МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1984

УДК 533.6.011.72:534.222.2

ОБ ОЦЕНКАХ ДВИЖЕНИЯ ДЕТОНАЦИОННЫХ ВОЛН В ГРАВИТИРУЮЩЕМ ГАЗЕ

ГОЛУБЯТНИКОВ А. Н., ЧИЛАЧАВА Т. И.

Согласно существующим представлениям [1, 2], в звездах может происходить детонация легких элементов, содержащихся во внешних слоях, при гравитационном коллапсе ядра, сопровождающемся инициирующим детонацию нейтринным излучением. При этом основное внимание отводится физическим процессам, связанным с термоядерными реакциями и распространением излучения, и в меньшей степени – газовой динамике в целом.

В настоящей работе рассматривается сферически-симметричная задача об адиабатическом движении гравитирующего совершенного газа при наличии детонационной волны, возникающей в результате неоднородного гравитационного коллапса газа при нулевом давлении или при разрушении положения равновесия. Следуя методу [3, 4], строится система интегродифференциальных неравенств, определяющих, в частности, закон движения детонационной волны по известному начальному состоянию газа. В качестве примеров исследованы соответствующие автомодельные задачи.

1. В лагранжевых переменных t – время, m – масса шара радиуса $r(m, t)$ уравнения адиабатического сферически-симметричного движения гравитирующего совершенного газа и условия на разрыве имеют вид

$$\ddot{r}+4\pi r^2 p' + \frac{km}{r^2} = 0, \quad p = (\gamma-1) f(m) \rho^\gamma, \quad \rho = \frac{1}{4\pi r^2 r'}, \quad \dot{r} \equiv \frac{\partial r}{\partial t}, \quad r' \equiv \frac{\partial r}{\partial m} \tag{1.1}$$

$$[r]_1^2 = [\dot{r}\dot{M} - 4\pi r^2 p]_1^2 = 0,$$
$$\left[\dot{M}\left(\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{p}{(\gamma-1)\rho} - \frac{kM}{R}\right) - 4\pi r^2 \dot{r} p\right]_1^2 = Q(M)\dot{M} \tag{1.2}$$

где p – давление, ρ – плотность, функция $f(m)$ связана с распределением энтропии, $m=M(t)$ – закон движения детонационной волны, k – гравитационная постоянная, $Q(m)$ – энергия, выделяющаяся при сгорании единицы массы газа. Индексами 1, 2 обозначены соответственно состояния газа перед и за детонационной волной.

Отметим, что в случае лазерной детонации $Q(M)\dot{M}$ следует заменить на заданную мощность излучения $P(t)$.

Для построения системы неравенств рассмотрим интегральное уравнение энергии и уравнение вириала. В случае расходящейся детонационной волны в области за ней

$$E \equiv T+U-kV = E_0 + \int_0^t \left[\dot{M}\left(\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{p}{(\gamma_1-1)\rho} - \frac{kM}{R} + Q(M)\right) - 4\pi R^2 \dot{r} p\right]_1 d\tau \tag{1.3}$$

$$\Psi \equiv 2T + 3(\gamma_2-1)U - kV = {}^1/_2 (\dot{I} - R^2\dot{M})^{\boldsymbol\cdot} - R(\dot{r}\dot{M} - 4\pi R^2 p)_1 \tag{1.4}$$

$$T=\frac{1}{2}\int_0^M \dot{r}^2\,dm,\qquad U=\int_0^M \frac{f(m)\,dm}{(4\pi r^2 r')^{\gamma_2-1}}$$

$$V=\int_0^M \frac{m\,dm}{r},\qquad I=\int_0^M r^2\,dm \tag{1.5}$$

Здесь T, U, $-kV$ — кинетическая, внутренняя и потенциальная энергии газа, I — момент инерции, постоянная E_0 — энергия взрыва, $R=r(M,\ t)$.

На основании неравенства Гёльдера [5] имеют место простые оценки [3, 4]

$$T\geqslant T_-=\frac{(\dot{I}-R^2\dot{M})^2}{8I},\qquad V\geqslant\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2}\frac{M^{5/2}}{I^{1/2}} \tag{1.6}$$

$$U\geqslant\frac{F}{R^{3(\gamma_2-1)}},\qquad F=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\gamma_2-1}\left[\int_0^M f^{1/\gamma_2}(m)\,dm\right]^{\gamma_2} \tag{1.7}$$

Учитывая, что удельная энтропия растет со временем на ударных волнах, которые могут двигаться за передней детонационной волной, из условий на разрыве (1.2) получим

$$f\geqslant\frac{(\gamma_2+\gamma_2 a_1^2/(\gamma_1 D^2)-g)^{\gamma_2}(1+a_1^2/(\gamma_1 D^2)+g)D^2}{(\gamma_2-1)(\gamma_2+1)^{\gamma_2+1}\rho_1^{\gamma_2-1}} \tag{1.8}$$

$$a_1^2=\gamma_1 p_1/\rho_1,\quad D=\dot{R}-\dot{r}_1$$

$$g\left(\frac{a_1^2}{D^2},\frac{2(\gamma_2^2-1)Q}{D^2}\right)=$$

$$=\left[\left(1-\frac{\gamma_2 a_1^2}{\gamma_1 D^2}\right)^2+\frac{2(\gamma_2+1)(\gamma_1-\gamma_2)a_1^2}{\gamma_1(\gamma_1-1)D^2}-\frac{2(\gamma_2^2-1)Q}{D^2}\right]^{1/2}$$

При отсутствии детонации использование (1.6)—(1.8) вместе с уравнениями (1.3), (1.4) дает систему интегродифференциальных неравенств, содержащих M и I, удовлетворительную в случае отсутствия гравитации [3, 4]. Наличие гравитации осложняет задачу из-за отрицательности гравитационной потенциальной энергии $-kV$. Анализ влияния гравитации и вывод последующих неравенств (1.9)—(1.12) приведены в работе [6].

Для вывода системы неравенств необходимо оценить величину V сверху. При $\gamma_2>4/3$ с помощью тройного неравенства Гёльдера [5] и интегрирования по частям можно получить

$$U\geqslant GV^{4(\gamma_2-1)}\left(V-\frac{M^2}{2R}\right)^{1-\gamma_2} \tag{1.9}$$

$$G=\frac{1}{(8\pi)^{\gamma_2-1}}\left\{\int_0^M\left[\frac{m^{2(\gamma_2-1)}}{f(m)}\right]^{1/(3\gamma_2-4)}dm\right\}^{4-3\gamma_2}$$

Неравенство (1.9) в сочетании с уравнением энергии (1.3) дает алгебраическое неравенство, которое приводит к двухсторонней оценке величины V

$$\max\left(V_-,\frac{M^2}{2R}\right)<V<V_+ \tag{1.10}$$

В пределе при $\gamma_2={}^4/_3$ в оценке (1.9)

$$G=\left[\operatorname*{essmax}_{[0,M]}\frac{(8\pi)^{1/3}m^{2/3}}{f(m)}\right]^{-1} \tag{1.11}$$

Сопоставляя интегральные уравнения (1.3), (1.4) и используя неравенства (1.6)–(1.11), при ${}^4/_3\leqslant\gamma_2\leqslant{}^5/_3$ имеем

$$\psi\geqslant3(\gamma_2-1)E+(5-3\gamma_2)T_-+(3\gamma_2-4)kV_-,\ \psi\leqslant2E+(3\gamma_2-5)U_-+kV_+ \tag{1.12}$$

$$\gamma_2>{}^5/_3:\ \psi\geqslant2E+(3\gamma_2-5)U_-+kV_-$$

$$\psi\leqslant3(\gamma_2-1)E+(5-3\gamma_2)T_-+(3\gamma_2-4)kV_+$$

Здесь U_- — максимальная из нижних оценок U (1.7), (1.9), V_-, V_+ — нижняя и верхняя оценки для V. При $\gamma_2={}^5/_3$ оценки V_-, V_+ явно находятся с помощью решения квадратного уравнения.

В практически важном случае движения детонационной волны в покоящемся газе с целью упрощения полученных неравенств дадим оценку F, полностью представленную в конечном виде. При этом ограничимся случаем $\gamma_1\geqslant\gamma_2$, что позволяет действовать элементарными методами.

Введем обозначение

$$\Phi(x,y)\equiv\left[\gamma_2+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}x^{\gamma_2}-g(x^{\gamma_2},y^{\gamma_2})\right]\left[1+\frac{x^{\gamma_2}}{\gamma_1}+g(x^{\gamma_2},y^{\gamma_2})\right]^{1/\gamma_2}$$

$$x=\left(\frac{a_1}{D}\right)^{2/\gamma_2},\qquad y=\left[\frac{2(\gamma_2^2-1)Q}{D^2}\right]^{1/\gamma_2}$$

Функция $\Phi(x, y)$ при $\gamma_1\geqslant\gamma_2$ выпукла.

Используя (1.8), а также выпуклость $\Phi(x, y)$, при $\gamma_1\geqslant\gamma_2$ получим по теореме Иессена [5] следующую оценку:

$$F\geqslant\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\gamma_2-1}\frac{Z^{\gamma_2}[\gamma_2+\gamma_2X^{\gamma_2}/\gamma_1-g(X^{\gamma_2},Y^{\gamma_2})]^{\gamma_2}[1+X^{\gamma_2}/\gamma_1+g(X^{\gamma_2},Y^{\gamma_2})]}{(\gamma_2-1)(\gamma_2+1)^{\gamma_2+1}} \tag{1.13}$$

$$Z=4\pi\int\limits_0^R D^{2/\gamma_2}\rho_1^{1/\gamma_2}r^2\,dr\geqslant\frac{W^{(\gamma_2+2)/\gamma_2}}{t^{2/\gamma_2}}$$

$$W=(4\pi)^{\gamma_2/(\gamma_2+2)}\int\limits_0^R\rho_1^{1/(\gamma_2+2)}\,r^{2\gamma_2/(\gamma_2+2)}\,dr$$

$$X=\frac{4\pi}{Z}\int\limits_0^R a_1^{2/\gamma_2}\rho_1^{1/\gamma_2}r^2\,dr,\qquad Y=\frac{4\pi}{Z}\int\limits_0^R[2(\gamma_2^2-1)Q]^{1/\gamma_2}\rho_1^{1/\gamma_2}r^2\,dr$$

Оценка Z может быть использована в силу монотонности правой части (1.13).

Далее для простоты будем считать $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$, $Q=\mathrm{const}$.

2. Для иллюстрации метода рассмотрим некоторые известные точные решения автомодельной задачи о распространении сильной детонационной волны в покоящемся газе при отсутствии гравитации [7]. Решение уравнений (1.1) перед детонационной волной имеет вид

$$r=\left(\frac{3-\omega}{4\pi}\right)^{1/(3-\omega)}\left(\frac{m}{A}\right)^{1/(3-\omega)},\qquad\rho=\frac{A}{r^\omega},\qquad p=0 \tag{2.1}$$

где A — соответствующая размерная постоянная.

В силу автомодельности $R(t)=Q^{1/2}R_1t$. Использование уравнений (1.3), (1.4) и неравенств (1.6)–(1.8) дает следующую оценку для безразмерного радиуса детонационной волны.

При $\gamma={}^5/_3$, $\omega=2$ $1{,}886\leqslant R_1\leqslant 2{,}055$. Точное решение дает $R_1=2$, при этом относительные погрешности нижней и верхней оценки соответственно равны $\Delta_-\approx 5{,}7\%$, $\Delta_+\simeq 2{,}7\%$.

При $\omega={}^5/_4$, $\gamma={}^5/_3$ в точном решении [7] осуществляется режим Чепмена — Жуге, а неравенства дают оценку $1{,}886\leqslant R_1\leqslant 1{,}972$. Относительная погрешность верхней оценки $\Delta_+\simeq 4{,}6\%$, а нижняя оценка точная.

Следует отметить, что в отличие от задач газовой динамики без детонации здесь существенную роль для оценки закона движения детонационной волны может играть неравенство, связанное с условием Чепмена — Жуге.

3. Применим развитый выше метод интегральных неравенств к анализу ряда новых автомодельных задач динамики гравитирующего газа. Рассмотрим задачу о движении детонационной волны по равновесному состоянию газа. В случае равновесия газа решение уравнений (1.1) перед детонационной волной имеет следующий вид [8]:

$$r=\frac{m}{4\pi A},\qquad p=\frac{2\pi A^2k}{r^2},\qquad \rho=\frac{A}{r^2} \tag{3.1}$$

где A — соответствующая размерная постоянная.

В силу автомодельности рассматриваемой задачи

$$R(t)=(Ak)^{1/2}R_1t,\ I=A^{5/2}k^{3/2}I_1t^3,\ Q=Q_1Ak \tag{3.2}$$

Для определенности положим $\gamma={}^5/_3$, а все величины будем считать безразмерными. Тогда из (1.3), (1.4) и (3.1), (3.2) следует

$$E=4\pi(Q_1-\pi)R_1,\ \psi=3I_1-4\pi R_1^3+8\pi^2R_1 \tag{3.3}$$

Из (1.9), (3.1) и (3.2) получим

$$G=\frac{0{,}00108}{\pi^3}HR_1 \tag{3.4}$$

$$H(R_1^2,Q_1)=\left[\frac{5}{3}+\frac{10\pi}{3R_1^2}-\left(\left(1-\frac{10\pi}{3R_1^2}\right)^2-\frac{32Q_1}{9R_1^2}\right)^{1/2}\right]^{5/3}\times$$
$$\times\left[1+\frac{2\pi}{R_1^2}+\left(\left(1-\frac{10\pi}{3R_1^2}\right)^2-\frac{32Q_1}{9R_1^2}\right)^{1/2}\right] \tag{3.5}$$

Наконец, из системы (1.12) при использовании приведенных выше неравенств, а также (3.1)—(3.5) для R_1 и I_1 получим систему трансцендентных неравенств, содержащих задаваемый при постановке задачи параметр Q_1

$$\begin{gathered}\Lambda+B\leqslant 2R_1(3Q_1-4\pi)+4R_1^3+\frac{5}{4}K\\ \frac{4\pi}{15}[R_1^3+4(Q_1-3\pi)R_1+\Lambda+B]\leqslant I_1\leqslant\frac{\pi}{3}[4R_1^3+8R_1(Q_1-2\pi)+K]\\ B=[(R_1^3+4(Q_1-3\pi)R_1+\Lambda)^2+15R_1^6]^{1/2}\\ K=\frac{[1+(1+4GE)^{1/2}]\pi^2}{0{,}00216\,R_1H},\qquad \Lambda=0{,}343\,R_1^3H\end{gathered} \tag{3.6}$$

В случае $\gamma={}^4/_3$ оценки несколько улучшаются в силу отсутствия необходимости решать нелинейное уравнение для V. В этом случае после некоторых преобразований получаем следующую систему трансцендентных неравенств:

$$\begin{gathered}4R_1^2+6Q_1+31{,}16\pi\geqslant 1{,}745H_1R_1^2+N\\ \frac{4\pi R_1}{15}(R_1^2+4Q_1+N)\leqslant I_1\leqslant\frac{\pi R_1}{3}(4R_1^2+8Q_1+24{,}93\pi-1{,}396H_1R_1^2)\end{gathered} \tag{3.7}$$

$$N=[(R_1^2+4Q_1)^2+15R_1^4]^{1/2}$$

$$H_1(R_1^2,Q_1)=\left[\frac{4}{3}+\frac{8\pi}{3R_1^2}-\left(\left(1-\frac{8\pi}{3R_1^2}\right)^2-\frac{14Q_1}{9R_1^2}\right)^{1/2}\right]^{4/3}\times$$
$$\times\left[1+\frac{2\pi}{R_1^2}+\left(\left(1-\frac{8\pi}{3R_1^2}\right)^2-\frac{14Q_1}{9R_1^2}\right)^{1/2}\right]$$

Некоторые численные решения систем неравенств (3.6), (3.7) при некоторых Q_1 приведены ниже.

Здесь $\Delta_\pm$ означает среднюю относительную погрешность. R_{1-}, I_{1-}, R_{1+}, I_{1+} — соответственно нижние и верхние оценки для R_1 и I_1.

γ	Q_1	R_{1-}	R_{1+}	I_{1-}	I_{1+}	$\Delta_\pm$, % (R_1)	$\Delta_\pm$, % (I_1)
$5/3$	π	5,31	10,31	707,5	4996,7	32	75
	2π	6,37	10,5	1335	5483	24,5	60,8
$4/3$	π	4,204	6,39	370	1179	20,6	52,2
	2π	4,853	6,63	618,3	1404	15,4	38,8

4. Рассмотрим автомодельную задачу о движении детонационной волны при параболическом сжатии газа с нулевым давлением. В частном случае, когда за детонационной волной формируется состояние равновесия, данная задача имеет точное решение [9].

Пусть начальное движение газа определяется размерной постоянной k и величиной q размерности квадрата скорости. В этом случае уравнения (1.1) интегрируются и решение перед детонационной волной имеет вид

$$r=\frac{km}{q}\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}(\xi_0-\xi)^{2/3},\quad \rho=\frac{1}{6\pi k(t_0-t)(3t_0-t)},\quad p=0 \qquad (4.1)$$

$$\xi=\frac{q^{1/2}t}{km},\quad t_0(m)=\frac{k\xi_0 m}{q^{1/2}}$$

где ξ_0 — некоторая произвольная постоянная.

В силу автомодельности задачи

$$R(t)=q^{1/2}R_1t,\ I=(q^{5/2}/k)I_1t^3,\ Q=Q_1q \qquad (4.2)$$

Положим $\gamma=4/3$ и в силу наличия произвола в выборе параметра ξ_0 (переопределение q) наложим связь $\xi_0=\xi_1+\sqrt{2/3}$, где ξ_1 — значение параметра ξ на детонационной волне. Используя (1.3), (1.4), (4.1), (4.2), а также неравенства (1.6)—(1.9), (1.11) и (1.12), получим при $Q_1>0{,}26$, что обеспечивает неравенство $G>k$, необходимое для получения оценки V, следующую систему неравенств, содержащих задаваемый параметр Q_1, причем $R_1=1/\xi_1$:

$$4R_1^3-2^{1/2}R_1^2+(6Q_1+5{,}29)R_1\geqslant 1{,}745L+R_1S$$
$$\frac{R_1}{15}(4Q_1+R_1^2-4\cdot 2^{1/2}R_1+S)\leqslant I_1\leqslant\frac{1}{3}(R_1^3-2^{1/2}R_1^2+2Q_1R_1+1{,}058R_1-0{,}349L) \qquad (4.3)$$

$$L=\left[\frac{4}{3}-\left(1-\frac{14Q_1}{9(R_1+2^{1/2})^2}\right)^{1/2}\right]^{4/3}\left[1+\left(1-\frac{14Q_1}{9(R_1+2^{1/2})^2}\right)^{1/2}\right](2^{1/2}+R_1)^{7/3}R_1^{2/3}$$

$$S=[(4Q_1+R_1^2-4\cdot 2^{1/2}R_1)^2+15R_1^4]^{1/2}$$

Результаты решения системы неравенств (4.3) приведены ниже, где точному решению отвечают значения $Q_1=0{,}5$, $R_1\simeq 0{,}3536$, $I_1\simeq 0{,}0148$:

Q_1	R_{1-}	R_{1+}	I_{1-}	I_{1+}	Δ_+ (R_1)	Δ_- (R_1)	$\Delta_\pm$ (R_1)	Δ_+ (I_1)	Δ_- (I_1)	$\Delta_\pm$ (I_1)
0,3	0,15	0,5	0,01	0,09	—	—	54	—	—	80
0,5	0,2	0,48	0,01397	0,024	35,7	43,4	41	62,1	5,6	26
10	2,53	3,89	12,25	20,13	—	—	21	—	—	24,3

Следует отметить, что неравенство, связанное с условием Чепмена — Жуге, дает нижнюю оценку для R_1 лишь при $Q_1 > {}^9/_7$. Оценки несколько улучшаются при больших значениях параметра Q_1.

Приведенные примеры автомодельных решений, исследование которых полезно для изучения изотермических асимптотик более сложных задач и выяснения области применимости метода интегральных неравенств, показывают, что выведенные оценки могут обеспечить практически хорошую точность в определении закона движения детонационных волн в гравитирующем газе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванова Л. Н., Имшенник В. С., Чечеткин В. М.* Термоядерный взрыв вырожденного углеродного ядра звезды. М., 1975. 63 с. (Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 31).
2. *Arnett W. D.* A possible model of supernovae: Detonation of C[12]. Astrophys. and Space Sci., 1969, v. 5, № 2, p. 180—212.
3. *Голубятников А. Н.* Об оценках движения ударных волн в одномерных нестационарных задачах газовой динамики.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 4, с. 800—803.
4. *Голубятников А. Н.* Интегральные неравенства в задачах газовой динамики.— В кн.: Некоторые вопросы механики сплошных сред. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 213—228.
5. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.
6. *Голубятников А. Н., Каламкаров А. Л.* Интегральные неравенства в динамике гравитирующего газа.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5, с. 169—173.
7. *Яворская И. М.* Решение некоторых задач о детонации в среде с переменной плотностью.— Докл. АН СССР, 1956, т. 111, № 4, с. 783—786.
8. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 448 с.
9. *Голубятников А. Н.* О сферически-симметричном движении гравитирующего газа при наличии сильной ударной волны.— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 5, с. 1067—1070.

Москва

Поступила в редакцию 20.VI.1983