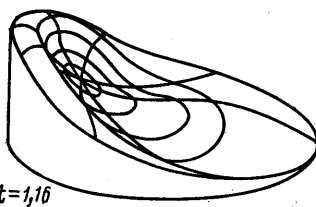


Фиг. 1



Фиг. 2

которое время движется как твердое тело. Жидкость натекает на стенку полости в виде вогнутого языка. Чем тоньше слой жидкости на дне полости, тем медленнее он утончается.

Описанный численный метод позволяет моделировать многие качественные явления, характерные для нелинейных колебаний, и легко обобщается на случай произвольной формы полости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
2. *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968, 532 с.
3. *Докучаев Л. В., Луковский И. А., Нариманов Г. С.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
4. *Moore R. E., Perko L. M.* Inviscid fluid flow in an accelerating cylindrical container. — J. Fluid Mech., 1965, v. 22, № 2, p. 305–320.
5. *Шагин В. М.* Динамика жидкости в коническом баке при переходе от малой весомости к значительной. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 6, с. 74–79.
6. *Иевлев И. И.* Воронкообразование при истечении жидкости из сферического сосуда. — Тр. Физ.-тех. ин-та низк. температур. Вып. 1. АН УССР, 1970, с. 146–156.
7. *Богоряд И. Б., Дружинин И. А.* Применение вариационного метода к расчету нелинейных колебаний жидкости в сосуде (Задача Коши). — Тр. 2-го семинара «Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью». Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1975, с. 40–46.
8. *Налимов В. И., Пуцначев В. В.* Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. Новосибирск, 1975. 174 с.

Томск

Поступила в редакцию  
24.XI.1982

УДК 533.6.011–1

### О ДВИЖЕНИИ ПОРШНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА ПРИ НАЛИЧИИ НАЧАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

УСТИНОВ М. Д.

Рассмотрена задача о движении поршня без начальной скорости под действием давления газа. В предположении, что градиент температуры является постоянной и достаточно малой величиной, получены формулы, дающие распределение газодинамических параметров в возмущенной области между поршнем и передним фронтом звуковой волны, распространяющейся по покоящемуся газу.

1. Пусть в бесконечной цилиндрической трубе в области  $r > 0$  (ось  $r$  параллельна образующей трубы) находится покоящийся газ, давление  $p_0$  которого постоянно, а плотность  $\rho$  изменяется по закону

$$\rho_0(r) = \frac{\rho_*}{1 + kr} \quad (1.1)$$

где  $\rho_*$  — плотность газа в сечении  $r=0$  и  $k$  — постоянная, имеющая размерность, обратную размерности длины. Если  $T_*$  — температура газа в сечении  $r=0$ , то из уравнения состояния  $p = \rho RT$  ( $R$  — газовая постоянная) найдем, что  $T = T_* \rho_* / \rho_0$ ,

т. е.  $|\text{grad } T| = |T_{*k}| = \text{const}$ . Следовательно, распределение плотности (1.1) соответствует случаю, когда градиент температуры, зависящей от  $r$ , является постоянным.

Предположим, что в сечении  $r=0$  расположен поршень массы  $m$  на единицу площади сечения (левее поршня — пустота), который в момент времени  $t=0$  начинает двигаться без начальной скорости и пустота) под действием давления газа. Рассмотрим задачу об определении закона движения поршня и течения газа в возмущенной области между поршнем и передним фронтом  $l$  звуковой волны, распространяющимся по покоящемуся газу с переменной скоростью  $a_0 = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$ .

Уравнения одномерного адиабатического движения идеального и совершенного газа позволяют ввести функции  $\tau(r, t)$ ,  $\xi(r, t)$  и  $\eta(r, t)$ , такие, что [1]

$$d\tau = \rho dr - \rho u dt = m dy, \quad d\xi = \rho u dr - (p + \rho u^2) dt = -m a_* dx$$

$$d\eta = u d\xi + \left( f v - \frac{1}{2} u^2 \right) d\tau = m a_*^2 dz, \quad a_*^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_*}$$

$$p = v^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad f(\tau) = \frac{p^{1/\gamma}}{(\gamma-1)\rho} \quad (1.2)$$

Здесь  $u$ ,  $p$ ,  $\rho$  — соответственно скорость, давление и плотность газа,  $r$  — геометрическая координата,  $t$  — время и  $\gamma = \text{const} > 1$  — отношение удельных теплоемкостей.

Нетрудно проверить, что функция  $z(x, y)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left[ \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial z}{\partial y} \right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \varphi(y) \left[ \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] = 0, \quad \varphi(y) = \frac{m f'(\tau)}{f(\tau)} \quad (1.3)$$

На линии  $l$ , где  $u=0$ ,  $p=p_0$ ,  $\rho=\rho_0(r)$  и  $dr=a_0(r)dt$ , имеем, используя (1.2) с учетом (1.1)

$$x = \frac{2}{\gamma \varepsilon} (e^{1/2 \gamma \varepsilon y} - 1), \quad z = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)\varepsilon} (e^{\varepsilon y} - 1), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\varphi(y) = \varepsilon = \text{const}, \quad \varepsilon = \frac{mk}{\rho_*} \quad (1.4)$$

На поршне  $L$ , который движется под действием давления газа со скоростью  $V(t)$

$$m \frac{dV}{dt} = -p, \quad V(0) = 0 \quad (1.5)$$

Принимая во внимание, что на поршне  $d\tau=0$ , и интегрируя (1.2) с учетом (1.5), найдем

$$y=0: \quad z = 1/2 x^2 \quad (1.6)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению решения уравнения (1.3), где  $\varphi(y)=\varepsilon$ , удовлетворяющего граничным условиям (1.4) и (1.6), причем линия  $l$  является характеристикой для (1.3).

2. Если  $\varepsilon=0$  (т. е.  $k=0$ ), то плотность покоящегося газа постоянна и течение газа в возмущенной области между поршнем  $L_0$  и передним фронтом  $l_0$  волны разрежения является простой волной [2].

Функция  $z(x, y)$  удовлетворяет в этом случае дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка [3], допускающему полный интеграл. Варьируя входящие в него произвольные постоянные с учетом условия (1.6), будем иметь, что при  $\varepsilon=0$

$$z = \frac{\gamma}{(\gamma+1)^2} \frac{[(\gamma+1)x+2]^2}{(\gamma+1)y+2\gamma} - \frac{2x}{\gamma+1} + \frac{2y}{\gamma^2-1} - \frac{2}{(\gamma+1)^2} = z_*(x, y) \quad (2.1)$$

Впрочем, достаточно положить  $\varepsilon=0$  в формуле (2.7) работы [3], чтобы получить выражение для  $z_*(x, y)$ . При этом условия

$$x = \frac{1}{\gamma} y: \quad z = \frac{y}{\gamma(\gamma-1)}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

получаемые из (1.4) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , автоматически выполняются, поскольку упомянутое выше уравнение в частных производных первого порядка является уравнением простой волны.

Предполагая, что безразмерный параметр  $\varepsilon$ , определяемый последним из равенств (1.4), является малым, будем искать решение сформулированной задачи при  $\varepsilon \neq 0$

в форме

$$z = z_*(x, y) + \varepsilon w(x, y) \quad (2.3)$$

Линеаризация (1.3) приводит к следующему уравнению для  $w(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z_*}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left[ \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left( \frac{\partial z_*}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial z_*}{\partial y} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + \left( \frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{\partial z_*}{\partial x} \frac{\partial^2 z_*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z_*}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\partial^2 z_*}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} - \left[ \frac{\partial z_*}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z_*}{\partial x} \right)^2 \right] w = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнение линии  $l$  (фронта волны разрежения) в плоскости  $(x, y)$  при малом  $\varepsilon$  нетрудно получить из точного уравнения (1.4)

$$y = \gamma x - \frac{1}{4} \varepsilon \gamma^2 x^2 \quad (2.5)$$

Условия (2.2) для функции  $w(x, y)$  на характеристике  $y = \gamma x$ , если учесть (2.1), (2.3) и (2.5), принимают вид

$$y = \gamma x: \quad w = \frac{\gamma x^2}{2(\gamma-1)}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\gamma x^2}{(\gamma+1)x+2} \quad (2.6)$$

Нетрудно проверить, что на поршне функция  $w$  обращается в нуль, т. е.  $w(x, 0) = 0$ .

Используя (2.4), введем характеристические переменные  $\alpha$  и  $\beta$  для уравнения (2.4) и преобразуем его к следующему виду:

$$\alpha = \frac{(\gamma+1)x+2}{(\gamma+1)y+2\gamma}, \quad \beta = \left( \frac{2}{\gamma-1} - \alpha \right) \left( y + \frac{2\gamma}{\gamma+1} \right)^{2-(\gamma-1)/(\gamma+1)} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{3\gamma-1}{2(\gamma-1)} \left( \frac{2}{\gamma-1} - \alpha \right)^{-1} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{\gamma}{4(\gamma-1)} \left( \frac{2}{\gamma-1} - \alpha \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \beta^{-2\gamma/(\gamma-1)} w = 0 \quad (2.8)$$

Общее решение уравнения (2.8)

$$w(\alpha, \beta) = \frac{\gamma(\gamma-1)}{2(3\gamma-1)(\gamma+1)} \left( \frac{2}{\gamma-1} - \alpha \right)^{-2\sigma} \beta^{2\sigma+2} F(\alpha) + \Phi(\beta) \left( \frac{2}{\gamma-1} - \alpha \right)^{-\sigma}, \quad (2.9)$$

$$\sigma = -\frac{3\gamma-1}{2(\gamma-1)}$$

где  $F$  и  $\Phi$  — произвольные функции своих аргументов, которые определяются из граничных условий (2.6) и  $w(x, 0) = 0$ . При этом, поскольку линия  $y = \gamma x$  является характеристикой уравнения (2.4), достаточно удовлетворить первому условию (2.6) на этой линии и второму условию (2.6) в одной точке (например, в точке  $x=0$ ).

Окончательно имеем следующее выражение для  $w(x, y)$ :

$$\begin{aligned} w(x, y) = \frac{\gamma(\gamma+1)}{2(\gamma-1)(3\gamma-1)} \left[ \frac{2(y+1) - (\gamma-1)x}{(\gamma+1)y+2\gamma} \right]^2 \left( y^2 + \frac{4\gamma y}{\gamma+1} \right) \left\{ 1 + 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{(\gamma+1)y+2\gamma}{2\gamma(y+1) - \gamma(\gamma-1)x} \right]^{(3\gamma-1)/2(\gamma-1)} \right\} - \frac{2\gamma y}{\gamma^2-1} \frac{2(y+1) - (\gamma-1)x}{(\gamma+1)y+2\gamma} \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. Формулы (2.1), (2.3), (2.10) дают решение поставленной выше задачи. Соотношения (1.2) позволяют найти в параметрическом виде газодинамические параметры в возмущенной области.

Закон движения поршня ( $y=0$ ) определяется равенствами

$$\frac{p_0 t}{m a_*} = A(s) + \varepsilon \psi(s), \quad \frac{p_0 r}{m a_*^2} = B(s) + \varepsilon \omega(s)$$

$$A(s) = -\frac{2}{\gamma-1} \int_1^s \Gamma(s) ds, \quad B(s) = \frac{4}{(\gamma-1)^2} \int_1^s \Gamma(s) (1-s) ds$$

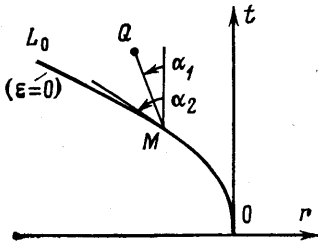
$$\psi(s) = \frac{2\gamma}{(\gamma-1)^2} \int_1^s \Gamma(s) \delta(s) ds, \quad \omega(s) = -\frac{4\gamma}{(\gamma-1)^3} \int_1^s \Gamma(s) \delta(s) (1-s) ds$$

$$\Gamma(s) = s^{-2\gamma/(\gamma-1)}, \quad \delta(s) = \frac{2\gamma}{3\gamma-1} \left[ 1 + 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} s^{-(3\gamma-1)/2(\gamma-1)} \right] - \frac{2\gamma}{\gamma+1} s^{-1},$$

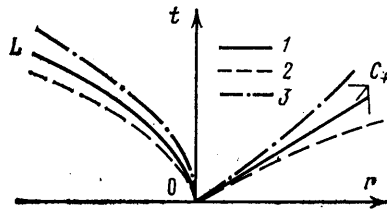
$$s = 1 - \frac{\gamma-1}{2} x$$

и переменная  $s$  убывает от 1 (в начальный момент времени  $t=0$ ) до 0 (при  $t \rightarrow +\infty$ ). Нетрудно показать, что  $\delta(s)$  является положительной на интервале  $(0, 1)$  и, следовательно,  $\psi(s) < 0$  и  $\omega(s) > 0$  на  $(0, 1)$ .

Пусть  $M$  — точка на траектории поршня  $L_0$  ( $\varepsilon=0$ , фиг. 1),  $Q$  — точка на возмущенной траектории  $L$  ( $\varepsilon \neq 0$ ), соответствующие произвольному значению  $s$  ( $0 < s < 1$ ).



Фиг. 1



Фиг. 2

Если  $\alpha_1$  — угол, образуемый прямой  $MQ$  с осью  $t$ , и  $\alpha_2$  — угол между касательной к  $L_0$  в точке  $M$  с осью  $t$ , то

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = - \frac{\omega(s)}{\psi(s)}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{dB(s)}{dA(s)} = 2 \frac{1-s}{\gamma-1}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2 = - \frac{4\gamma}{\psi(s)(\gamma-1)^3} \left[ (1-s) \int_1^s \Gamma(s)\delta(s) ds - \int_1^s \Gamma(s)\delta(s)(1-s) ds \right]$$

Применяя обобщенную теорему о среднем ко второму интегралу, будем иметь

$$\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2 = - \frac{4\gamma}{(\gamma-1)^3 \psi(s)} (s_* - s) \int_1^s \Gamma(s)\delta(s) ds < 0 \quad (s < s_* < 1)$$

Таким образом, при положительном начальном градиенте температуры ( $\varepsilon > 0$ ) кривая  $L$  расположена ниже кривой  $L_0$ , т. е. поршень выталкивается газом быстрее, чем при ( $\varepsilon = 0$ ). При отрицательном начальном градиенте температуры ( $\varepsilon < 0$ ) поршень движется медленнее, чем при  $\varepsilon = 0$  (фиг. 2, кривые 1–3 соответственно для  $\varepsilon = 0, \varepsilon > 0, \varepsilon < 0$ ).

Следует отметить, что полученными выше формулами можно пользоваться не во всей зоне возмущенного течения, а лишь в той ее части, где  $(\varepsilon x)^2$  и  $(\varepsilon y)^2$  малы по сравнению с единицей.

Это обстоятельство связано с особенностью распределения начальной плотности (1.1), соответствующего постоянному градиенту температуры. Если, например, начальная плотность покоящегося газа  $\rho_0(r)$  распределена по закону

$$\rho_0(r) = \rho_* [1 + \varepsilon h(y)], \quad y = \rho_* r / m$$

где  $h(y)$  — ограниченная функция, интегрируемая на  $(0, \infty)$ , и, кроме того,  $\varepsilon^2 h^2(y) \ll 1$ , то получаемое рассмотренным выше методом решение (в виде квадратур) можно использовать всюду в области возмущенного течения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.
2. Станюкович К. П. Неустойчившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.
3. Устинов М. Д. Приближенное решение неавтономной задачи о движении поршня после кратковременного удара. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 6, с. 167–171.

Минск

Поступила в редакцию  
6.I.1983