МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1984

УДК 533.69.01

МАШУЩИЙ ПОЛЕТ ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КРЫЛА

ГОРЕЛОВ Д. Н.

В природе четко наблюдаются две группы биологических объектов с машущими крыльями в качестве движителя. Объекты первой группы (птицы) совершают низкочастотные колебания крыльев, что в полете соответствует значениям числа Струхаля $k \ll 1$. Объекты второй группы (большинство насекомых) совершают высокочастотные колебания на режимах $k \sim 1$.

Теоретическими и экспериментальными исследованиями установлена возможность эфективного машущего полета с гидродинамическим к.п.д., близким к единице, на режимах $k \ll 1$ (см., например, [1–5]). Для тонкого крыла бесконечного размаха в предельном случае $k \to \infty$ теоретическое значение к.п.д. равняется 0,5 независимо от закона колебаний, а максимум силы тяги достигается при поступательных колебаниях [6]. Режимы полета $k \sim 1$ исследованы мало. Имеющиеся результаты получены в основном для поступательно-вращательных колебаний жесткого крыла [2, 4]. В то же время анализ экспериментальных данных о полете аэробионтов позволил ряду авторов сделать вывод о высокой эффективности упругого крыла как движителя на резонансном режиме колебаний (см., например, [7]). Поэтому представляет интерес теоретически исследовать силу тяги и к.п.д., создаваемых упругим крылом при его вынужденных колебаниях. В одной из первых работ [8] в этом направлении рассмотрено упругое крыло (ласта), совершающее вынужденные колебания под действием заданных силы и момента.

Настоящая работа также посвящена исследованию вынужденных колебаний упругого крыла. При этом основное внимание уделено решению задачи для $k \sim 1$. Показано, что упругое крыло позволяет получить высокие значения к.п.д. и коэффициента силы тяги в широком диапазоне изменения числа Струхаля. При этом максимум силы тяги достигается обычно вблизи резонанса, а максимум к.п.д. – на другом режиме, определяемом параметрами колеблющейся системы.

1. Простейшей схемой упругого крыла является жесткое крыло, упруго соединенное с некоторой фиксированной осью вращения. Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях такого крыла, происходящих в потоке жидкости при заданном законе поступательных колебаний оси вращения. Предположим, что жидкость идеальна и несжимаема, крыло тонкое, слабо изогнутое и имеет прямоугольную форму в плане, закон колебаний постоянен вдоль размаха крыла, а средний угол атаки равен нулю. Введем декартову систему координат xy, связанную с профилем крыла в его среднем положении. Обозначим через b хорду крыла, $\alpha(t)$ – искомый закон вращательных колебаний вокруг оси, отстоящей на расстоянии x_0 от передней кромки, $y(t)=y_0 \cos \omega t$ – заданный закон поступательных колебаний оси вращения. Тогда, полагая $|y| \ll 1$, $|\alpha| \ll 1$, перемещение точек крыла вдоль оси y и уравнение вращательных колебаний крыла можно записать в виде

$$w(x, t)=y(t)-(x-x_0)\alpha(t), \quad x \in [0, \ b]$$

$$I_m(\ddot{\alpha}+\omega_0^2\alpha)=M-m\ddot{y}(x_0-\sigma) \tag{1.1}$$

Здесь I_m – массовый момент инерции крыла относительно оси вращения, m – масса крыла, σ – расстояние от линии центров тяжести до передней кромки крыла, ω_0 – круговая частота собственных вращательных колебаний крыла в пустоте, M – момент нестационарных гидродинамических реакций на крыло относительно оси вращения.

Будем полагать, что гидродинамические реакции можно определять по теории тонкого крыла [1, 2]. Кроме того, потребуем выполнения гипотез плоских сечений и гармонических колебаний. Тогда для рассматриваемого закона колебаний крыла можно получить следующее выражение для момента:

$$M=\pi\rho b^2 l\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{4}b\ddot{y}\left(\frac{1}{2}-\frac{x_0}{b}\right)+\dot{y}VC(k)\left(\frac{1}{4}-\frac{x_0}{b}\right)-\right.$$

$$-\alpha V^2C(k)\left(\frac{1}{4}-\frac{x_0}{b}\right)-\dot{\alpha}bV\left(\frac{3}{4}-\frac{x_0}{b}\right)\left[\frac{1}{4}+C(k)\left(\frac{1}{4}-\frac{x_0}{b}\right)\right]-$$

$$\left.-\frac{1}{8}\ddot{\alpha}b^2\left(\frac{3}{4}-\frac{x_0}{b}\right)^2\right\} \tag{1.2}$$

Здесь V — скорость потока, $k=\omega c/V$ — число Струхаля, $c=b/2$, $C(k)$ — функция Теодорсена, l — длина крыла, ρ — плотность жидкости.

Полагая $\omega\neq0$ и учитывая (1.2), запишем уравнение (1.1) в виде

$$A_2\frac{\ddot{\alpha}}{\omega^2}+A_1\frac{\dot{\alpha}}{\omega}+\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2+A_0\right]\alpha=B\frac{y}{b} \tag{1.3}$$

$$A_0=\frac{2\beta}{k^2}C(k)\left(\frac{1}{4}-\frac{x_0}{b}\right),\quad A_1=\left(\frac{3}{4}-\frac{x_0}{b}\right)\left(\frac{\beta}{k}+2kA_0\right)$$

$$A_2=1+\beta\left(\frac{3}{4}-\frac{x_0}{b}\right)^2,\quad \beta=\frac{\pi}{8}\frac{\rho b^4 l}{I_m}$$

$$B=\frac{mb^2}{I_m}\left(\frac{x_0}{b}-\frac{\sigma}{b}\right)-2\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{x_0}{b}\right)+2ikA_0 \tag{1.4}$$

2. Перейдем к решению уравнения (1.3). Рассмотрим предварительно собственные вращательные колебания крыла в жидкости при $V=0$. В этом случае $B=0$, $k=\infty$ и уравнение (1.3) переходит в уравнение

$$A_2\ddot{\alpha}+\omega_0^2\alpha=0$$

Полагая $\alpha=\cos\omega_*t$, где ω_* — круговая частота собственных вращательных колебаний крыла в «покоящейся» жидкости, получим

$$\omega_*=\omega_0/\sqrt{A_2} \tag{2.1}$$

Пусть теперь $B=0$, $V\neq0$, $\omega=\omega_{**}$, $k=k_{**}=\omega_{**}c/V$, где ω_{**} — круговая частота собственных колебаний крыла в потоке жидкости. Полагая $\alpha=\exp(\lambda t)$, $\lambda=-\delta_{**}+i\omega_{**}$, из уравнения (1.3) с учетом (2.1) получим при заданном числе Струхаля

$$\frac{\delta_{**}}{\omega_{**}}=\frac{A_1'+A_0''}{2A_2+A_1''},\quad \left(\frac{\omega_*}{\omega_{**}}\right)^2=1-\left(\frac{\delta_{**}}{\omega_{**}}\right)^2+\frac{1}{A_2}\left[\frac{\delta_{**}}{\omega_{**}}A_1'+A_1''-A_0'\right] \tag{2.2}$$

Здесь одним и двумя штрихами обозначены вещественная и мнимая части соответствующих величин. Отметим, что при $k\gg1$

$$\delta_{**}/\omega_{**}=O(k^{-1}),\quad (\omega_*/\omega_{**})^2=1+O(k^{-2})$$

Отсюда следует, что при $k\gg1$ в первом приближении $\omega_{**}=\omega_*$.

Рассмотрим частное решение неоднородного уравнения (1.3) $\alpha(t)=\alpha_0\cos(\omega t+\mu)$, где

$$\alpha_0=\frac{|B|}{|A|}\frac{y_0}{b},\quad \cos\mu=\frac{A'B'+A''B''}{|A||B|},\quad \sin\mu=\frac{A'B''-A''B'}{|A||B|} \tag{2.3}$$

$$A=\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2+A_0+iA_1-A_2 \tag{2.4}$$

Оно соответствует вынужденным вращательным колебаниям крыла с круговой частотой ω в потоке жидкости.

Выясним характер вынужденных вращательных колебаний крыла при $k \gg 1$. В этом случае из формул (1.4), (2.4) следует

$$A' = A_2\left[\left(\frac{\omega_{**}}{\omega}\right)^2 - 1\right] + O(k^{-2}),\quad A'' = \frac{2\beta}{k}\left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b}\right)^2 + O(k^{-2})$$

$$B' = \frac{mb^2}{I_m}\left(\frac{x_0}{b} - \frac{\sigma}{b}\right) - 2\beta\left(\frac{1}{2} - \frac{x_0}{b}\right) + O(k^{-2}),$$

$$B'' = \frac{2\beta}{k}\left(\frac{1}{4} - \frac{x_0}{b}\right) + O(k^{-2})$$

В соответствии с этими выражениями формулы (2.2), (2.3) дают

$$\frac{\alpha_0 b}{y_0} = \frac{|B|}{A_2}\left\{\left[\left(\frac{\omega_{**}}{\omega}\right)^2 - 1\right]^2 + \frac{4\delta_{**}^2}{\omega^2}\right\}^{-1/2},\quad \frac{\delta_{**}}{\omega} = \frac{\beta}{kA_2}\left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b}\right)$$

$$\lim_{k\to\infty}\cos\mu = \begin{cases} \pm 1, & \omega \neq \omega_{**}, \\ 0, & \omega = \omega_{**}, \end{cases}\qquad \lim_{k\to\infty}\sin\mu = \begin{cases} 0, & \omega \neq \omega_{**}, \\ \pm 1, & \omega = \omega_{**} \end{cases}\tag{2.5}$$

Таким образом, при $k \gg 1$ вынужденные вращательные колебания крыла имеют резонансный характер. Причем фазовый угол μ при переходе через резонансное значение $\omega = \omega_{**}$ меняется на величину π. На режиме резонанса $\mu = \pm\pi/2$ (в зависимости от знака коэффициентов A', B', B''), а амплитуда колебаний $\alpha_0 \sim k$.

3. Средняя сила тяги, создаваемая крылом за период $T = 2\pi/\omega$, определяется формулой [6]

$$R_T = \frac{1}{2}\rho bl(\omega y_0)^2 c_T$$

$$c_T = \frac{\pi}{8k^2}[k(\delta_1''C_1' - \delta_0''C_2' - \delta_1'C_1'' + \delta_0'C_2'') - 2(C_1'C_2' + C_1''C_2'')]$$

$$\delta_0 = 4\left[1 - \frac{\alpha_0 b}{y_0}e^{i\mu}\left(\frac{1}{2} - \frac{x_0}{b}\right)\right],\quad \delta_1 = \frac{\alpha_0 b}{y_0}e^{i\mu},\quad \delta_m = 0\quad (m \geqslant 2)\tag{3.1}$$

Гидродинамический к.п.д. колеблющегося крыла как движителя $\eta = R_T V/N$, где $R_T V$ — средняя полезная мощность, развиваемая движителем, N — средняя мощность, затрачиваемая на поддержание колебаний крыла в жидкости.

В случае вынужденных вращательных колебаний крыла при заданном перемещении оси вращения

$$N = -\frac{1}{T}\int_0^T [R_y - m\ddot{y} - m\ddot{\alpha}(x_0 - \sigma)]\dot{y}\,dt\tag{3.2}$$

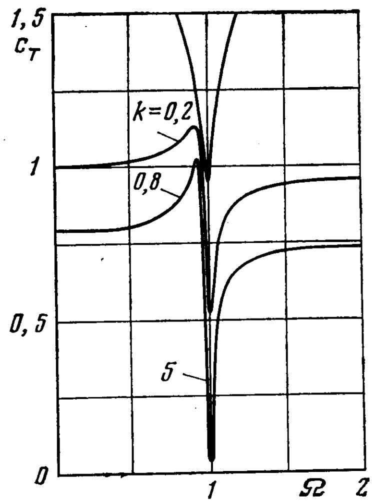
где R_y — проекция гидродинамической силы на ось y. По теории тонкого крыла [1, 2]

$$R_y = \frac{1}{2}\rho V^2 bl\,\mathrm{Re}\{C_y e^{i\omega t}\},\quad C_y = -2\pi\left[C(k)\frac{q_0 - q_1}{2} + \frac{ik}{4}(q_0 - q_2)\right]$$

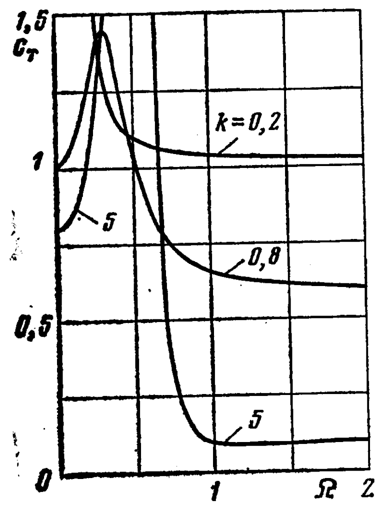
$$q_0 = (ik\delta_0 - 2\delta_1)\frac{y_0}{b},\quad q_1 = ik\delta_1\frac{y_0}{b},\quad q_2 = 0\tag{3.3}$$

Подставляя выражение (3.3) в формулу (3.2) и учитывая, что $y = y_0\cos\omega t$, $\alpha = \alpha_0\cos(\omega t + \mu)$, получим

$$N = -\frac{1}{4}\rho V^2 bly_0\omega C_y'' - \frac{1}{2}y_0\alpha_0\omega^3 m(x_0 - \sigma)\sin\mu\tag{3.4}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Появление второго слагаемого в формуле (3.4) связано с затратой энергии на преодоление сил инерции, что является характерной особенностью вынужденных колебаний упругого крыла.

Отметим, что среднюю мощность, затрачиваемую на поддержание рассматриваемых поступательно-вращательных колебаний крыла в жидкости можно вычислять через работу гидродинамических сил в единицу времени на соответствующих перемещениях крыла по формуле

$$N=-\frac{1}{T}\int\limits_0 (\dot{y}R_y+\dot{\alpha}M)\,dt \qquad (3.5)$$

где M, R_y определены выражениями (1.2), (3.3). Можно показать, используя решение (2.3), что формулы (3.2), (3.5) идентичны.

Введем безразмерный коэффициент затраченной мощности C_N и выразим через него к.п.д. η

$$\eta=\frac{c_T}{c_N},\quad C_N=\frac{2N}{\rho blV(\omega y_0)^2} \qquad (3.6)$$

Выясним зависимость силы тяги и к.п.д. колеблющегося крыла от основных параметров системы при $k\gg1$. Используя результаты работы [6], получим следующие асимптотические формулы:

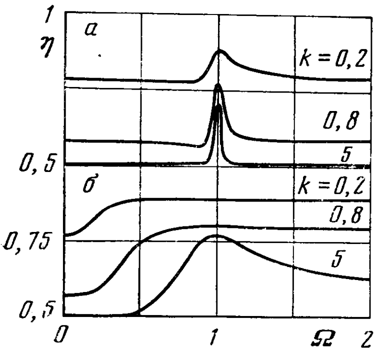
$$c_T=\frac{\pi}{4}\left[1-2\frac{\alpha_0 b}{y_0}\left(\frac{3}{4}-\frac{x_0}{b}\right)\cos\mu+\left(\frac{\alpha_0 b}{y_0}\right)^2\left(\frac{3}{4}-\frac{x_p}{b}\right)^2\right]$$

$$c_N=2c_T,\quad \eta={}^1/_2$$

Отсюда с учетом (2.5) следует, что при $k\gg1$ коэффициент $c_T\sim k^2$ для $\omega=\omega_{**}$ и $c_T\sim1$ для $\omega\neq\omega_{**}$. Таким образом, при $k\gg1$ максимум силы тяги достигается на режиме резонанса.

В качестве примера на фиг. 1—3 приведены результаты расчета коэффициента силы тяги c_T и гидродинамического к.п.д. η в зависимости от отношения частоты вынужденных колебаний к частоте собственных колебаний крыла в пустоте $\Omega=\omega/\omega_0$. Значение $\omega/\omega_0=0$ соответствует $\omega_0=\infty$. В этом случае крыло совершает чисто поступательные колебания ($\alpha_0=0$).

Расчет проводился по формулам (2.3), (3.1), (3.6) для чисел Струхаля $k=0,2$, 0,8, 5 при $x_0=\sigma=b/4$, $\beta=0,1$ (фиг. 1, 3, *а*) и 10 (фиг. 2, 3, *б*). Значение параметра $\beta=0,1$ соответствует колебаниям крыла в воздухе, а $\beta=10$ – в воде. Резонансные значения $\omega/\omega_0=\omega_{**}/\omega_0$ при $k=0,2$, 0,8, 5 равны соответственно 0,981, 0,987, 0,988 для $\beta=0,1$ и 0,144, 0,399, 0,529 для $\beta=10$. Результаты расчета показывают существенную зависимость силы тяги и к.п.д. колеблющегося крыла от параметров β, ω/ω_0. Так, для $\beta=0,1$ наблюдается резкое изменение коэффициентов c_T, η при переходе через резонансное значение ω/ω_0, тогда как при $\beta=10$ этот переход осуществляется плавно. Это объясняется возрастающим влиянием гидродинамического демпфирования среды с ростом β. При этом максимум c_T при $k\sim1$ достигается вблизи резонанса, а максимум к.п.д. – на другом режиме, что особенно проявляется при $\beta=10$.



Фиг. 3

Следует отметить, что были проведены расчеты по оценке влияния взаимного положения оси вращения и линии центров тяжести на коэффициенты c_T, η. При $x_0\neq\sigma$ к.п.д. оказывается ниже, чем при $x_0=\sigma$, что связано с дополнительными затратами энергии на преодоление сил инерции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Некрасов А. И.* Теория крыла в нестационарном потоке. М.– Л.: Изд-во АН СССР, 1947. 258 с.
2. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
3. *Горелов Д. Н.* Об эффективности машущего крыла как движителя.– Бионика. Респ. межвед. сб., 1976, вып. 10, с. 49–53.
4. *Lighthill M. J.* Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency.– J. Fluid Mech., 1970, v. 44, № 2, p. 265–301.
5. *Гребешов Э. П., Сагоян О. А.* Гидродинамические характеристики колеблющегося крыла, выполняющего функции несущего элемента и движителя.– Тр. ЦАГИ, 1976, № 1725, с. 3–30.
6. *Горелов Д. Н.* К выбору оптимального закона колебаний крыла, выполняющего роль движителя.– Изв. СО АН СССР, Сер. техн. наук, 1980, вып. 1, № 3, с. 12–17.
7. *Першин С. В.* О саморегуляции машущего полета аэробионтов с минимальной затратой энергии.– Бионика, Респ. межвед. сб., 1977, вып. 11, с. 13–23.
8. *Грунтфест Р. А., Дерезина Н. П.* Колебание упругой ласты в потоке жидкости.– Бионика. Респ. межвед. сб., 1981, вып. 15, с. 29–39.

Омск

Поступила в редакцию
19.X.1982