

Отметим, что амплитуда поля на фронте убывает в $t^{1/2}$ медленнее, чем предписывается формулой (2).

2. Близкая задача рассматривалась в [2], где изучалась поверхностная волна, возбужденная поднятием участка поверхности дна радиуса a (подводным землетрясением). Если участок дна мгновенно поднимается на высоту Z , то (см. (6) из [2])

$$\eta(r, t) = aZ \int_0^{\infty} \frac{J_1(ka) J_0(kr)}{\operatorname{ch} kH} \cos \omega(k) t dk \quad (6)$$

При $r \approx c_0 t$, $t \rightarrow \infty$, заменяя функцию $I_0(kr)$ ее асимптотикой, получаем

$$\begin{aligned} \eta(r, t) = & \frac{aZ}{2(2\pi r)^{1/2}} \left(\int_0^{\infty} \frac{J_1(ka)}{k^{1/2} \operatorname{ch} kH} e^{i(kr - \omega(k)t - \pi/4)} dk + \right. \\ & \left. + \int_0^{\infty} \frac{J_1(ka)}{k^{1/2} \operatorname{ch} kH} e^{i(-kr + \omega(k)t + \pi/4)} dk \right) \approx \frac{V e^{-\pi i/4}}{4(2\pi r)^{1/2}} \int_L^{\infty} e^{i((r-c_0 t)k + 1/2 \sqrt{t} k^3)} k^{1/2} dk \end{aligned} \quad (7)$$

где $V = \pi a^2 Z$. В работе [2] дается формула для смещения в поверхностной волне в виде ряда по степеням

$$\frac{r - c_0 t}{g^{1/2} H^2 / c_0 t^{1/2}}$$

(см. (15) из [2]), полученного разложением $e^{i(r-c_0 t)k}$ под знаком интеграла в (7) в ряд и почленным интегрированием. В силу (4) ответ можно дать в замкнутой форме

$$\eta(r, t) = -\frac{V}{(\gamma r t)^{1/2}} v(\xi) v'(\xi), \quad \xi = \frac{r - c_0 t}{g^{1/2} H^2 / c_0 (2t)^{1/2}}$$

Авторы благодарны Ю. Л. Газаряну за интерес, проявленный к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ле Блон П., Майсек Л. А. Волны в океане. Т. 2. М.: Мир, 1981. 365 с.
2. Газарян Ю. Л. О поверхностных волнах в океане, возбуждаемых подводными землетрясениями. — Акуст. ж., 1955, т. 1, вып. 3, с. 203—217.
3. Грикуров В. Э. Явление перекрытия приакустических зон в приповерхностном волноводе и связанное с ним обобщение лучевого метода. — Изв. вузов. Радиофизика, т. 23, № 9, с. 1038—1045.

Москва

Поступила в редакцию
6.XII.1982

УДК 532.595

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ В ПОДВИЖНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОЛОСТИ

ЧАХЛОВ С. В.

Задача о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью в полости твердого тела наиболее полно изучена в линейной постановке [1, 2]. В нелинейной постановке задача решалась методом малого параметра [3] и численными методами [4—7]. Но ограничения, присущие этим методам, не позволяют учесть одновременно большую величину и трехмерный характер перемещений жидкости в подвижной полости.

В данной работе предлагается численный метод для расчета таких движений жидкости. Приводятся результаты численных расчетов для сферической и цилиндрической полостей.

1. Рассматривается полость твердого тела, ось симметрии которой совмещена с осями z цилиндрической (ρ, z, β) и декартовой (x, y, z) связанных систем координат. Безвихревое движение идеальной несжимаемой жидкости в этой полости, совершающей движение в горизонтальной плоскости, определяется из решения краевой задачи [3]

$$\Delta\varphi=0, \quad (\rho, z, \beta) \in Q(t), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=0, \quad (\rho, z, \beta) \in S(t) + L(t) \quad (1.1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \quad (\rho, z, \beta) \in \Sigma(t) + L(t) \quad (1.2)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 - g_x\rho \cos\beta - g_y\rho \sin\beta - g_z(z-h), \quad (\rho, z, \beta) \in \Sigma(t) + L(t) \quad (1.3)$$

$$\varphi(\rho, z, \beta, 0) = \varphi^0(\rho, z, \beta) \quad (\rho, z, \beta) \in Q^0, \quad \Sigma(0) = \Sigma^0, \quad L(0) = L^0 \quad (1.4)$$

Здесь $\varphi(\rho, z, \beta, t)$ — потенциал скорости жидкости; t — время; ν — вектор нормали, внешней по отношению к объему $Q(t)$, занятому жидкостью; $L(t)$ — линия трехфазного контакта газ — жидкость — твердое тело; $S(t) + L(t)$ — смоченная поверхность полости; $\Sigma(t) + L(t)$ — свободная поверхность жидкости; $(z-h)$ — отклонение свободной поверхности от ее невозмущенного положения; g_x, g_y, g_z — компоненты вектора ускорения поля массовых сил в декартовой системе координат.

Ставится задача определить форму жидкого объема и распределение по нему потенциала для $t > 0$.

Вводятся безразмерные величины

$$\rho_* = \frac{\rho}{R}, \quad z_* = \frac{z}{R}, \quad h_* = \frac{h}{R}, \quad \alpha_x = \frac{g_x}{g_z}, \quad \alpha_y = \frac{g_y}{g_z}, \quad t_* = \sqrt{\frac{g_z}{R}} t, \quad (1.5)$$

$$\varphi_* = \frac{\varphi}{\sqrt{g_z R^3}}$$

где R — характерный размер. С учетом (1.5) динамическое граничное условие (1.3) принимает вид

$$\frac{d\varphi_*}{dt_*} = \frac{1}{2} (\nabla\varphi_*)^2 - \alpha_x\rho_* \cos\beta - \alpha_y\rho_* \sin\beta - z_* + h_* \quad (1.6)$$

Остальные условия задачи в безразмерной форме сохраняют прежний вид. Это позволяет в дальнейшем подразумевать все величины безразмерными и опускать индекс *.

В настоящее время существование решения сформулированной выше краевой задачи доказано лишь для некоторых видов областей Q^0 и только для начального промежутка времени [8].

2. Гармоническая функция φ полностью определяется ее значениями на границе области, поэтому можно понизить размерность задачи (1.1)–(1.4), если рассматривать только границу области Q . Предлагаемый метод решения предусматривает переход от всего множества граничных точек области Q к конечному числу таких точек

$$\begin{aligned} \Sigma_i &= \Sigma(\rho_i, z_i, \beta_i), \quad i=1, 2, \dots, I & (2.1) \\ S_j &= S(l_j, \beta_j) = S(r(l_j), \zeta(l_j), \beta_j), \quad j=1, 2, \dots, J \\ L_k &= L(l_k, \beta_k) = L(r(l_k), \zeta(l_k), \beta_k), \quad k=1, 2, \dots, K \\ \rho &= r(l), \quad z = \zeta(l) & (2.2) \end{aligned}$$

где (2.2) — уравнения образующей полости вращения, l — длина дуги образующей. В этом случае задача сводится, во-первых, к определению траекторий граничных точек и потенциала в точках Σ_i и L_k и, во-вторых, к аппроксимации потенциала внутри области по его значениям в точках Σ_i и L_k и по его нормальной производной, равной нулю в точках L_k и S_j .

Пусть заданы начальные координаты точек Σ_i, S_j, L_k и значения потенциала в точках Σ_i и L_k (аналог начальных условий (1.4))

$$\rho_i(0) = \rho_i^0, \quad z_i(0) = z_i^0, \quad \beta_i(0) = \beta_i^0, \quad \varphi(\rho_i^0, z_i^0, \beta_i^0, 0) = \varphi_i^0, \quad i=1, 2, \dots, I \quad (2.3)$$

$$l_j(0) = l_j^0, \quad \beta_j(0) = \beta_j^0 \quad j=1, 2, \dots, J$$

$$l_k(0) = l_k^0, \quad \beta_k(0) = \beta_k^0, \quad \varphi(r(l_k^0), \zeta(l_k^0), \beta_k^0, 0) = \varphi_k^0, \quad k=1, 2, \dots, K$$

Для определения этих величин при $t > 0$ решается задача Коши для системы из $4I + 2J + 3K$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \frac{\partial\varphi(\Sigma_i, t)}{\partial\rho}, \quad \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial\varphi(\Sigma_i, t)}{\partial z}, \quad \frac{d\beta_a}{dt} = \frac{1}{\rho_a^2} \frac{\partial\varphi(P_a, t)}{\partial\beta}, \quad a=i, j, k$$

$$\frac{dl_b}{dt} = \frac{dr(l_b)}{dl} \frac{\partial\varphi(P_b, t)}{\partial\rho} + \frac{d\xi(l_b)}{dl} \frac{\partial\varphi(P_b, t)}{\partial z}, \quad b=j, k \quad (2.4)$$

$$\frac{d\varphi_c}{dt} = \frac{1}{2} [\nabla\varphi(P_c, t)]^2 - \alpha_x \rho_c \cos \beta_c - \alpha_y \rho_c \sin \beta_c - z_c + h, \quad c=i, k \quad (2.5)$$

$$P_i = \Sigma_i, \quad P_j = S_j, \quad P_k = L_k, \quad \rho_k = r(l_k), \quad z_k = \xi(l_k)$$

Уравнения (2.4) следуют из кинематического граничного условия (1.2). Уравнения (2.5) — это динамическое условие (1.3), записанное для точек Σ_i и L_k .

Для интегрирования системы (2.4), (2.5) применяется метод Рунге — Кутты второго порядка с постоянным временным шагом.

При интегрировании системы следует помнить, что вычисление правых частей уравнений (2.4) и (2.5) для каждого момента времени $t = \tau$ требует определения производных от потенциала по пространственным переменным в этот момент времени, что в свою очередь требует информации о распределении потенциала внутри области $Q(\tau)$. Значение потенциала Φ внутри области находится из решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi(\rho, z, \beta) = 0, \quad (\rho, z, \beta) \in Q(\tau), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0, \quad (\rho, z, \beta) \in S(\tau) + L(\tau) \quad (2.6)$$

$$\Phi = \varphi^\tau, \quad (\rho, z, \beta) \in \Sigma(\tau) + L(\tau)$$

с помощью метода коллокаций. В качестве базисных функций выбираются гармонические полиномы

$$C_n^m(\rho, z, \beta) = W_n^m \cos m\beta, \quad S_n^m(\rho, z, \beta) = W_n^m \sin m\beta \quad (2.7)$$

$$W_n^m(\rho, z) = (\rho^2 + z^2)^{n/2} P_n^m(-z/\sqrt{\rho^2 + z^2}), \quad m=0, 1, \dots, M; \quad n=m, \dots, N$$

где P_n^m — присоединенная функция Лежандра.

Точками коллокации служат уже ранее выбранные граничные точки, причем в точках L_k требуется выполнение обоих граничных условий из (2.6). Производные потенциала по пространственным переменным получаются почленным дифференцированием полученного решения.

Точность решения исходной краевой задачи (1.1) — (1.4) контролируется по точности выполнения законов сохранения массы и энергии движущейся жидкости. Оказывается, что точность решения улучшается, если после каждого временного шага заменять значения потенциала φ_c , рассчитанные по формулам (2.5), аппроксимирующими их значениями $\Phi(P_c)$. Такая замена предотвращает накопление ошибок, возникающих при решении краевой задачи (2.6).

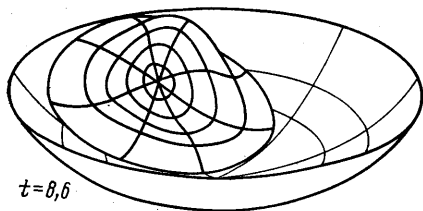
Расчет задачи Коши ведется до тех пор, пока масса и полная энергия жидкости сохраняются с относительной погрешностью не более 2%. Анализ численных результатов показал, что при этом в точках коллокации граничные условия выполняются с погрешностью в 0.5%. Так как число точек коллокации почти в 4 раза превышает число базисных функций, то граничные условия выполняются с такой же погрешностью и в произвольной граничной точке.

3. Расчеты проводились на ЭЦВМ БЭСМ-6 для сферических, цилиндрических и конических полостей. Время расчета одного варианта составляет от 30 до 120 мин и прямопропорционально числу шагов по времени и количеству базисных функций F .

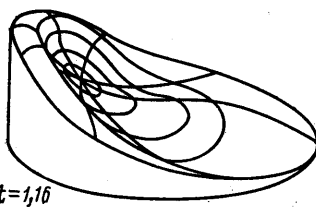
На фиг. 1 показана форма свободной поверхности жидкости в сферической полости, заполненной на глубину $h=0,1$ и совершающей движение по окружности с центростремительным ускорением, равным $0,2 g_z$, и с частотой, равной единице, т. е. при $\alpha_x = 0,2 \sin t$, $\alpha_y = 0,2 \cos t$. Расчеты проведены при $I=J=84$, $K=16$, $N=7$, $M=3$, $F=44$. Результаты расчетов показывают, что если в начальный момент времени жидкость покоится на дне полости, то в дальнейшем вплоть до значений амплитуд смещений свободной поверхности $0,3-0,4$ от радиуса невозмущенной свободной поверхности жидкость движется практически без изменения формы, а при больших амплитудах смещений появляются черты нелинейных колебаний: свободная поверхность деформируется в радиальном направлении, возникают мелкие волны.

На фиг. 2 показана форма поверхности жидкости в цилиндрическом сосуде, который начинает двигаться поступательно с постоянным ускорением $g_y = 0,5 g_z$. Толщина слоя жидкости равна $0,1$ диаметра сосуда, $\alpha_x = 0$, $K=13$, $I=J=87$, $N=11$, $M=5$, $F=57$.

На основании этого примера можно выделить следующие особенности движения жидкости в цилиндрической полости. Центральная часть жидкого объема не-



Фиг. 1



Фиг. 2

которое время движется как твердое тело. Жидкость натекает на стенку полости в виде вогнутого языка. Чем тоньше слой жидкости на дне полости, тем медленнее он утончается.

Описанный численный метод позволяет моделировать многие качественные явления, характерные для нелинейных колебаний, и легко обобщается на случай произвольной формы полости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
2. *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968, 532 с.
3. *Докучаев Л. В., Луковский И. А., Нариманов Г. С.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
4. *Moore R. E., Perko L. M.* Inviscid fluid flow in an accelerating cylindrical container. — J. Fluid Mech., 1965, v. 22, № 2, p. 305–320.
5. *Шагин В. М.* Динамика жидкости в коническом баке при переходе от малой весомости к значительной. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 6, с. 74–79.
6. *Иевлев И. И.* Воронкообразование при истечении жидкости из сферического сосуда. — Тр. Физ.-тех. ин-та низк. температур. Вып. 1. АН УССР, 1970, с. 146–156.
7. *Богоряд И. Б., Дружинин И. А.* Применение вариационного метода к расчету нелинейных колебаний жидкости в сосуде (Задача Коши). — Тр. 2-го семинара «Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью». Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1975, с. 40–46.
8. *Налимов В. И., Пугачев В. В.* Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. Новосибирск, 1975. 174 с.

Томск

Поступила в редакцию
24.XI.1982

УДК 533.6.011–1

О ДВИЖЕНИИ ПОРШНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА ПРИ НАЛИЧИИ НАЧАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

УСТИНОВ М. Д.

Рассмотрена задача о движении поршня без начальной скорости под действием давления газа. В предположении, что градиент температуры является постоянной и достаточно малой величиной, получены формулы, дающие распределение газодинамических параметров в возмущенной области между поршнем и передним фронтом звуковой волны, распространяющейся по покоящемуся газу.

1. Пусть в бесконечной цилиндрической трубе в области $r > 0$ (ось r параллельна образующей трубы) находится покоящийся газ, давление p_0 которого постоянно, а плотность ρ изменяется по закону

$$\rho_0(r) = \frac{\rho_*}{1 + kr} \quad (1.1)$$

где ρ_* — плотность газа в сечении $r=0$ и k — постоянная, имеющая размерность, обратную размерности длины. Если T_* — температура газа в сечении $r=0$, то из уравнения состояния $p = \rho RT$ (R — газовая постоянная) найдем, что $T = T_* \rho_* / \rho_0$,