МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1984

УДК 538.3–538.4

ОБ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ИДЕАЛЬНОЙ СРЕДЫ

ТАРАПОВ И. Е.

На основе представлений типа Клебша найдены интегралы гидродинамических уравнений для намагничивающихся сред типа интегралов Бернулли и Коши – Лагранжа в гидродинамике.

Уравнения движения и уравнение энергии изотропно намагничивающейся среды имеют следующий вид [1]:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\nabla\left(p+\psi^{(\rho)}\right)+M\nabla H+\frac{1}{4\pi}[\operatorname{rot}\mathbf{H},\mathbf{B}]+\operatorname{div}\tau \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho U'\right)=-\operatorname{div}\left\{\mathbf{v}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho U'+p'-\frac{HB}{4\pi}\right)+\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E},\mathbf{H}]-\lambda\nabla T-\mathbf{v}\cdot\tau\right\} \tag{2}$$

$$U'=U+U^e=U+\frac{HB}{4\pi\rho}-\frac{H^2}{8\pi\rho}-\frac{\psi^{(T)}}{\rho};\quad p'=p+p^e=p+\frac{H^2}{8\pi}+\psi^{(\rho)}$$

$$\mathbf{M}=\frac{\mu-1}{4\pi}\mathbf{H}=\mathbf{M}(\rho,T,H);\quad \psi^{(T)}=-T^2\int\limits_0^H\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{M}{T}\right)dH$$

$$\psi^{(\rho)}=-\rho^2\int\limits_0^H\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{M}{\rho}\right)dH$$

Здесь τ – тензор вязких напряжений; U', p' – полная внутренняя энергия и давление среды; $\mathbf{M}$ – намагниченность среды; $\psi^{(T)}$, $\psi^{(\rho)}$ – слагаемые, учитывающие магнитокалорические и магнитострикционные эффекты; $\mathbf{B}=\mu(\rho,T,H)\mathbf{H}$ – магнитная индукция.

В случае идеальной среды, когда можно пренебречь силами вязкости и теплопроводностью и считать среду идеально проводящей и намагничивающейся, уравнение энергии (2) может быть получено как следствие трех уравнений: уравнения движения (1), уравнения непрерывности и уравнения сохранения полной энтропии S' в каждой частице

$$S'=S+S^e=S+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^H\frac{\partial\mu}{\partial T}H\,dH$$

Поэтому в дальнейшем, рассматривая модель идеальной среды, будем говорить об интегралах уравнения движения (1), которое можно записать в виде

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}-[\mathbf{v},\operatorname{rot}\mathbf{v}]=-\nabla\left(\frac{v^2}{2}+U'+\frac{p'}{\rho}-\frac{HB}{4\pi\rho}\right)+T\nabla S'+\frac{1}{4\pi\rho}[\operatorname{rot}\mathbf{H},\mathbf{B}] \tag{3}$$

В случае нестационарного движения для получения интегралов (3) приходится делать дополнительные довольно сильные предположения (движение безвихревое $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=0$, лоренцева сила имеет потенциал и др.). Ясно, что эти условия достаточны. Поэтому, вообще говоря, возможны интегралы, когда они не выполнены — об этом речь будет идти дальше.

Если движение стационарно ($\partial\mathbf{v}/\partial t=0$), то из (3) можно получить всего два типа интегралов, существующих вдоль линий тока при магнитном поле, либо параллельном, либо перпендикулярном, скорости в каждой точке.

Действительно, если магнитные силовые линии совпадают с линиями тока ($\mathbf{v}\|\mathbf{H}$), то из (3) вдоль любой линии имеем

$$\frac{v^2}{2}+U+\frac{p}{\rho}+\frac{\psi^{(\rho)}-\psi^{(T)}}{\rho}=C(L) \tag{4}$$

где постоянная $C(L)$ зависит от линии, вдоль которой берется интеграл.

Если магнитные силовые линии ортогональны к линиям тока в каждой точке потока ($\mathbf{v}\perp\mathbf{H}$), то из (3) получим

$$\frac{V^2}{2}+U+\frac{p}{\rho}+\frac{\psi^{(\rho)}-\psi^{(T)}}{\rho}+\frac{BH}{4\pi\rho}=C(L) \tag{5}$$

При этом учтено, что из уравнений непрерывности и индукции в стационарном потоке следует $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B}/\rho=(\mathbf{B}/\rho\nabla)\mathbf{v}$, так что при интегрировании вдоль линии тока при $\mathbf{v}\perp\mathbf{B}$ получаем

$$\int\limits_L\left\{\nabla\left(\frac{BH}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}[\mathrm{rot}\,\mathbf{H},\mathbf{B}]\right\}dL=\int\limits_L\left\{(\mathbf{v}\nabla)\left(\frac{\mathbf{BH}}{\rho}\right)+\frac{\mathbf{v}}{\rho}[\mathrm{rot}\,\mathbf{H},\mathbf{B}]\right\}\frac{dL}{V}=$$

$$=\int\limits_L\frac{\mathbf{B}}{\rho}\nabla(\mathbf{vH})\frac{dL}{v}=0$$

Этим исчерпываются возможные случаи интегрирования уравнения движения, если исходить непосредственно из его вида (3).

В то же время можно получить и другие интегралы уравнения движения, если предположить, что для $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ допустимы представления типа Клебша, а именно

$$\begin{aligned}\mathbf{v}&=\nabla\lambda_1+S'\nabla\lambda_2+\alpha\nabla\lambda_3+\frac{1}{\rho}[\mathbf{B},\mathrm{rot}\,\lambda_5]\\ \frac{\mathbf{H}}{4\pi}&=-\frac{\partial\lambda_5}{\partial t}+[\mathbf{v},\mathrm{rot}\,\lambda_5]-\nabla\lambda_4\end{aligned} \tag{6}$$

Эти представления следуют из вариационного принципа [2], который формулируется для рассматриваемого случая движения идеальной среды, причем функции $\lambda_i(\mathbf{r},t)$ играют роль множителей Лагранжа при уравнениях связей, а $\alpha=\alpha(\mathbf{r},t)$ — произвольная лагранжева координата системы.

Принимая представления (6), уравнение движения (3) запишем в форме

$$\begin{aligned}&\nabla\left(\frac{v^2}{2}+U+\frac{p}{\rho}+\frac{\psi^{(\rho)}-\psi^{(T)}}{\rho}+\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+S'\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}-\mathbf{v}\left[\frac{\mathbf{B}}{\rho},\mathrm{rot}\,\lambda_5\right]\right)=\\ &=\left(T+\frac{d\lambda_2}{dt}\right)\nabla S'+\frac{d\lambda_3}{dt}\nabla\lambda_3\end{aligned} \tag{7}$$

Если теперь считать, что на представления (6) наложены условия

$$\frac{d\lambda_2}{dt}=-T;\quad \frac{d\lambda_3}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}=0 \tag{8}$$

то из (7) следует, что существует следующий интеграл уравнений движения:

$$h \equiv \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} + \frac{\psi^{(\rho)} - \psi^{(T)}}{\rho} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + S' \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} - \\ - \mathbf{v} \left[\frac{\mathbf{B}}{\rho}, \operatorname{rot} \lambda_5 \right] = f(t) \tag{9}$$

Этот интеграл справедлив для нестационарного вихревого движения при, вообще говоря, произвольной ориентации полей **H** и **v**.

Для h можно дать и другую форму записи

$$h = U + \frac{p}{\rho} + \frac{\psi^{(\rho)} - \psi^{(T)}}{\rho} + \frac{d\lambda_1}{dt} - \frac{v^2}{2} - TS' \tag{10}$$

которая получается из (9) с учетом (6).

Для газовой динамики и гидродинамики несжимаемой жидкости интеграл (9) имеет соответственно вид

$$\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + S \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} = f(t)$$

$$\mathbf{v} = \nabla \lambda_1 + S \nabla \lambda_2 + \alpha \nabla \lambda_3; \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = -T(\rho, S)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} = f(t) \\ \mathbf{v} = \nabla \lambda_1 + \alpha \nabla \lambda_3; \quad \frac{d\lambda_3}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} = 0 \tag{11}$$

В случае безвихревого движения ($\mathbf{v} = \nabla \lambda_1$) из (11) имеем обычный интеграл Лагранжа.

Из (6) и (7) можно получить новые интегралы и для стационарного движения. В этом случае интеграл может иметь вид (9)–(10) с учетом $f = \mathrm{const}$, поскольку условия стационарности движения допускают явную зависимость от времени функций λ_i (например, при $\lambda_i = F_i(t) + \Phi_i(\mathbf{r})$, $\partial \mathbf{v} / \partial t = \partial \mathbf{H} / \partial t = 0$).

В стационарном потоке $\partial S' / \partial t = \partial \alpha / \partial t = 0$ кроме того предполагая $\partial \lambda_3 / \partial t = 0$, имеем $\mathbf{v} \nabla S' = \mathbf{v} \nabla \alpha = \mathbf{v} \nabla \lambda_3 = 0$. Интегрируя (7) вдоль линий тока, получим обобщенный интеграл Бернулли $h = C(L)$. Этот интеграл может быть записан в более простом виде, если учесть, что из $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ при $\partial \rho / \partial t = \partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ следует

$$\nabla \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + S' \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right) = \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} \nabla S' + \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \nabla \alpha - \frac{1}{\rho} \left[\mathbf{B}, \operatorname{rot} \frac{\partial \lambda_5}{\partial t} \right] \tag{12}$$

Пусть теперь λ_5 выбран так, что вектор $\operatorname{rot} \partial \lambda_5 / \partial t$ либо параллелен одному из векторов **v**, **H**, либо равен нулю. Тогда из (8) вместо (11) получаем

$$\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} + \frac{\psi^{(\rho)} - \psi^{(T)}}{\rho} - \mathbf{v} \left[\frac{\mathbf{B}}{\rho}, \operatorname{rot} \lambda_5 \right] = C(L) \tag{13}$$

Эта форма интеграла наиболее проста, тем более что ограничение на λ_5 довольно слабое. Из (13) следуют два частных случая, полученные ранее в виде (4) и (5), причем последний — когда λ_4 и λ_5 таковы, что

$$\mathbf{H} \left(\nabla \lambda_4 + \frac{\partial \lambda_5}{\partial t} \right) = 0$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Для плоского прямолинейного стационарного потока намагничивающейся среды ($\mathbf{v}=\mathbf{i}_x v(y)$, $\rho=\rho(y)$, $S'=S'(y)$, $\mu=\mu(\rho, T, H)$, $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}=i_x B_x(y)+i_z B_z(y)$) в качестве одного из наиболее общих возможных представлений (6) можно предложить следующее:

$$\lambda_1=(v-S'C_2)x-tF-\frac{C_0C_3^2}{2}(x-vt)^2$$

$$\lambda_2=C_2(x-vt)-tT, \quad \lambda_3=C_3(x-vt)$$

$$\alpha=C_0C_3(x-vt), \quad \lambda_{5x}=\lambda_{5z}=0$$

$$\lambda_{5y}=\frac{t}{4\pi}\left\{z\frac{dH_z}{dy}+x\frac{dH_x}{dy}\right\}+C_z\left(\frac{x^2}{2}-vtx\right)$$

$$\lambda_4=-\frac{xH_x+zH_z}{4\pi}-\int_0^y v\left\{\frac{t}{4\pi}\frac{dH_x}{dy}-C_zvt\right\}dy$$

$$F=(T+C_2v)S'-\frac{v^2}{2}-\int\left\{T\frac{dS'}{dy}-\frac{1}{4\pi\rho}\left(B_x\frac{dH_x}{dy}+B_z\frac{dH_z}{dy}\right)\right\}dy$$

Здесь $C_3=C_3(y)$, $C_0=\text{const}$ произвольны; $C_2(y)$, $C_z(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{dv}{dy}=\frac{Bx}{\rho}C_z(y)+\frac{dS'}{dy}C_2(y)$$

При этом интеграл уравнения движения имеет вид

$$w+\frac{\psi^{(\rho)}-\psi^{(T)}}{\rho}-\int\left\{T\frac{dS'}{dy}-\frac{1}{4\pi\rho}\left(B_x\frac{dH_x}{dy}+B_z\frac{dH_z}{dy}\right)\right\}dy=\text{const} \tag{14}$$

Если учесть, что в изотропно намагничивающихся средах имеет место равенство Гиббса вида $TdS'=dU'+p'd(1/\rho)-\mathbf{H}/4\pi\cdot d(\mathbf{B}/\rho)$, то (14) приобретает вид

$$\int\frac{dp'(y)}{\rho(y)}=\text{const}$$

Этот интеграл уравнения движения, таким образом, существует, хотя в рассматриваемом случае $\operatorname{rot}\mathbf{v}\neq0$ и B не параллельно и не перпендикулярно $\mathbf{v}$, как это требуется для существования интегралов (4) и (5).

Пример 2. Рассмотрим случаи движения несжимаемой жидкости, допускающие интеграл вида (11) при $\operatorname{rot}\mathbf{v}\neq0$. Пусть поле скоростей таково, что в каждой точке скорость перпендикулярна конвективному ускорению $\mathbf{w}\equiv(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, т. е. $\mathbf{wv}=0$. Тогда, отыскивая в представлении (11) α и λ_3 в виде $\alpha=\alpha(v^2/2)$, $\lambda_3=-ct+\lambda(\mathbf{r})$, получим, что в силу $\mathbf{wv}=0$ уравнение для α ($d\alpha/dt=0$) выполнено, а λ должно удовлетворять уравнению $\mathbf{v}\nabla\lambda=C$. Отсюда следует, что $\nabla\lambda=C\mathbf{v}/v^2+\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}\perp\mathbf{v}$, а из $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ получаем уравнение для λ_1: $\Delta\lambda_1=-\operatorname{div}\mathbf{A}$.

Вычисляя $\operatorname{rot}\mathbf{v}=[\nabla\alpha, \nabla\lambda]$, нетрудно получить, что если $\alpha=v^2/2C+\text{const}$, то либо $\mathbf{w}=0$, либо $\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$. При этом условие $\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$ отнюдь не обязательно. Действительно, вышеперечисленным условиям удовлетворяет поле $\mathbf{v}=(v(y), 0, 0)$ и представление

$$\lambda=\frac{xC}{v(y)}+f(y); \qquad \alpha=\frac{v^2}{2C}+C_1$$

$$\lambda_1=\frac{v^2-CC_1}{2v}-\frac{1}{2C}\int_0^y f'(y)v^2\,dy-C_1(f(y)-f(0))$$

где $c_1=\text{const}$, $f(y)$ — произвольны. При этом $\operatorname{rot}\mathbf{v}=-\mathbf{i}_z dv/dy\neq0$ и существует интеграл (11), который сводится к $p=\text{const}$.

Рассматривая теперь общий случай плоского потока, удовлетворяющего условию $\mathbf{wv}=0$, получим из этого условия для функции тока $\psi(x, y)$ уравнение

$$\psi_{xy}(\psi_y^2-\psi_x^2)+\psi_x\psi_y(\psi_{xx}-\psi_{yy})=0$$

Отыскивая решение этого уравнения методом разделения переменных, имеем $\psi=\exp\left({}^1/{}_2C_0(x^2+y^2)+C_1x+C_2y\right)$. Решая уравнение $v\nabla\lambda=C$, получаем

$$\lambda=-\frac{C}{C_0\psi}\operatorname{arctg}\frac{\psi_4}{\psi_x}+F(\psi_x^2+\psi_y^2)$$

где F – произвольная функция от $v^2=\psi_x^2+\psi_y^2$.

Считая, что $\alpha'(v^2/2)\neq 1/C$, где штрихом обозначена производная от α по $v^2/2$, из следующего выражения получим для α

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=\frac{\alpha'}{1-\alpha'C}[\mathbf{w},\nabla\lambda]=-\mathbf{i}_z\Delta\psi,\qquad \alpha=\frac{v^2}{2C}+\frac{\psi^2C_0}{2C}\ln\left(1+\frac{v^2}{C_0\psi^2}\right)+\mathrm{const}$$

При этом условие $\mathbf{v}\nabla\alpha$ выполнено в силу предположения $\mathbf{wv}=0$ и того, что $\mathbf{v}\nabla\psi=0$. Таким образом, при $\operatorname{rot}\mathbf{v}=\mathbf{i}_z(2C_0\psi+v^2/\psi)$ существует интеграл (11), который имеет вид

$$\frac{p}{\rho_0}-\frac{\psi^2C_0}{2}\ln\left(1+\frac{v^2}{C_0\psi^2}\right)=\mathrm{const}$$

Нетрудно заметить, что в рассматриваемом примере существует потенциал Φ, такой, что

$$[\mathbf{v},\operatorname{rot}\mathbf{v}]=-\nabla\Phi,\quad \Phi=-{}^1/{}_2(v^2+\psi^2C_0)$$

Из выражения

$$[\mathbf{v},\operatorname{rot}\mathbf{v}]=(\mathbf{v}\nabla\lambda_2)\nabla\alpha-(\mathbf{v}\nabla\alpha)\nabla\lambda_2$$

следует, что αC и Φ могут различаться на функцию F, такую, что $\mathbf{v}\nabla F=0$, что и подтверждается рассмотренным примером.

Как следует из проведенного выше рассмотрения, метод отыскания интегралов на основании представлений типа Клебша обладает большей общностью и полнотой по сравнению с непосредственным отысканием потенциалов неградиентных слагаемых уравнений движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тарапов И. Е.* Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред.– Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Респ. межвед. матем. научн. сб., 1973, вып. 17, с. 221–238.
2. *Seliger R. L., Whitham G. B.* Variational principles in continuum mechanics.– Proc. Roy. Soc., 1968, A305, № 1480, p. 1–25.

Харьков

Поступила в редакцию 27.XII.1982