МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1984

УДК 532.5

ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ РАСТЕКАНИИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ ПО ПЛОСКОСТИ

БУЛАХ Б. М.

Рассматривается задача о стационарном течении над горизонтальной плоскостью тяжелой невязкой несжимаемой жидкости, которая вытекает через боковую поверхность кругового цилиндра, возвышающегося над плоскостью на высоту h и имеющего радиус основания a. Движение жидкости предполагается симметричным относительно оси цилиндра; давление p постоянно (равно атмосферному) на свободной поверхности жидкости. При $a/h=\varepsilon\ll 1$ эту задачу можно рассматривать как задачу о возмущении течения от «плоского источника» свободной поверхностью. Исследование показало, что данная задача о возмущениях является существенно нелинейной, при этом ее решение во всей области, занятой жидкостью, может быть получено только в переменных типа переменных пограничного слоя. Задача допускает линеаризацию при дополнительном предположении о малости параметра $\lambda=Q^2/(8\pi^2ga^3)$, где Q – постоянный объемный расход жидкости на единицу высоты цилиндра, g – ускорение свободного падения. Для случая $\varepsilon\ll 1$, $\lambda\ll 1$ в работе получено решение задачи методом интегральных преобразований. В этом решении обращает на себя внимание медленное затухание возмущений скорости с глубиной (обратно пропорционально квадрату рассеяния от свободной поверхности), в то время как в похожей задаче о волновых движениях тяжелой жидкости возмущения скорости затухают по экспоненциальному закону.

1. Пусть тяжелая несжимаемая невязкая жидкость вытекает через боковую поверхность цилиндра, имеющего радиус a и высоту h, на горизонтальную плоскость (фиг. 1). В цилиндрической системе координат, где ось z вертикальна, параметры течения не зависят от угловой координаты, т. е. являются функциями только z и r. На поверхности цилиндра AB радиальная составляющая скорости v_r задана

$$v_r=Q/2\pi a,\ Q=\mathrm{const} \tag{1.1}$$

На плоскости AD величина $v_z=0$. На свободной поверхности BC, где давление p постоянно и равно атмосферному, должно выполняться условие, следующее из интеграла Бернулли

$$v_r^2+v_z^2+2gz=(Q/2\pi a)^2(1+\mathrm{tg}^2\,\gamma)+2gh \tag{1.2}$$

где γ — не известный заранее угол между скоростью $\mathbf{v}$ в точке B и осью r.

Течение жидкости в области $ABCD$ предполагаем безвихревым; тогда имеют место соотношения

$$v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\qquad v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{1.3}$$

где φ — потенциал скорости, ψ — функция тока. В качестве независимых переменных возьмем в дальнейшем r и ψ, в качестве искомых величин — z и φ, тогда из (1.3) следуют формулы

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{v_z}{v_r}\qquad \frac{\partial z}{\partial\psi}=\frac{1}{rv_r}$$

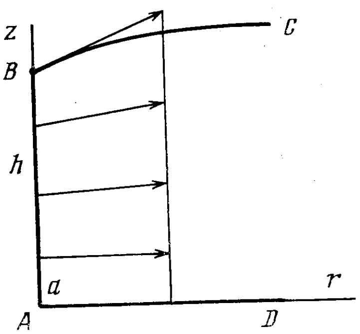
$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{v_r^2+v_z^2}{v_r}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=\frac{1}{r}\frac{v_z}{v_r} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=r\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}, \qquad r\frac{\partial z}{\partial\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2=1 \tag{1.5}$$

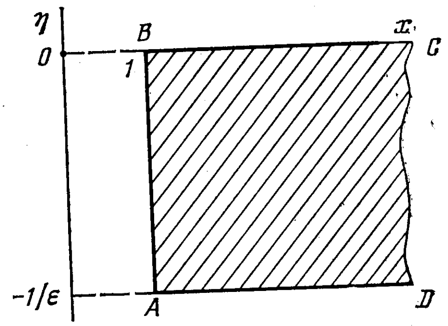
Перейдем к безразмерным переменным

$$\varphi=\frac{Q}{2\pi}\varphi^\circ, \qquad \psi=\frac{Qh}{2\pi}\psi^\circ$$
$$r=ar^\circ, \quad z=hz^\circ \tag{1.6}$$

Уравнения (1.5) после перехода к безразмерным величинам, введения новых искомых функций Z, Φ и новой независимой переменной x



Фиг. 1



Фиг. 2

примут вид

$$\frac{\partial Z}{\partial\psi^\circ}+x\left[2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\left(1+\frac{\partial Z}{\partial\psi^\circ}\right)-\varepsilon^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\psi^\circ}\right)^2\right]=0$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial\Phi}{\partial\psi^\circ}=0, \qquad \varepsilon=\frac{a}{h} \tag{1.7}$$

$$z^\circ=\psi^\circ+Z, \qquad \varphi^\circ=\frac{1}{2}\ln x+\Phi, \qquad x=(r^\circ)^2 \tag{1.8}$$

Функции Z и Φ — возмущения течения от плоского источника. Легко убедиться в том, что не существует возмущений типа

$$Z\sim\varepsilon^\alpha Z_\alpha(x,\psi^\circ), \ \Phi\sim\varepsilon^\beta\Phi_\beta(x,\psi^\circ); \ \alpha, \beta - \text{const}$$

Будем искать решения системы (1.7) в виде

$$Z=\varepsilon X(x,\eta,\varepsilon), \ \Phi=\Phi(x,\eta,\varepsilon), \ \eta=(\psi^\circ-1)/\varepsilon \tag{1.9}$$

Подстановка (1.9) в (1.7), (1.2) (после приведения к безразмерному виду) дает

$$\frac{\partial X}{\partial\eta}+x\left[2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\left(1+\frac{\partial X}{\partial\eta}\right)-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2\right]=0, \qquad \frac{\partial X}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}=0 \tag{1.10}$$

$$[\lambda(1+\operatorname{tg}^2\gamma)-X]\left(1+\frac{\partial X}{\partial\eta}\right)=\lambda\left(\frac{1}{x}+2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) \quad (\eta=0, \ 1\leqslant x<\infty)$$
$$\lambda=\frac{Q^2}{8\pi^2ga^3} \tag{1.11}$$

Из условия (1.1), соотношений (1.4), (1.8), (1.9) следует, что

$$\frac{\partial X}{\partial \eta}=0 \quad \left(x=1,\quad 0\leqslant\eta\leqslant-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Учитывая, что $X=0$ в точке B (фиг. 1), получим краевое условие для X в виде

$$X=0 \ (x=1,\ 0\leqslant\eta\leqslant-1/\varepsilon) \tag{1.12}$$

Условие $v_z=0$ $(z=0,\ a\leqslant r<\infty)$ преобразуется в условие

$$X(x,\ -1/\varepsilon,\ \varepsilon)=0 \ (1\leqslant x<\infty) \tag{1.13}$$

При $\varepsilon\to 0$ (1.13) дает

$$X(x,\ -\infty,\ 0)=0 \ (1\leqslant x<\infty) \tag{1.14}$$

Таким образом, требуется найти решение системы (1.10) в полуполосе, изображенной на фиг. 2, удовлетворяющее краевым условиям (1.11)–(1.13).

Сформулированная краевая задача носит существенно нелинейный характер: при $\varepsilon\to 0$ ни один член в уравнениях и краевых условиях не исчезает, только полуполоса превращается в квадрант.

2. Определим главный член решения задачи при $\varepsilon\ll 1$ и дополнительном условии $\lambda\ll 1$. Решение системы (1.10) ищем в виде

$$X\approx\lambda X_1(x,\ \eta),\quad \Phi\approx\lambda\Phi_1(x,\ \eta) \tag{2.1}$$

Кроме того, из (1.4), (1.6), (1.8), (2.1) следует, что

$$\operatorname{tg}\gamma\approx 2\lambda\frac{\partial X_1}{\partial x}(1,0)=O(\lambda)$$

Подставляя (2.1) в (1.10), (1.11), (1.14) и приравнивая члены наименьших степеней по λ, получим уравнения и краевые условия для функций X_1, Φ_1

$$\frac{\partial X_1}{\partial \eta}+2x\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}=0,\qquad 2\frac{\partial X_1}{\partial x}-\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}=0 \tag{2.2}$$

$$X_1=1-1/x \ \ (1\leqslant x<\infty,\ \eta=0),\ X_1=0 \ \ (x=1,\ -\infty<\eta\leqslant 0) \tag{2.3}$$

$$X_1\to 0 \ \ (\eta\to-\infty,\ x=\mathrm{const})$$

Из (2.2) перекрестным дифференцированием получаем уравнение для X_1

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial \eta^2}+4x\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}=0 \tag{2.4}$$

Краевую задачу будем решать методом интегральных преобразований, но предварительно найдем такие решения (2.4), которые удовлетворяют краевому условию при $\eta=0$.

Уравнение (2.4) имеет решения вида

$$X_1=x^{-\beta}F_\beta(u),\quad u=\eta x^{-1/2},\quad \beta=\mathrm{const}$$

где функции $F_\beta(u)$ удовлетворяют уравнению (штрих означает дифференцирование по u)

$$(1+u^2)F_\beta''+(3+4\beta)uF_\beta'+4\beta(\beta+1)F_\beta=0 \tag{2.5}$$

Согласно (2.3), требуется найти решения уравнения (2.5) $F_0(u)$ и $F_1(u)$, удовлетворяющие условиям

$$F_0(0)=1,\ F_0(-\infty)=0,\ F_1(0)=-1,\ F_1(-\infty)=0$$

Эти решения имеют вид

$$F_0(u)=\xi,\ F_1(u)=F_{1,1}(u)+cF_{1,2}(u) \tag{2.6}$$

$$F_{1,1}(u)={}^1/_2\xi(2-\xi)(3\xi^2-6\xi+1)+{}^3/_4\xi^2(\xi-1)(\xi-2)\ln[\xi(2-\xi)^{-1}]$$

$$F_{1,2}(u)=\xi^2(\xi-1)(\xi-2)^2,\ \xi=1+u(1+u^2)^{-1/2}$$

где c — произвольная постоянная.

Представим X_1 в виде

$$X_1=F_0(u)+x^{-1}F_1(u)+W(x,\ \eta) \tag{2.7}$$

Функция W удовлетворяет уравнению (2.4) и краевым условиям

$$W(x,\ 0)=0\quad(1\leqslant x<\infty) \tag{2.8}$$

$$W(1,\ \eta)=-[F_0(\eta)+F_1(\eta)]=f(\eta)\ (-\infty<\eta\leqslant 0)$$

Уравнение (2.4) имеет решения вида

$$W_b=\chi_b(x)\sin b\eta$$

где $\chi_b(x)$ — решение краевой задачи

$$x\frac{d^2\chi_b}{dx^2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2\chi_b=0;\qquad \chi_b(1)=1,\qquad \chi_b(+\infty)=0$$

Функция $\chi_b(x)$ может быть представлена в виде

$$\chi_b(x)=x^{1/2}\frac{K_1(x^{1/2}b)}{K_1(b)} \tag{2.9}$$

где $K_1(t)$ — модифицированная функция Ханкеля. (На это обстоятельство обратил внимание автора С. В. Фалькович.)

Будем теперь искать W в виде

$$W=\int_0^\infty \vartheta(b)\chi_b(x)\sin b\eta\,db \tag{2.10}$$

где $\vartheta(b)$ — функция, подлежащая определению. Краевые условия (2.8) удовлетворятся, если

$$\int_0^\infty \vartheta(b)\sin b\eta\,db=f(\eta) \tag{2.11}$$

Поскольку $f(\eta)=O(\eta^{-2})$, $\eta\to-\infty$ то, используя обратное преобразование Фурье, из (2.11) получим

$$\vartheta(b)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty[-f(-t)]\sin bt\,dt \tag{2.12}$$

Совокупность формул (2.6)—(2.10), (2.12) дает искомое решение краевой задачи. Постоянную c в (2.6) определим из условия

$$\int_0^\infty f(-t)\,dt=0$$

3. Для оценки возмущений скорости необходимо знать поведение ряда функций. Далее выписываются некоторые асимптотические оценки, полученные методами интегрирования по частям и разбиением интервалов интегрирования на подходящие части с учетом поведения $K_1(t)$ (см. [1])

$$\vartheta(b)\approx\begin{cases}2/\pi b\ln b, & b\to+0\\ 16/\pi b^{-3}, & b\to+\infty\end{cases}$$

$$\Theta(b)=\vartheta(b)\left.\frac{d\chi_b}{dx}\right|_{x=1}\approx\begin{cases}1/\pi b^3\ln^2 b, & b\to+0\\ -8/\pi b^{-2}, & b\to+\infty\end{cases}$$

$$\int_0^\infty \Theta(b)\sin b\eta\,db\approx 6\eta^{-4}\ln(-\eta),\qquad \eta\to-\infty$$

$$\int_0^\infty b\vartheta(b)\chi_b(x)\,db\approx c_1x^{-1/2}\ln x,\qquad x\to+\infty$$

$$c_1=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty t^3K_1(t)\,dt$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}\right|_{x=1}=\eta^{-2}+O[\eta^{-4}\ln(-\eta)],\qquad \eta\to-\infty$$

$$\left.\frac{\partial X_1}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}=x^{-1/2}+O(x^{-3/2}\ln x),\qquad x\to+\infty$$

Из этих оценок следуют соотношения

$$v_z|_{x=1}\approx\lambda\frac{Q}{2\pi a}\left(\frac{z^\circ-1}{\varepsilon}\right)^{-2},\qquad z^\circ\neq1 \tag{3.1}$$

$$v_r|_{\eta=0}\approx\frac{Q}{2\pi a}\left[\frac{1}{r^\circ}-\lambda(r^\circ)^{-2}\right],\qquad r^\circ\to+\infty \tag{3.2}$$

Из (3.1) вытекает, что возмущения скорости v_z довольно медленно (по степенному закону) затухают с глубиной, в то время как в похожей плоской линейной задаче о волнах на поверхности тяжелой жидкости [2]

$$v_z\sim\exp\left(\frac{z^\circ-1}{\varepsilon}\right)$$

где $z^\circ=z/h$ (z отсчитывается от дна слоя жидкости, имеющего глубину h), $\varepsilon=(hk)^{-1}$, k – волновое число гармонической волны. Из (3.2) следует, что v_r на поверхности жидкости несколько меньше, чем v_r от «плоского источника» (как это и следовало ожидать), а сама поверхность струи определяется формулой

$$z=h+a\lambda[1-(a/r)^2]+o(\lambda) \tag{3.3}$$

Примечательно, что уравнение (3.3) получается из (1.11) без решения краевой задачи. Для вывода (3.3) требуется только выполнение условия $\lambda\ll1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. Л.– М.: Гостехиздат, 1934, с. 188.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, Ч. 1. Л.– М.: Гостехиздат, 1948, с. 429.

Ленинград

Поступила в редакцию 21.XII.1981