

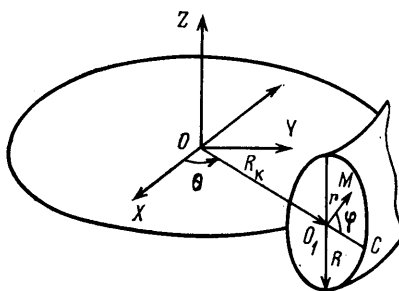
УДК 536.25

**ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАХВАТА АЭРОЗОЛЬНЫХ
ЧАСТИЦ В ТОРОИДАЛЬНЫХ КАНАЛАХ КРУГЛОГО
ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

ВАЛЬЦИФЕРОВ Ю. В., МУРАДЯН С. М.

Течение жидкости (или газа) со взвешенными в ней аэрозольными частицами в каналах различной конфигурации представляет большой интерес при решении многих практических задач. Цель настоящей работы – разработка методики расчета гидродинамики, теплообмена и переноса концентрации аэрозольных частиц для установившегося течения несжимаемой жидкости в тороидальных каналах круглого поперечного сечения. В работе использована неявная разностная схема с различной аппроксимацией конвективных членов на неравномерной сетке (направленные разности, центральные разности, монотонная аппроксимация А. А. Самарского), позволяющая свести решение системы исходных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных к последовательному решению одномерных систем [1]. При расчете граничных условий для функции вихря использована методика, предложенная в работе [2]. Решение уравнений гидродинамики осуществлялось с помощью разностной схемы, разработанной в работе [3], а уравнения переноса тепла и концентрации решались с помощью разностной схемы, предложенной в работе [4]. Полученные результаты позволяют провести подробный анализ зависимости основных интегральных (коэффициент захвата частиц) и локальных характеристик от величины определяющих критериев подобия: чисел Дина, Прандтля, Шмидта, параметра R/R_k , характеризующего кривизну канала, и безразмерного параметра $W_j = f\mu R_G(T_0 - T_w)/(pMv)$, характеризующего скорость термофореза.

1. Постановка задачи и система уравнений. Рассматривается установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости со взвешенными в ней аэрозольными частицами в тороидальном канале круглого поперечного сечения и постоянного радиуса кривизны R_k при заданной температуре стенки T_w . Предполагается, что концентрация частиц в жидкости мала, поэтому не учитывается их влияние на течение жидкости и распределение температуры [5]. Более того, считается, что частицы достаточно малы и при отсутствии термофореза скорость частицы в данной точке совпадает со скоростью газа. Справедливость такого предположения оценивается отношением времени релаксации частиц ко времени, характеризующему изменение скорости жидкости [5]. Скорость частиц в азимутальном направлении, обусловленная термофорезом, пренебрежимо мала по сравнению со скоростью потока. В начальном сечении канала заданы равномерные распределения температуры $T(r, \varphi, 0) = T_0$ и концентрации частиц $c(r, \varphi, 0) = c_0$. На фиг. 1 показана система координат (здесь R_k – радиус кривизны канала, O_1 – центр сечения канала некоторой плоскостью $\theta = \text{const}$). Обозначим через U, V, W составляющие скорости в некоторой точке M , соответствующие криволинейным ортогональным координатам $r\varphi\theta$. Считая, что физические свойства газа не зависят от температуры,



Фиг. 1

а $R/R_k \ll 1$, т.е. канал достаточно пологий, и пренебрегая также действием массовых сил, запишем уравнения неразрывности, движения, переноса энергии и концентрации частиц при принятых допущениях в выбранной криволинейной системе координат в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}(rU) + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{V^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{W^2 \cos \varphi}{R_k} \quad (1.2)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{UV}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{W^2 \sin \varphi}{R_k} \quad (1.3)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho R_k} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \quad (1.4)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{W}{R_k} \frac{\partial T}{\partial \theta} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) \quad (1.5)$$

$$U \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{V}{r} \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \frac{W}{R_k} \frac{\partial c}{\partial \theta} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(U_p c r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(V_p c) \quad (1.6)$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, T — температура, c — концентрация частиц, U_p и V_p — соответственно проекции скорости термофореза частиц на оси r и φ , D — коэффициент диффузии, a — коэффициент температуропроводности, ν — кинематический коэффициент вязкости.

Уравнения (1.2)–(1.4) совпадают с уравнениями движения, записанными в цилиндрических координатах r , φ и $R_k \theta$ (вместо z) при добавлении центробежной силы W^2/R_k , действующей на единицу массы в направлении $\varphi=0$. В рассматриваемом приближении наличие центробежных сил является единственным следствием кривизны канала. При выводе уравнения (1.6) учитывается скорость термофореза частиц $V_p = \{U_p, V_p\}$ в плоскости поперечного сечения. Скорость термофореза зависит от размеров частиц и может быть выражена формулой [6]

$$U_p = -f \frac{\mu}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad V_p = -f \frac{\mu}{\rho T} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \quad (1.7)$$

где f — коэффициент, зависящий от рода газа, размера частиц, теплофизических свойств частиц и газа, μ — динамический коэффициент вязкости.

Систему дифференциальных уравнений (1.1)–(1.4) в данной постановке задачи можно решить независимо от уравнений переноса энергии и концентрации частиц (1.5)–(1.6), затем полученные решения для U , V , W , не зависящие от угла θ , т.е. решения, описывающие установившееся развитое течение в криволинейном канале, используются для расчета полей температуры и концентрации. Поскольку предполагается, что U , V , W не зависят от θ , то из уравнения (1.4) следует, что функция p/ρ должна иметь вид $F_1(r, \varphi)\theta + F_2(r, \varphi)$, а из уравнений (1.2) и (1.3) непосредственно следует, что $F_1(r, \varphi) = \text{const}$. Поэтому

$$-\frac{1}{R_k} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{G}{\rho} \quad (1.8)$$

Здесь G — постоянная, равная среднему градиенту давления вдоль азимутального направления.

Систему дифференциальных уравнений (1.1)–(1.6) запишем в безразмерном виде, введя следующие безразмерные переменные:

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad U^* = \frac{R}{\nu} U, \quad V^* = \frac{R}{\nu} V$$

$$W^* = \sqrt{\frac{2R^3}{\nu^2 R_k}} W, \quad T^* = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, \quad c^* = \frac{c}{c_0}$$

Для численного решения систему дифференциальных уравнений (1.1)–(1.6) после приведения к безразмерному виду удобнее записать в форме Гельмгольца, введя функцию тока для вторичного течения в плоскости поперечного сечения и функцию вихря с помощью следующих соотношений:

$$U^* = \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial \varphi}, \quad V^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \quad (1.9)$$

$$\omega^* = -\frac{1}{r^*} \left(\frac{\partial U^*}{\partial \varphi} - \frac{\partial (V^* r^*)}{\partial r^*} \right) \quad (1.10)$$

В конечном счете решение поставленной задачи сводится к численному решению следующей системы безразмерных дифференциальных уравнений (в дальнейшем «звездочка» опущена):

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \Delta \omega = W \left(\sin \varphi \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \quad (1.11)$$

$$\Delta \psi = -\omega \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) = \Delta W + D \quad (1.13)$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \sqrt{\frac{\delta}{2}} W \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right) + \sqrt{\frac{\delta}{2}} W \frac{\partial c}{\partial \theta} = \frac{1}{\text{Pr Sc}} \Delta c +$$

$$+ W_f \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(c r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(c \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Система уравнений содержит следующие безразмерные критерии подобия: число Дина $D = GR^2 \sqrt{2R^3 / (\nu^2 R_k)} / \mu$, число Шмидта $Sc = \nu / D$, число Прандтля $Pr = \nu / a$, параметр $\delta = R / R_k$, характеризующий кривизну канала, и параметр $W_f = f \mu R_c (T_0 - T_w) / p M \nu$ (здесь T_0 – характерная температура газа на входе, R_c – универсальная газовая постоянная, M – молекулярный вес).

В силу осесимметричности задачи решение системы (1.11)–(1.15) будем искать в верхней области канала $\Pi = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \theta_k\}$. Граничные условия, выражающие равенство нулю скоростей на стенках канала, условия симметрии для азимутальной составляющей скорости W , температуры T , концентрации c и антисимметрии функций ψ и ω отно-

сительно горизонтальной плоскости имеют вид

$$\psi(1, \varphi, \theta) = \frac{\partial \psi}{\partial r}(1, \varphi, \theta) = W(1, \varphi, \theta) = 0 \quad (1.16)$$

$$\psi(r, 0, \theta) = \omega(r, 0, \theta) = \frac{\partial W}{\partial \varphi}(r, 0, \theta) = 0 \quad (1.17)$$

$$\psi(r, \pi, \theta) = \omega(r, \pi, \theta) = \frac{\partial W}{\partial \varphi}(r, \pi, \theta) = \frac{\partial W}{\partial r}\left(0, \frac{\pi}{2}, \theta\right) = 0 \quad (1.18)$$

$$T(1, \varphi, \theta) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi}(r, 0, \theta) = \frac{\partial T}{\partial \varphi}(r, \pi, \theta) = 0 \quad (1.19)$$

$$c(1, \varphi, \theta) = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial \varphi}(r, 0, \theta) = \frac{\partial c}{\partial \varphi}(r, \pi, \theta) = 0 \quad (1.20)$$

$$c(r, \varphi, 0) = 1, \quad T(r, \varphi, 0) = 1 \quad (1.21)$$

При записи граничного условия для концентрации частиц на стенке считается, что частица, достигнув стенки, тотчас же оседает на ней. Первое уравнение в (1.20) отражает это приближение, которое достаточно точно выполняется для частиц, диаметр которых меньше 2 мкм [5]. Следует отметить, что решение задачи гидродинамики представляет самостоятельный интерес для различных приложений.

2. Методика численного решения. Для численного решения системы (1.11)–(1.15) используется метод переменных направлений. Для этого в уравнения (1.11)–(1.13) добавляются соответствующие производные по времени, что делает систему уравнений параболической. Поскольку граничные условия не зависят от времени, то в пределе при $t \rightarrow \infty$ реализуется решение стационарной задачи (метод установления). Для параболической системы используется экономичная неявная конечно-разностная схема, позволяющая свести решение системы к последовательному решению одномерных систем методом прогонки. Для расчета системы дифференциальных уравнений (1.11)–(1.13) использована разностная схема типа предиктор-корректор, которая подробно описана в работе [3] для равномерной сетки. Расчет на одном временном слое n заканчивался после выполнения условия

$$\max\{(\|W_{ij}^{n,s} - \|W_{ij}^{n,s-1}\|) / \|W_{ij}^{n,s}\|, (\|\omega_{ij}^{n,s} - \|\omega_{ij}^{n,s-1}\|) / \|\omega_{ij}^{n,s}\|\} < \varepsilon \quad (2.1)$$

где ε – заданная точность, s – номер итерации, $\|W_{ij}^{n,s}\| = \max_{ij} |W_{ij}^{n,s}|$. В этом случае

считалось, что

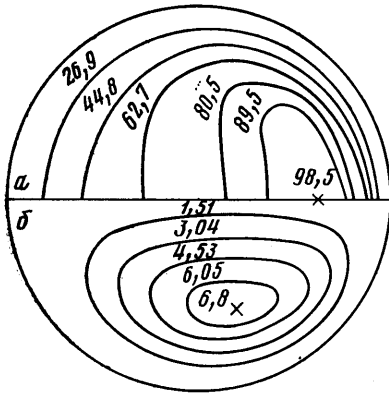
$$W_{ij}^{n+1} = W_{ij}^{n,s}, \quad \omega_{ij}^{n+1} = \omega_{ij}^{n,s} \quad (2.2)$$

После расчета гидродинамики решаются уравнения (1.14) и (1.15). Эти уравнения имеют сходную структуру, их решение осуществлялось с помощью разностной схемы, предложенной в работе [4]. Отличие состоит лишь в том, что в данном случае были введены параметры, которые позволяли варьировать различной аппроксимацией конвективных членов (симметричные разности, направленные разности, монотонная аппроксимация А. А. Самарского).

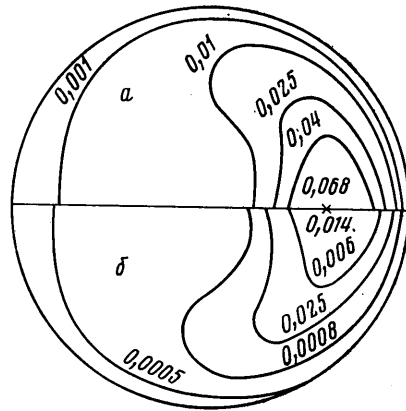
Полученные результаты позволяют провести подробный анализ зависимости коэффициента захвата аэрозольных частиц и различных локальных характеристик (распределений азимутальной составляющей скорости, температуры и концентрации) от величины определяющих критериев подобия. Результаты расчетов были получены на ЭВМ ЕС-1020 в основном на сетке 11×21 . При расчете картины течения (1.11)–(1.13) в качестве начальных условий выбирались условия $\omega_{ij}^0 = \psi_{ij}^0 = W_{ij}^0 = 0$ и расчет проводился до тех пор, пока условие (2.1) не выполнялось с точностью до 10^{-4} .

3. Результаты расчета. Картина изолиний функции тока и азимутальной составляющей скорости в плоскости поперечного сечения, полученная при малых числах Дина $D < 10$, симметрична относительно внешней и внутренней поверхностей канала, причем максимум азимутальной составляющей скорости лежит практически в центре поперечного сечения кана-

ла. На фиг. 2 приведены изолинии азимутальной составляющей скорости W (а) и функции тока ψ (б) при числе $D=606$. Из приведенного распределения азимутальной составляющей скорости видно, что уже при числе $D=606$ максимум азимутальной составляющей скорости смещается вправо к внешней поверхности канала относительно центра кривизны. Центробежные силы, которые в конечном счете определяют картину вторичного течения, имеют теперь значительно большие значения в области, прилегающей к внешней поверхности канала. Это приводит к тому, что картина вторичного течения перестает быть симметричной относительно внешней



Фиг. 2



Фиг. 3

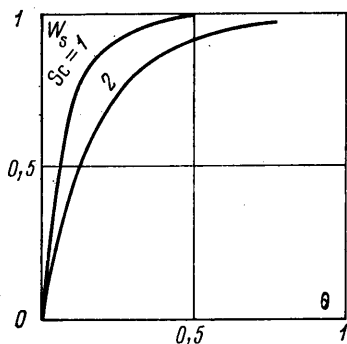
и внутренней поверхностей канала. Скорости вторичного течения имеют существенно большие значения вблизи внешней поверхности канала, при этом положение максимума функции тока также смещается к внешней поверхности канала.

На фиг. 3 приведены распределения концентрации в сечениях $\theta=0,4$ (а) и $0,6$ (б) для следующих значений безразмерных параметров: $D=152$, $Pr=1$, $Sc=1$, $W_i=0,9$, $R/R_k=0,2$. Распределения концентраций в указанных сечениях подобны друг другу, причем максимум концентрации лежит на горизонтальной оси вблизи $r \approx 0,6$ в обоих сечениях. Анализ распределений концентраций указывает также на то, что в основном все частицы сосредоточены в области, прилегающей к горизонтальной оси вблизи $r=0,6$; например, площадь области с концентрацией частиц $c/c_0 \geq 0,04$ в сечении $\theta=0,4$ (фиг. 3, а) составляет приблизительно 0,07 от всей площади поперечного сечения. Отметим также, что в области $0 \leq \theta \leq 0,6$ граничное условие $\partial c / \partial \varphi = 0$ выполняется приближенно. Это обусловлено тем, что данный расчет выполнен на равномерной сетке с относительно небольшим количеством узлов 11×15 , поэтому наибольшая погрешность разностного решения имеет место в области с наибольшими градиентами концентрации частиц и азимутальной составляющей скорости (т. е. как раз в области, прилегающей к горизонтальной оси $\varphi=0$). Заметим, что максимальное значение $|\partial c / \partial \varphi|$ на оси $\varphi=0$, вычисленное по трем точкам, для распределения концентраций, приведенного на фиг. 3, а, не превосходит 0,08.

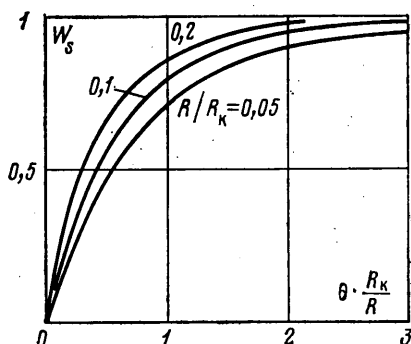
На фиг. 4 приведена зависимость коэффициента захвата частиц для установившегося течения в криволинейном канале от азимутального угла θ при двух различных числах Шмидта. Коэффициент захвата частиц определяет долю частиц, осевших на стенках канала в данном сечении θ , и определен соотношением

$$W_s = 1 - \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\pi r W(r, \varphi, \theta) c(r, \varphi, \theta) dr d\varphi / \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\pi r W(r, \varphi, 0) c(r, \varphi, 0) dr d\varphi$$

Интеграл в формуле (2.3) вычислялся по формуле Симпсона на неравномерной сетке либо по формуле Грегори четвертого порядка точности на равномерной сетке [7]. Из приведенной зависимости (2.3) видно, что коэффициент захвата возрастает от нуля во входном сечении до единицы в сечении, где все частицы уже осели на стенках канала. Из приведенной зависимости на фиг. 4 видно, что число Шмидта оказывает существенное влияние на величину коэффициента захвата частиц, причем с увеличе-



Фиг. 4



Фиг. 5

нием числа Шмидта коэффициент захвата частиц уменьшается. Коэффициент захвата при $Sc=1$ равен 1 (это соответствует тому, что все частицы осели на стенках канала) в сечении $\theta=0,5$ (29°), тогда как при числе $Sc=2$ — в сечении $\theta=1$ (57°).

На фиг. 5 приведена зависимость коэффициента захвата частиц от криволинейной координаты $\theta R_k/R$, т. е. расстояния вдоль осевой линии от входного сечения канала, при различных значениях параметра R/R_k , характеризующего кривизну канала ($D=152$, $Pr=Sc=1$, $W_j=0,9$). Полученные результаты указывают на сильную зависимость коэффициента захвата от кривизны канала. Увеличение кривизны пологого канала ($R/R_k \leq 0,02$) приводит к более интенсивному захвату частиц и уменьшению расстояния вдоль осевой линии, при котором имеет место полный захват частиц на стенках канала. Была также получена зависимость коэффициента захвата частиц от параметра W_j и числа Прандтля в диапазоне чисел Дина 50—1000. Оказалось, что в указанном диапазоне чисел Дина число Pr и параметр W_j оказывают слабое влияние на величину коэффициента захвата (отличия во втором—третьем знаках), причем при увеличении W_j и уменьшении числа Pr коэффициент захвата частиц незначительно возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
2. Полежаев В. И., Грязнов В. Л. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье — Стокса в переменных вихрь — функция тока. — Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 2, с. 301—304.
3. Христов Х. И. Полностью развитое течение вязкой несжимаемой жидкости в торoidalной трубе круглого поперечного сечения для широкого интервала числа Дийна. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: Наука, 1978, т. 9, № 7, с. 122—138.
4. Вальциферов Ю. В., Полежаев В. И. К расчету конвективного теплообмена и температурного расслоения в цилиндрическом сосуде при заданном потоке тепла. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: Наука, 1981, т. 12, № 1, с. 10—19.
5. Simon L. Thermophoresis of Aerosol Particles in the laminar boundary layer on a flat plate. — J. Colloid and Interface Sci., 1977, v. 61, № 1, p. 77—85.
6. Ивченко И. Н., Яламов Ю. И. Гидродинамический метод расчета скорости термофореза умеренно крупных нелетучих аэрозольных частиц. — Ж. физ. химии, 1971, т. 45, № 3, с. 577—582.
7. Хемминг Р. В. Численные методы. М.: Наука, 1972. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.II.1983