

УДК 532.5.013.4 : 536.252

## О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА К ИССЛЕДОВАНИЮ ПЕРЕХОДОВ В ЗАДАЧЕ РЭЛЕВСКОЙ КОНВЕКЦИИ

ПЕТРОВСКАЯ Н. В.

В данной работе с применением метода Галеркина изучаются переходы в задаче о конвекции жидкости в горизонтальном слое со свободными изотермическими границами (модель Рэлея).

В работах [1–3] для этой задачи методом Галеркина исследовалось развитие возмущений и взаимодействие волн при заданных начальных полях скорости и температуры, однако последовательные переходы, приводящие к возникновению сложных режимов движений, не изучались.

С другой стороны, в последние годы появилось большое число работ (см. [4–9]), посвященных исследованию бифуркаций для отдельных галеркинских приближений, рассматриваемых как модели конвективной неустойчивости. Особенно много работ посвящено системе Лоренца [10]. Однако остается неизвестным, какие из выводов для этих маломерных приближений хотя бы качественно сохраняются для полной системы уравнений Буссинеска. Ясно, что для приближенного решения уравнений Буссинеска необходимо решать галеркинские уравнения весьма высокой размерности, и даже качественные особенности поведения решений сильно зависят от характера аппроксимации (см., например, [11], где это показано для задачи о конвекции в самогравитирующей сфере).

В данной работе численно изучаются бифуркации двумерных стационарных и периодических движений. Для определения их устойчивости вычисляются соответственно спектр матрицы линейной системы для возмущений и мультипликаторы предельного цикла. Порядок галеркинских приближений последовательно увеличивается. Процесс заканчивается тогда, когда очередное расширение галеркинской системы приводит лишь к незначительным изменениям количественных характеристик при сохранении качественных особенностей поведения решений. Следует отметить, что выводы о последовательности бифуркаций в моделях Лоренца [10] и Карри [6] не подтверждаются.

Вычисления показывают, что потеря устойчивости стационарной валиковой конвекции с ростом числа Рэлея  $r$  сопровождается мягким возникновением периодического режима. С дальнейшим ростом  $r$  автоколебания также теряют устойчивость и сменяются мягко возникающим двухчастотным режимом. Вычислены критические числа Рэлея, соответствующие указанным переходам. Как показали расчеты, период автоколебаний, выраженный в единицах безразмерного времени теплопроводности, изменяется пропорционально  $r^{-1/2}$  при постоянном числе Прандтля  $\sigma$  и слабо зависит от  $\sigma$  при постоянном  $r$ . Вычисления проведены для одного значения волнового числа  $\alpha = \pi/\sqrt{2}$ .

1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет бесконечный горизонтальный слой  $0 \leq z' \leq H$  со свободными изотермическими границами. Температура жидкости равна  $T_0$  на верхней границе слоя и  $T_0 + \Delta T$  на нижней. Движение жидкости описывается уравнениями тепловой конвекции в приближении Буссинеска [12], которые в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \sigma \Delta \mathbf{u} + \sigma k \theta \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \theta - R u_3 = \Delta \theta, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

$$t = \frac{t'\chi}{H^2}, \quad x = \frac{x'}{H}, \quad y = \frac{y'}{H}, \quad z = \frac{z'}{H}$$

$$u = \frac{u'H}{\chi}, \quad \theta = \frac{\theta'g\beta H^3}{\nu\chi}, \quad R = \frac{g\beta H^3 \Delta T}{\nu\chi}$$

$$p = \left[ \frac{p'}{\rho} - g\beta Hz \left( T_0 + \Delta T - \frac{1}{2} \Delta T z \right) \right] \frac{H^2}{\chi^2}$$

Здесь  $p'$  — отклонение от гидростатического давления;  $\rho$  — средняя плотность жидкости;  $\nu$ ,  $\beta$  и  $\chi$  — соответственно коэффициенты кинематической вязкости, теплового расширения и температуропроводности;  $g$  — гравитационная постоянная,  $k$  — орт оси  $z$ , направленный вертикально вверх,  $R$  — число Рэлея,  $\sigma = \nu/\chi$  — число Прандтля.

Границы слоя считаются неподвижными и свободными от касательных напряжений, возмущение температуры  $\theta$  на границах исчезает

$$u_3 = \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} = \theta = 0 \quad (z=0, 1) \quad (1.2)$$

2. Ограничимся рассмотрением двумерных течений жидкости, для которых  $u_2 = 0$ , функции  $u_1$ ,  $u_3$ ,  $\theta$  и  $p$  не зависят от координаты  $y$  и расход жидкости через поперечное сечение слоя равен нулю. Будем разыскивать решения уравнений (1.1), периодические по  $x$  с периодом  $L = 2\pi/\alpha$  и удовлетворяющие следующим требованиям четности и нечетности по  $x$ :

$$u_1(-x, z, t) = -u_1(x, z, t), \quad u_3(-x, z, t) = u_3(x, z, t), \quad (2.1)$$

$$\theta(-x, z, t) = \theta(x, z, t)$$

Неизвестные функции  $u_1$ ,  $u_3$ ,  $\theta$  и  $p$ , удовлетворяющие граничным условиям (1.2), представим в виде

$$u_1(x, z, t) = i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{mn}(t) \exp(i\alpha m x + i\pi n z)$$

$$u_3(x, z, t) = i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{mn}(t) \exp(i\alpha m x + i\pi n z) \quad (2.2)$$

$$\theta(x, z, t) = i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_{mn}(t) \exp(i\alpha m x + i\pi n z)$$

$$p(x, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{mn}(t) \exp(i\alpha m x + i\pi n z)$$

$$v_{-m, -n} = v_{mn}, \quad w_{-m, -n} = -w_{mn}, \quad \theta_{-m, -n} = -\theta_{mn} \quad (2.3)$$

В силу (2.1) и требования вещественности функций  $u_1$ ,  $u_3$  и  $\theta$  выполняются соотношения

$$v_{-m, n} = -v_{mn}, \quad w_{-m, n} = w_{mn}, \quad \theta_{-m, n} = \theta_{mn} \quad (2.4)$$

$$v_{-m, -n} = -v_{mn}^*, \quad w_{-m, -n} = -w_{mn}^*, \quad \theta_{-m, -n} = -\theta_{mn}^* \quad (2.5)$$

Подставляя (2.2) в (1.1), приравнивая в обеих частях равенств коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями и исключая давление с помощью уравнения неразрывности, получим систему уравнений для определения функций  $v_{mn}(t)$ ,  $w_{mn}(t)$  и  $\theta_{mn}(t)$ . В частности, уравнение неразрывности примет вид

$$\alpha m v_{mn} + \pi n w_{mn} = 0 \quad (2.6)$$

Из (2.3)–(2.6) следует, что функции  $v_{mn}$ ,  $w_{mn}$  и  $\theta_{mn}$  вещественны и некоторые из них тождественно равны нулю

$$v_{0n} = v_{m0} = w_{0n} = w_{m0} = \theta_{m0} = 0$$

Далее удобно потребовать тождественного выполнения (2.6) и ввести вместо  $v_{mn}$  и  $w_{mn}$  ( $mn \neq 0$ ) новые неизвестные  $u_{mn}$ , полагая  $v_{mn} = -u_{mn}/(2\alpha m)$ ,  $w_{mn} = u_{mn}/(2\pi n)$ .

Функции  $u_{mn}(t)$ ,  $\theta_{mn}(t)$  и  $\theta_{0n}(t)$  могут быть найдены как решения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{mn} &= -\sigma a^2 u_{mn} + 2\sigma \alpha^2 \pi m^2 n a^{-2} \theta_{mn} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{mnpq} u_{pq} u_{m-p, n-q} \\ \dot{\theta}_{mn} &= -a^2 \theta_{mn} + \frac{R}{2\pi n} u_{mn} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{np-mq}{2pq} u_{pq} \theta_{m-p, n-q} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\dot{\theta}_{0n} = -\pi^2 n^2 \theta_{0n} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{n}{2q} u_{pq} \theta_{-p, n-q}$$

$$a^2 = \alpha^2 m^2 + \pi^2 n^2$$

$$A_{mnpq} = mn(np-mq) \frac{\alpha^2 m(m-p) + \pi^2 n(n-q)}{2a^2 pq(m-p)(n-q)}$$

Ограничимся в дальнейшем изучением тех решений уравнений (1.1), которые инвариантны относительно сдвига координат  $S: (x, y, z) \rightarrow (x+L/2, y, z+1)$  (решения, описывающие валиковую конвекцию, принадлежат этому классу). Для таких решений  $u_{mn} = \theta_{mn} = 0$  при нечетных  $m+n$ .

Приближенные решения  $u^N = (u_1^N, 0, u_3^N)$ ,  $\theta^N$  ( $N=1, 2, 3, \dots$ ) уравнений (1.1) будем разыскивать, полагая в (2.7)  $u_{mn} = \theta_{mn} = 0$ , если  $|m| + |n| > 2N$ , и  $\theta_{0n} = 0$ , если  $|n| > 2(2N-1)$  (при нарушении этих условий могут возникать движения с неограниченно возрастающей по времени или по параметру энергией). Для определения галеркинских коэффициентов с учетом (2.3)–(2.5) из (2.7) получается система  $2N(N+1)-1$  уравнений. При  $N=1$  эта система сводится к системе Лоренца [10].

3. Для ряда приближений ( $2 \leq N \leq 6$ ) численно исследована устойчивость стационарных и периодических режимов. Равновесия вычислялись методом Ньютона, их устойчивость определялась по спектру матрицы линейной системы для возмущений. Расчет предельных циклов проводился методом установления. Мультипликаторы предельного цикла вычислялись как собственные числа матрицы монодромии. Один из них, как известно, равен  $+1$ , что было использовано для оценки точности вычислений.

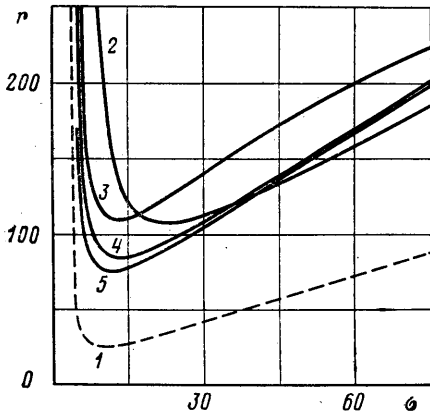
Минимальное критическое число Рэлея  $R_* = 27\pi^4/4$  соответствует  $\alpha = \pi/\sqrt{2}$ . Все вычисления проводились для этого значения  $\alpha$ . Определим относительное число Рэлея  $r$ , полагая  $r = R/R_*$ .

Механическому равновесию жидкости отвечает нулевое равновесие галеркинской системы, устойчивое при  $r < 1$ . Оно теряет устойчивость с возникновением пары устойчивых равновесий  $O_1^N$ ,  $O_2^N$ , симметричной относительно преобразования  $J: (u_{mn}, \theta_{mn}) \mapsto ((-1)^m u_{mn}, (-1)^m \theta_{mn})$ . Равновесиям  $O_1^N$ ,  $O_2^N$  отвечают стационарные движения жидкости (конвективные вали), переходящие друг в друга при сдвиге  $x \mapsto x + L/2$ .

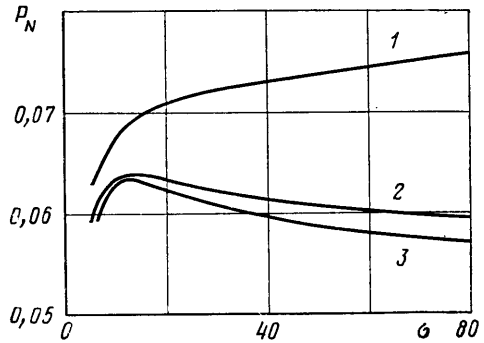
При изучении устойчивости стационарных движений выявлен ряд особенностей, сохраняющихся с ростом  $N$ . Для каждого  $2 \leq N \leq 5$  найдено значение  $\sigma = \sigma_N$ , такое, что при фиксированном  $\sigma \in (0, \sigma_N)$  равновесия  $O_{1,2}^N$  устойчивы относительно возмущений рассматриваемого класса для всех  $r > 1$  ( $4.0 < \sigma_3 < \sigma_4 < \sigma_5 < 5.5$ ). Если же  $\sigma > \sigma_N$ , то равновесия  $O_{1,2}^N$  с ростом  $r$  теряют устойчивость в результате бифуркации рождения или гибели цикла. Нейтральные кривые  $r = r_1^N(\sigma)$  на плоскости параметров  $(\sigma, r)$  определяются наличием в спектре линеаризованной системы пары чисто мнимых

собственных значений  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_N$ . При  $r < r_1^N(\sigma)$  весь спектр лежит в левой полуплоскости и равновесия  $O_{1,2}^N$  устойчивы.

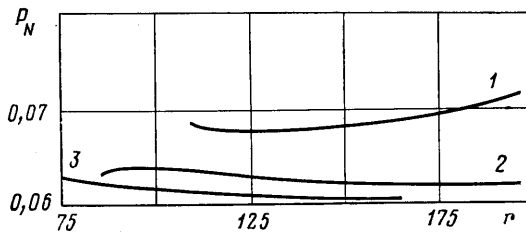
Каждая нейтральная кривая имеет единственный минимум и расположена правее прямой  $\sigma = \sigma_N$ . Результаты расчета нейтральных кривых  $r = r_1^N(\sigma)$  приведены на фиг. 1 (цифры указывают номер приближения  $N$ ), там же для сравнения дана нейтральная кривая системы Лоренца  $r =$



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

$= r_1^1(\sigma)$ . Ниже представлены вычисленные при  $\sigma = 10$  критические значения  $r = r_1^N$  и соответствующие им  $\omega_N$ :

| $N$        | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6            |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|
| $r_1^N$    | 24,74 | 201,8 | 111,1 | 86,2  | 75,2  | $73 \pm 0,5$ |
| $\omega_N$ | 9,625 | 9,943 | 29,37 | 31,30 | 31,54 | 31,6         |

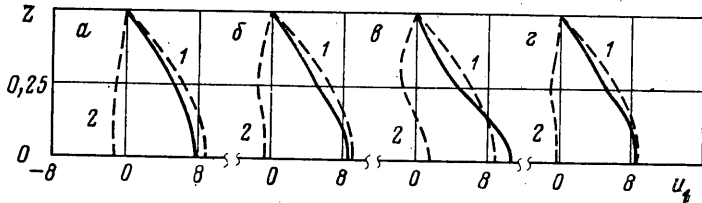
Оказывается, характер потери устойчивости стационарных движений существенно зависит от порядка приближения. Так, при  $N=1, 2$  потеря устойчивости жесткая для всех  $\sigma$ : предельный цикл ответвляется в докритическую область и неустойчив (для системы Лоренца это показано рядом авторов, см., например, [13–15]). Для высших приближений ( $N=3, 4, 5, 6$ ) потеря устойчивости равновесий  $O_{1,2}^N$  сопровождается ответвлением пары устойчивых предельных циклов  $\Gamma_{1,2}^N$ , симметричной относительно преобразования  $J$ . Им отвечают периодические движения жидкости, переходящие друг в друга при сдвиге  $x \rightarrow x + L/2$ .

Безразмерный период возникающих автоколебаний при постоянном  $\sigma$  изменяется пропорционально  $r^{-1/2}$ . Зависимость периода  $T_N$  циклов  $\Gamma_{1,2}^N$  от  $r$  при  $\sigma = 10$  приведена на фиг. 2, где по вертикальной оси отложена величина  $P_N = T_N \sqrt{r}$ , а  $N=3, 4$  и  $5$  (кривые 1, 2 и 3 соответственно). Величина  $P_N$  мало меняется во всей области устойчивости периодических решений, и переход от  $N=4$  к  $N=5$  дает поправку к значению  $P_N$  в пределах 4%.

На фиг. 3 приведена зависимость величины  $P_N$ , вычисленной на нейтральной кривой  $r=r_1^N(\sigma)$ , от числа Прандтля для  $N=3, 4$  и  $5$  (кривые 1, 2 и 3 соответственно). При переходе от  $N=4$  к  $N=5$  качественный характер зависимости воспроизводится, количественная же поправка к  $P_N$  существенно зависит от  $\sigma$  (2,3% при  $\sigma=6$ ; 0,8% при  $\sigma=10$  и 3,5% при  $\sigma=60$ ).

Следующие ниже утверждения относятся к случаю  $\sigma=10$ . Контрольные расчеты показывают, что качественно они верны и для других значений числа Прандтля.

Во всей области устойчивости периодических движений поля скорости можно представить в виде суммы двух составляющих, различных по



Фиг. 4

интенсивности и характеру поведения. Первая, более интенсивная, образована главными членами разложения (2.2)

$$\mathbf{u}^1 = (u_1^1, 0, u_3^1)$$

$$u_1^1 = i \sum_{|m|=|n|=1} v_{mn}(t) \exp(i\alpha m x + i\pi n z); \quad u_3^1 = i \sum_{|m|=|n|=1} w_{mn}(t) \exp(i\alpha m x + i\pi n z)$$

Ей отвечает движение в форме конвективных валов, испытывающих слабые периодические изменения (в любой точке конвективной ячейки амплитуды колебаний  $u_1^1$  и  $u_3^1$  не превышают 7% от их средних за период значений). Вторая составляющая скорости  $\mathbf{u}^2 = (u_1 - u_1^1, 0, u_3 - u_3^1)$ , описывающая суммарный вклад старших гармоник в разложении (2.2), является более слабой. Вблизи границ конвективной ячейки функции  $u_1^2 = u_1 - u_1^1$  и  $u_3^2 = u_3 - u_3^1$  периодически меняют знак и амплитуды их изменения в несколько раз превышают средние за период значения. Во внутренней же области конвективной ячейки влияние старших гармоник сводится к торможению валикового движения с синусоидальным профилем скорости.

На фиг. 4 для устойчивого периодического движения с периодом  $T \cong \cong 0,0051$ , вычисленного при  $\sigma=10, r=140$  ( $N=5$ ), приведены профили горизонтальной компоненты скорости  $u_1$  в сечении  $x=L/4$  (сплошная линия):  $a-t=0$ ;  $б-t=T/4$ ;  $в-t=T/2$ ;  $г-t=3T/4$ . Там же нанесены профили обеих составляющих  $u_1^1$  и  $u_1^2$  (штриховые кривые 1 и 2 соответственно). Графики всех трех функций даны для  $z \in [0, 0,5]$  ввиду их антисимметричности относительно прямой  $z=0, 5$ .

С ростом числа Рэлея при  $r=r_2^N$  автоколебания сменяются двухчастотным режимом. Предельные циклы  $\Gamma_{1,2}^N$  ( $N=4$  и  $5$ ) теряют устойчивость в результате выхода пары комплексно-сопряженных мультипликаторов  $\rho_{1,2}^N$  из единичного круга, потеря устойчивости происходит мягко. При  $\sigma=10$  критические числа Рэлея  $r_2^4 \cong 198$  и  $r_2^5 \cong 166$ , им соответствуют значения мультипликаторов  $\rho_{1,2}^4 \cong -0,463 \pm 0,886i$  и  $\rho_{1,2}^5 \cong -0,483 \pm 0,875i$ .

В случае  $N=3$  обнаружена зависимость характера потери устойчивости автоколебаний от числа Прандтля. Для  $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$ ,  $\sigma_1 \cong 7$ ,  $\sigma_2 \cong 15$  предельные циклы  $\Gamma_{1,2}^3$  с ростом  $r$  теряют устойчивость в результате бифуркации удвоения периода. При этом возникают устойчивые предельные циклы, с дальнейшим ростом  $r$  также теряющие устойчивость, но уже в

результате бифуркации рождения устойчивого инвариантного тора. Для остальных значений  $\sigma$  из интервала (6,22), в котором проводились расчеты, предельные циклы  $\Gamma_{1,2}^3$  с ростом  $r$  теряют устойчивость в результате выхода пары комплексно-сопряженных мультипликаторов из единичного круга. Таким образом, на критической кривой есть две точки, которым соответствуют предельные циклы  $\Gamma_{1,2}^3$  имеющие одновременно три мультипликатора на единичной окружности: пару комплексно-сопряженных и один, равный  $-1$ .

При тех же значениях параметров для  $N=4$  и  $5$  эти явления не наблюдаются. Вероятно, перечисленные бифуркации в высших приближениях имеют место для других значений  $\alpha$  и  $\sigma$ .

Автор благодарит В. И. Юдовича за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Герценштейн С. Я., Шмидт В. М. Нелинейное развитие и взаимодействие возмущения конечной амплитуды при конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя.— Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 1, с. 59–62.
2. Герценштейн С. Я., Шмидт В. М. Нелинейное взаимодействие конвективных волновых движений и возникновение турбулентности во вращающемся горизонтальном слое.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 2, с. 9–15.
3. Герценштейн С. Я., Родичев Е. Б., Шмидт В. М. Взаимодействие трехмерных волн во вращающемся горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу.— Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 3, с. 545–548.
4. McLaughlin J. B., Martin P. C. Transition to turbulence in a statically stressed fluid system.— Phys. Rev., Ser. A, Gen. Phys., 1975, v. 12, № 1, p. 186–203.
5. Любимов Д. В., Пугин Г. Ф., Чернагинский В. И. Конвекция в ячейке Хеле — Шоу при подогреве снизу.— Гидродинамика. Пермь, 1977, вып. 10, с. 3–14.
6. Sigg J. H. A generalized Lorenz system.— Commun. Math. Phys., 1978, v. 60, № 3, p. 193–204.
7. Рабинович М. И. Стохастические автоколебания и турбулентность.— Усп. физ. наук, 1978, т. 125, № 1, с. 123–168.
8. Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца.— В кн.: Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980, с. 317–335.
9. Шумова Л. В. Последовательное усложнение структуры течения в модели конвекции Карри.— В кн.: Структурная турбулентность. Новосибирск, 1982, с. 77–86.
10. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow.— J. Atmospheric Sci., 1963, v. 20, № 2, p. 130–141.
11. Marcus Ph. S. Effects of truncation in modal representations of thermal convection.— J. Fluid Mech., 1981, v. 103, p. 241–255.
12. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
13. Паклина Е. П., Слитинская С. К. О возникновении предельных циклов в системе Зальцмана — Лоренца.— Изв. Сев.-Кавказ. научн. центра высш. школы. Естеств. н., 1981, № 1, с. 30–32.
14. Нгуен Ван Хань. Об ответвлении предельных циклов от равновесий системы Лоренца. Ростов-на-Дону, 1981. 7 с. (Рукопись деп. в ВИНТИ, № 1742–81 Деп.)
15. Рощин Н. В. Опасные границы устойчивости в модели Лоренца.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 950–952.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
30.III.1983