

УДК 532.516

**ОБ УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЭЛЛИпсоИДА ВРАЩЕНИЯ
В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

МИКИШЕВ Г. Н., СТОЛБЦОВ В. И.

Колебания тел в ограниченных объемах вязкой жидкости изучались в ряде работ. Большинство из них посвящено поперечным колебаниям стержней [1–3]. В [4] рассмотрена общая задача о поступательных колебаниях осесимметричного тела в осесимметричном объеме маловязкой жидкости.

Ниже, следуя [4], рассматривается задача о малых угловых колебаниях эллипсоида вращения в круговом цилиндре с плоскими днищами. В общем случае гидродинамические коэффициенты уравнения движения эллипсоида определены численно для различных значений безразмерных геометрических параметров с использованием метода Рунге. В случае неограниченной жидкости для гидродинамических коэффициентов получены аналитические зависимости, выражающиеся через элементарные функции. Теоретические результаты хорошо согласуются с результатами проведенных экспериментальных исследований.

1. Пусть эллипсоид с полуосями a, b ($b < a$) совершает колебания в жидкости вокруг малой оси. Будем считать, что жидкость извне ограничена круговым цилиндром с плоскими днищами, ось симметрии которого совпадает с осью симметрии эллипсоида. Как известно [5, 6], скорость v частиц жидкости определяется из решения линеаризованной задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta v, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (x, y, z) \in Q \quad (1.1)$$

$$v|_S = \alpha_i(t) (e_i \times r)_s, \quad v|_Z = 0, \quad v|_{z=-\infty} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь S, Σ — поверхности эллипсоида и внешней границы жидкости соответственно, Q — ограниченный ими объем жидкости, $\alpha_i(t)$ — угловая скорость движения тела, ν, ρ — коэффициент кинематической вязкости и плотность жидкости, $r = xe_x + ye_y + ze_z$ — радиус-вектор точки, x, y, z — ее декартовы координаты.

Известно [5, 6], что как при угловых колебаниях полости, полностью заполненной маловязкой жидкостью, так и при колебаниях тела в жидкости вблизи смоченных поверхностей образуются пограничные слои толщиной $\sim \nu^{1/2}$. В основной же массе жидкости движение потенциально и определяется в первом приближении потенциалом $\alpha_i \Psi(x, y, z)$ порождающего движения и потенциалом $\sim \nu^{1/2}$, обусловленным ускорением частиц жидкости на границах погранслоев в тангенциальном направлении.

Составим уравнение моментов количества движения рассматриваемой механической системы, в котором в качестве внешних сил учтем нормальные и тангенциальные напряжения на поверхности Σ . В результате будем иметь [4]

$$(J^0 + J) \alpha_{ii} + \rho \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \Omega_{12} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_i(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = M \quad (1.3)$$

$$J = \int_Q \nabla \Psi \nabla \Psi dQ, \quad \Omega_{12} = \Omega_1 + \Omega_2, \quad \alpha_{ii} = d\alpha_i/dt, \quad \alpha_{\tau} = d\alpha/d\tau$$

$$\Delta \Psi = 0, \quad (x, y, z) \in Q, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_z = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_s = zn_x - xn_z \quad (1.4)$$

$$\Omega_1 = \int_S (\nabla \Psi - \mathbf{e}_\nu \times \mathbf{r})^2 dS, \quad \Omega_2 = \int_z \nabla \Psi \nabla \Psi dS. \quad (1.5)$$

Здесь M — момент сил, действующих на эллипсоид.

При движении эллипсоида в идеальной жидкости (1.3) принимает вид

$$(J^0 + J) \alpha_{it} = M \quad (1.6)$$

Это уравнение совпадает по форме с уравнением движения эллипсоида в безграничной жидкости [8]. Однако в рассматриваемом случае (наличие поверхности Σ) оно справедливо лишь для малых α .

В случае установившихся колебаний уравнению (1.3) можно придать вид

$$J_* \alpha_{it} + h \alpha_i = M_0 \cos pt \quad (1.7)$$

$$J_* = J^0 + J + J', \quad J' = \rho \Omega_{12} (\nu/2p)^{1/2}, \quad h = \rho \Omega_{12} (\nu p/2)^{1/2} \quad (1.8)$$

Здесь «вязкий» момент инерции J' и коэффициент демпфирования h пропорциональны величине Ω_{12} , которая полностью определяется потенциалом порождающего движения Ψ , т. е. формой объема Q .

Слабозатухающие колебания эллипсоида, когда к нему приложен лишь восстанавливающий момент $M = -c_0 \alpha$, можно описать уравнением

$$J_* \alpha_{it} + h \alpha_i + c_0 \alpha = 0 \quad (1.9)$$

$$h = \rho \Omega_{12} (\nu \omega/2)^{1/2}, \quad J' = \rho \Omega_{12} (\nu/2\omega)^{1/2}, \quad \omega^2 = c_0 / (J^0 + J) \quad (1.10)$$

В этом случае логарифмический декремент колебаний δ связан с J' формулой $\delta = \pi J' / J_*$, которая использовалась при экспериментальном определении гидродинамических коэффициентов.

2. Пусть потенциалы Ψ_1 и Ψ_2 являются решениями задачи (1.4), где вместо Σ выбраны поверхности Σ_1 и Σ_2 соответственно.

И пусть, например, поверхность Σ_2 объемлет Σ_1 . Для произвольных функций f_1 и f_2 введем скалярное произведение как интеграл по объему Q_1 от произведения $\nabla f_1 \nabla f_2$ (Q_1 — объем между поверхностями S и Σ_1). В определенном таким образом унитарном пространстве справедливо неравенство Коши — Шварца [7]

$$\left(\int_{Q_1} \nabla \Psi_1 \nabla \Psi_2 dQ \right)^2 \leq J_1 \int_{Q_1} \nabla \Psi_2 \nabla \Psi_2 dQ$$

усиливая которое, получим

$$J_1 > J_2 \quad (2.1)$$

Здесь J_1 и J_2 — присоединенные моменты инерции при движении тела в Q_1 и Q_2 соответственно. В частности, всегда

$$J > J_\infty \quad (2.2)$$

если J_∞ соответствует движению тела в безграничной жидкости.

В этом случае

$$\Psi = \Psi_\infty = k(C - A)x(y^2 + z^2) \sin \varphi, \quad k = \varepsilon^2 / [2\varepsilon^2 - F_0(a^2 + b^2)] \quad (2.3)$$

$$J = J_\infty = \frac{1}{15} \pi a b^2 k \varepsilon^2 F_0, \quad \varepsilon^2 = a^2 - b^2$$

$$F_0 = C_0 - A_0 = ab^2 [(a^2 + 2b^2) a^{-1} b^{-2} / \varepsilon^2 - 3 \ln[(a + \varepsilon)/(a - \varepsilon)] / 2\varepsilon^3] \quad (2.4)$$

где A, C являются известными функциями координат и геометрических параметров эллипсоида [8].

Используя (2.3), (1.5), определим величину Ω , позволяющую вместе с формулами (1.3), (2.4) полностью описать малые колебания эллипсоида в безграничном объеме маловязкой жидкости

$$\Omega = 2F_p^2 D_1 + F_m^2 D_2 + 4kF_0' (kF_0' + F_m/a^2 + F_p/b^2) D_3 \quad (2.5)$$

$$F_p = kF_0 + 1, \quad F_m = kF_0 - 1, \quad F_0' = -\varepsilon^2/a^2 b^2$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= \pi a^3 b [S_2(1 - E^2/2)/2 + S_1/4]/E, \quad S_1 = E^4 \arcsin E^{-1} \\ D_2 &= \pi a b^3 [S_2(1 + E^2/2)/2 - S_1/4 + S_1/E^2]/E, \quad S_2 = b/\varepsilon \\ D_3 &= \pi a^3 b^5 E [S_2(3E^2/4 - 1/2) + S_1/E^2 - 3S_1/4], \quad E\varepsilon = a \end{aligned} \quad (2.6)$$

Формулы (2.2) – (2.6) могут служить средством контроля вычислений при приближенном определении параметров колебаний тел в различных полостях, заполненных жидкостью.

Используя неравенство Коши – Шварца

$$\left(\int_Q \nabla f_1 \nabla f_2 dQ \right)^2 \leq \int_Q \nabla f_1 \nabla f_1 dQ \int_Q \nabla f_2 \nabla f_2 dQ$$

можно получить и другие оценки для присоединенных моментов и присоединенных масс тел, движущихся в объеме жидкости Q , ограниченном поверхностью Σ .

Обозначим через J_{Qv} , m_Q момент инерции объема жидкости относительно оси y и массу этого объема. Подставляя в неравенство Коши – Шварца поочередно $f_1 = \Psi$, $f_2 = xz$ и $f_1 = \varphi_0$, $f_2 = x$ (φ_0 – потенциал скоростей жидкости, соответствующий поступательному движению тела вдоль оси x [4]), получим

$$J \geq (J_x - J_z)^2 / J_{Qv}, \quad \mu = \rho \int_Q (\nabla \varphi_0)^2 dQ \geq m_1^2 / m_Q \quad (2.7)$$

Здесь J_x, J_z, m_1 – моменты инерции относительно осей x, z и масса движущегося тела (плотность тела принята равной плотности жидкости).

Из полученных оценок, в частности, следует, что $J, \mu \rightarrow \infty$ при приближении поверхности Σ к поверхности тела.

Пусть поверхность Σ фиксирована и имеются два тела с поверхностями S_1 и S_2 , при этом одна из них охватывает другую.

Если поверхности S_1 и S_2 геометрически подобны, то можно утверждать, что охватывающей поверхности соответствует большее значение присоединенного момента инерции и присоединенной массы. Это утверждение следует из соображений теории подобия, оценки (2.1) и работы [4]. В общем же случае оно не имеет места.

Для случая поступательного движения тел при фиксированной поверхности Σ справедлива также следующая оценка:

$$\mu_1 + m_1 < \mu_2 + m_2$$

где m_1, m_2 и μ_1, μ_2 – массы и присоединенные массы тел, имеющих поверхности S_1, S_2 и плотность, равную плотности жидкости.

3. Рассмотрим задачу об определении гидродинамических коэффициентов при колебаниях эллипсоида в объеме, ограниченном круговым цилиндром (R – радиус цилиндра, $2H$ – расстояние между его днищами).

Решение задачи (1.4) будем искать как функцию, доставляющую стационарное значение функционалу

$$I = \frac{1}{2} \int_Q \nabla \Psi \nabla \Psi dQ + \int_S \Psi (zn_x - xn_z) dS \quad (3.1)$$

Сформулированную вариационную задачу будем решать методом Ритца. Положим

$$\Psi_N = c_1 \gamma_1 + \dots + c_N \gamma_N \quad (3.2)$$

где γ_k — система координатных функций, обладающая свойством полноты в Q [9].

Как известно [4], процесс последовательных приближений заключается в последовательном решении систем уравнений ($N=1, \dots, N_0$)

$$\sum_{j=1}^N J_{kj} c_j = -b_k \quad (k=1, \dots, N) \quad (3.3)$$

$$J_{kj} = \int_Q \nabla \gamma_k \nabla \gamma_j dQ, \quad b_j = \int_S \gamma_j (zn_x - xn_z) dS$$

и вычислении искомых величин J и Ω_i ($i=1, 2$)

$$J = \rho \sum_{k,j=1}^N J_{kj} c_k c_j, \quad \Omega_1 = \int_S (\nabla \Psi_N - \mathbf{e}_y \times \mathbf{r})^2 dS, \quad \Omega_2 = \int_S \nabla \Psi_N \nabla \Psi_N dS \quad (3.4)$$

Описанный процесс вычислений, проводимый с использованием ЭВМ, заканчивается, когда J и Ω достаточно хорошо приближаются к своим истинным значениям при некотором значении $N=N_0$. Очевидно, желаемым результатом является малость N_0 , что зависит от того, насколько удачно выбраны γ_k .

Опыт, полученный в процессе вычисления динамических характеристик поступательно колеблющихся тел, показал, что лучшие результаты по сравнению с негармоническими функциями дает использование γ_k , принадлежащих семейству гармонических функций [4]. В соответствии с этим при решении задачи (1.4) принималось

$$\gamma_k = r^k P_k^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi, \quad r^{-(k+1)} P_k^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi \quad (3.5)$$

где $P_k^{(1)}$ — присоединенные полиномы Лежандра.

В реализованной с использованием (3.5) программе вычислений на ЭВМ с целью более быстрого достижения результата последовательность расположения γ_k могла варьироваться в зависимости от значений геометрических параметров b, R, H .

Однако для эллипсоидов с $b/a \leq 0,5$ реализовать процесс (3.3), (3.4) с достижением приемлемой для практики точности не удалось даже при $N_0 \approx 20-26$. При этом для указанных значений N_0 не выполнялась оценка (2.2). Как и в работе [4], убыстрения сходимости итеративного процесса можно добиться, добавив к системе (3.5) потенциал Ψ_∞ , определяемый уравнением (2.3). Тогда в случае даже одного приближения имеет место результат, удовлетворяющий (2.2), (2.4). Составленная таким образом АЛГОЛ-программа для ЭВМ БЭСМ 6 позволила рассчитать величины J, Ω_i с точностью 1–2% для эллипсоидов с относительным удлинением ≤ 6 . Некоторые результаты расчетов, выполненных для $H=a+3b$, приведены на фиг. 1, 2. При этом в качестве характерного линейного размера взят параметр $a=1$.

На фиг. 1, где по оси ординат отложены значения J , а по оси абсцисс — отношение b/R , кривым 1–5 отвечают значения b , равные 0,169, 0,251, 0,333, 0,666, 0,766. При $R=\infty$ кривые 1–5 пересекают ось ординат в точках, в которых величины J практически совпадают со значениями, рассчитанными по формулам (2.3), (2.4).

Поскольку зависимость $J_\infty(b/a)$ определяется двузначной функцией (фиг. 3, кривая 1), через каждую точку оси ординат на фиг. 1 проходят

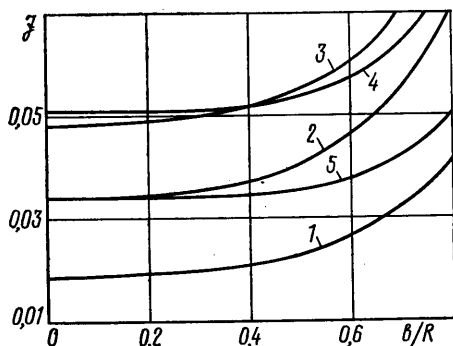
две кривые $J(b/R)$. Как видно из фиг. 1, с ростом b/R величина J заметно возрастает, что находится в соответствии с формулой (2.1). При этом из двух кривых, пересекающихся при $b/R=0$, более быстрый подъем имеет место для кривой с меньшим значением b/a .

На фиг. 2 для значений $b=0,169, 0,251, 0,333$ (кривые 1, 2, 3 соответственно) приведены результаты расчета функции $\Omega(b/R)$. При $R=\infty$ кривые пересекают ось ординат в точках, которым с большой степенью точности соответствуют результаты вычислений по формулам (2.5), (2.6). Эта зависимость изображена на фиг. 3 (кривая 2). На этой фигуре не приведены кривые для $b=0,667, 0,766$, поскольку во всем исследованном диапазоне

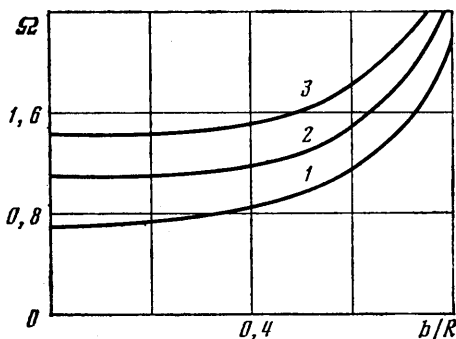
изменения b/R , соответствующие зависимости, довольно слабо выражены (отметим, что при $b=1$ величина $\Omega=8\pi/3$ постоянна, т. е. не зависит от R).

Была также исследована зависимость J и Ω от безразмерного параметра $(H-a)/b$. Как показали результаты расчетов, даже при $H=a$ величины J и Ω лишь на 6–8% отличаются от своих предельных значений при $H=\infty$. Уже при $H \geq a+3b$ можно считать, что J и Ω не зависят от высоты цилиндра.

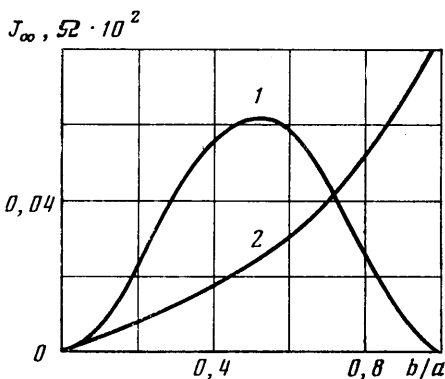
4. С целью проверки теоретических результатов были определены экспериментально гидродинамиче-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ские коэффициенты для вытянутого эллипсоида вращения при его колебаниях относительно малой оси в цилиндрических баках, заполненных водой.

Эллипсоид и баки имели следующие размеры: $a=440$ мм, $b=74,4$ мм, $R=150$ и 350 мм. Поверхность эллипсоида и внутренние стенки баков гладкие.

Гидродинамические коэффициенты определялись методом свободных колебаний с использованием зависимостей

$$J = [(1 - \delta/\pi) f_0^2 / f^2 - 1] J^0 \quad (4.1)$$

$$J' = \delta f_0^2 J^0 / \pi f^2, \quad h = 2\delta f_0^2 J^0 / f$$

где f , f_0 — частоты свободных колебаний эллипсоида в воде и воздухе. Эти зависимости получены на основании соотношений $\delta = \pi J' / J_*$, $f^2 J_* = f_0^2 J^0$ и справедливы только для слабозатухающих колебаний.

Эллипсоид подвешивался в центре баков с помощью двух стальных стержней с остро заточенными концами и бандажа с двумя бронзовыми бобышками, имеющими небольшие лунки. Стержни крепились в баках симметрично относительно их осей, острыми вниз. Расстояние между стержнями выдерживалось равным расстоянию до центров лунок. Бандаж одевался на эллипсоид с таким расчетом, чтобы точки контакта лунок с острыми стержней лежали на его малой оси. При заполнении баков водой эллипсоид поджимался к остриям стержней выталкивающей силой, равной по величине разности сил: архимедовой и веса эллипсоида.

В случае испытаний эллипсоида в воздухе выталкивающая сила воспроизводилась путем натяжения двух тонких стальных струн, нижние концы которых крепились к бобышкам комута в точках, соответствующих оси вращения, верхние — к подвижным узлам динамометров, смонтированных на неподвижной перекладине с возможностью вертикального перемещения. Натяжение струн регулировалось перемещением динамометров относительно перекладки и контролировалось по их шкалам.

Восстанавливающий момент создавался двумя винтовыми пружинами, расположенными горизонтально в плоскости колебаний эллипсоида. Пружины крепились к стенкам баков и к выходящей из прорези верхнего днища тонкой трубке, заделанной в эллипсоиде по его продольной оси. Жесткость пружин подбиралась, исходя из заданной частоты колебаний.

Для измерения колебаний использовался чувствительный элемент, выполненный в виде консольного стержня с наклеенными на нем тензорезисторами, который располагался между стенкой бака и одной из пружин. Колебания записывались на шлейфовом осциллографе. Диапазоны частот и амплитуд свободных колебаний эллипсоида, реализованные в экспериментах, составляли 1–5 Гц и 0–1°.

Частоты свободных колебаний эллипсоида f и f_0 определялись непосредственно по осциллограммам. Логарифмический декремент δ находился как разность декрементов, соответствующих частотам f и f_0 . Момент инерции J' определялся методом добавочных масс. Его минимальная величина составляла 0,128 кгм², а максимальная — 0,301 кгм².

В значения гидродинамических коэффициентов, вычисленных по формулам (4.1), вводились небольшие поправки на влияние трубки, расположенной на верхнем конце эллипсоида. Поправки находились расчетом на основании известного решения задачи о колебаниях бесконечного цилиндра в вязкой жидкости [4]. Их величины не превышали 1% для J и 6% — для h и J' .

Из трех гидродинамических коэффициентов независимых только два: J и h . Коэффициент J' выражается через h ($J' = h/2\pi f$).

Ниже приведены значения гидродинамических коэффициентов J и h , полученные экспериментально и расчетом для случая, когда влиянием днищ баков можно пренебречь

R	f	J_1	J_2	h_1	h_2
150	1,586	0,400	0,386	0,0816	0,0774
150	1,346	0,398	0,386	0,0758	0,0713
350	1,540	0,317	0,315	0,0717	0,0679
350	1,278	0,312	0,315	0,0658	0,0620

Как видно из таблицы, экспериментальные и расчетные значения гидродинамических коэффициентов хорошо согласуются между собой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chen S. S., Wambsganss M. W., Jendrzejczyk J. A. Added mass and damping of a vibrating rod in confined viscous fluids.— Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1976, v. 43, № 2, p. 325–329.
2. Снявский В. Ф., Федотовский В. С., Кухтин А. Б. О колебаниях цилиндра в вязкой жидкости.— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 1, с. 62–67.
3. Yang C. I., Moran T. J. Calculations of added mass and damping coefficients for hexagonal cylinders in a confined viscous fluid.— Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol., 1980, v. 102, № 2, p. 152–157.
4. Микишев Г. Н., Столбецов В. И. О колебаниях тела в ограниченном объеме вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 1, с. 22–30.
5. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., 1963. 230 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977. 831 с.
8. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. Л.— М.: Гостехиздат, 1948. 535 с.
9. Миллин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957. 476 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.I.1983