УДК 532.591

ПОЛЕ ВБЛИЗИ ФРОНТА ВОЛНЫ В ЗАДАЧЕ КОШИ — ПУАССОНА

БОРОВИКОВ В. А., КЕЛЬБЕРТ М. Я.

В работе рассматривается асимптотика функции Грина задачи Коши – Пуассона в дальней зоне вблизи фронта волны, т. е. при $r\approx c_0t$, где $c_0=\sqrt{gH}$ – максимальная групповая скорость поверхностной волны. Показано, что приведенное в [1] решение этой задачи ошибочно, и дана правильная асимптотика, выражающаяся через квадрат функции Эйри.

1. Классической задаче Коши – Пуассона о распространении гравитационных волн от начального возмущения поверхности жидкости посвящена обширная литература. В частности, в [1] исследуется форма фронта волны в дальней зоне. При $kr\gg1$ смещение поверхности $\eta(r,\ t)$ дается формулой (см. (50.17) из [1])

$$\eta(r,t)=\frac{1}{(2\pi r)^{1/2}}\int\limits_0^\infty F(k)\sin\left(kr+\frac{\pi}{4}-\omega(k)t\right)k^{1/2}\,dk$$

$$F(k)=\int\limits_0^\infty \eta(r,0)J_0(kr)r\,dr. \tag{1}$$

Асимптотике функции Грина задачи Коши – Пуассона соответствует $F(k)\equiv1$. Отметим, что

$$\max_k \omega'(k)=\omega'(0)$$

и скорость фронта волны на поверхности бассейна глубины H равна $c_0=\sqrt{gH}$. Для получения асимптотики интеграла (1) в окрестности фронта $r=c_0t$ в [1] используется метод стационарной фазы, что приводит к выражению через функцию Эйри $v(\xi)$

$$\eta(r,t)=\frac{\pi}{r}\,\{\lim_{k\to0}F(k)\sqrt{k}\}\left(\frac{2}{\gamma t}\right)^{1/3}v\left(\frac{2^{1/3}(r-c_0t)}{(\gamma t)^{1/3}}\right),\qquad \gamma=-\omega''(0)=c_0H^2 \tag{2}$$

(см. (50.27) из [1]). Однако $\lim\limits_{k\to0}F(k)\sqrt{k}=0$ и приведенное выражение ошибочно, поскольку стационарная точка $k=0$ является точкой ветвления внеэкспоненциального выражения.

Чтобы найти правильное выражение для асимптотики $\eta(r,\ t)$, продолжим дисперсионную кривую $\omega(k)=(gk\operatorname{th}kH)^{1/2}$ при $k<0$ нечетным образом и запишем интеграл (1) в виде

$$\eta(r,t)=\frac{e^{-\pi i/4}}{2(2\pi r)^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{ikr-i\omega(k)t}k^{1/2}\,dk$$

Разлагая фазовую функцию в ряд в окрестности $k=0$, получаем при $r\approx c_0t$, $t\to\infty$

$$\eta(r,t)\approx\frac{e^{-\pi i/4}F(0)}{(\pi\gamma rt)^{1/2}}\int\limits_L e^{i(\xi_1u+u^3/3)}u^{1/2}\,du=$$

$$=\frac{e^{-3\pi i/4}F(0)}{(\pi\gamma rt)^{1/2}}\,\frac{d}{d\xi_1}\int\limits_L e^{i(\xi_1u+u^3/3)}\frac{du}{u^{1/2}},\qquad \xi_1=\frac{2^{1/3}(r-c_0t)}{(\gamma t)^{1/3}} \tag{3}$$

где контур L деформирован в область $\arg u\in(0,\ \pi/3)\cup(2\pi/3,\ \pi)$. Подобные интегралы возникали в ряде задач теории волн (см. [2–3]). Как показано, например, в [3]

$$\int\limits_L e^{i(\xi_1u+u^3/3)}\frac{du}{u^{1/2}}=2^{5/3}\pi^{3/2}e^{-\pi i/4}v^2(2^{-2/3}\xi_1) \tag{4}$$

В силу (3), (4) переход от области излучения волны ($r<c_0t$) к области, в которой поле экспоненциально мало ($r>c_0t$), описывается формулой

$$\eta(r,t)=-\frac{4\pi F(0)}{(\gamma rt)^{1/2}}\,v(\xi)v'(\xi),\qquad \xi=\frac{r-c_0t}{(2\gamma t)^{1/3}} \tag{5}$$

Отметим, что амплитуда поля на фронте убывает в $t^{1/3}$ медленнее, чем предписывается формулой (2).

2. Близкая задача рассматривалась в [2], где изучалась поверхностная волна, возбужденная поднятием участка поверхности дна радиуса a (подводным землетрясением). Если участок дна мгновенно поднимается на высоту Z, то (см. (6) из [2])

$$\eta(r,t)=aZ\int\limits_0^\infty \frac{J_1(ka)J_0(kr)}{\operatorname{ch} kH}\cos\omega(k)t\,dk \tag{6}$$

При $r\approx c_0t$, $t\to\infty$, заменяя функцию $I_0(kr)$ ее асимптотикой, получаем

$$\eta(r,t)=\frac{aZ}{2(2\pi r)^{1/2}}\left(\int\limits_0^\infty \frac{J_1(ka)}{k^{1/2}\operatorname{ch} kH}e^{i(kr-\omega(k)t-\pi/4)}\,dk+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^\infty \frac{J_1(ka)}{k^{1/2}\operatorname{ch} kH}e^{i(-kr+\omega(k)t+\pi/4)}\,dk\right)\approx\frac{Ve^{-\pi i/4}}{4(2\pi r)^{1/2}}\int\limits_L e^{i((r-c_0t)k+{}^1/_6\gamma tk^3)}k^{1/2}\,dk \tag{7}$$

где $V=\pi a^2Z$. В работе [2] дается формула для смещения в поверхностной волне в виде ряда по степеням

$$\frac{r-c_0t}{g^{1/6}H^{5/6}t^{1/3}}$$

(см. (15) из [2]), полученного разложением $e^{i(r-c_0t)k}$ под знаком интеграла в (7) в ряд и почленным интегрированием. В силу (4) ответ можно дать в замкнутой форме

$$\eta(r,t)=-\frac{V}{(\gamma rt)^{1/2}}v(\xi)v'(\xi),\qquad \xi=\frac{r-c_0t}{g^{1/6}H^{5/6}(2t)^{1/3}}$$

Авторы благодарны Ю. Л. Газаряну за интерес, проявленный к настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ле Блон П., Майсек Л. А.* Волны в океане. Т. 2. М.: Мир, 1981. 365 с.
2. *Газарян Ю. Л.* О поверхностных волнах в океане, возбуждаемых подводными землетрясениями.– Акуст. ж., 1955, т. 1, вып. 3, с. 203–217.
3. *Грикуров В. Э.* Явление перекрытия прикаустических зон в приповерхностном волноводе и связанное с ним обобщение лучевого метода.– Изв. вузов. Радиофизика, т. 23, № 9, с. 1038–1045.

Москва

Поступила в редакцию
6.XII.1982

УДК 532.595

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ В ПОДВИЖНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОЛОСТИ

ЧАХЛОВ С. В.

Задача о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью в полости твердого тела наиболее полно изучена в линейной постановке [1, 2]. В нелинейной постановке задача решалась методом малого параметра [3] и численными методами [4–7]. Но ограничения, присущие этим методам, не позволяют учесть одновременно большую величину и трехмерный характер перемещений жидкости в подвижной полости.

В данной работе предлагается численный метод для расчета таких движений жидкости. Приводятся результаты численных расчетов для сферической и цилиндрической полостей.