1966, v. 9, № 5, p. 860–872.
10. *Садовский В. С., Синицына Н. П.* О вихрепотенциальном течении идеальной жидкости на плоскости с углублением.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 2, с. 161–163.
11. *Нейланд В. Я., Сычев В. В.* К теории течений в стационарных срывных зонах.— Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1, с. 14–23.
12. *Колосов В. В., Шифрин Э. Г.* К задаче обтекания тела с образованием развитой стационарной отрывной зоны при $Re \rightarrow \infty$.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2, с. 28–37.
13. *Чернышенко С. И.* О приближенном способе определения завихренности в зоне отрыва при вязкости, стремящейся к нулю.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 1, с. 10–15.
14. *Сычев В. В.* Отрыв пограничного слоя от плоской поверхности.— Уч. зап. ЦАГИ, 1978, т. 9, № 3, с. 20–29.
15. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
16. *Чаплыгин С. А.* К вопросу о струях в несжимаемой жидкости.— Тр. Отд-ния физ. наук. Моск. о-ва любителей естествознания. М., 1899, т. 10, вып. 1.
17. *Сычев Вик. В.* О разрушении плоского ламинарного следа.— Уч. зап. ЦАГИ, 1978, т. 9, № 6, с. 9–16.
18. *Рубан А. И.* О ламинарном отрыве от точки излома твердой поверхности.— Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 2, с. 44–54.
19. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
20. *Гогин Л. В., Степанов Г. Ю.* Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979. 367 с.
21. *Сычев В. В., Сычев Вик. В.* О турбулентном отрыве.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 6, с. 1500–1512.
22. *Herwig H.* Die Anwendung der asymptotischen Theorie auf laminare Strömungen mit endlichen Ablösegebiete.— Z. Flugwiss. Weltraumforschung, 1982, B. 46, № 4, S. 266–279.

Москва

Поступила в редакцию
10.I.1983