МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1984

УДК 532.5.013.4 : 536.24

КОНВЕКЦИЯ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЯХ С УЧЕТОМ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

БОГОЯВЛЕНСКИЙ А. Б.

Исследование конвекции во вращающихся сферических слоях с центральным гравитационным полем $g(r)$ представляется весьма важным для изучения глобальных движений в атмосферах больших планет и конвективных оболочках звезд. Этим вопросам последние годы посвящено значительное число работ (см., например, обзор [1]), однако во всех проведенных численных и аналитических исследованиях пренебрегается центробежной конвективной силой. В некоторых случаях, например на больших планетах, центробежная сила может достигать значительной величины $\sim 0{,}1\,g$ и оказывать существенное влияние на конвективное движение.

В работе изучено возникновение конвекции в медленно вращающихся сферических слоях с учетом центробежных сил. Показано, что действие центробежной силы приводит к появлению в слое осесимметричного течения, на пределе устойчивости которого могут возникать конвективные ячейки бананообразной или тороидальной формы. Последние возможны только в слоях с недеформируемыми границами при достаточно больших значениях числа Фруда. Независимо от формы слоя и величины центробежной силы бананообразные ячейки волнообразно распространяются в сторону, обратную вращению. В случае недеформируемых границ центробежная сила стабилизирует движение жидкости по сравнению со случаем покоящегося слоя. Деформация под действием центробежной силы одной или обеих границ приводит к дестабилизации основного течения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим возникновение конвекции в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей сферический слой $R_1 \leqslant R \leqslant R_2$, вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси z. На жидкость действует центрально-симметричное гравитационное поле. На внутренней и внешней поверхностях слоя поддерживаются постоянные, но различные температуры: T_1 и T_2 соответственно. Границы слоя считаем свободными от напряжений. Движение жидкости описывается системой уравнений гидродинамики в приближении Буссинеска, однако в отличие от обычно рассматриваемого случая будем учитывать действие на жидкость центробежной конвективной силы. Тогда уравнения и граничные условия в безразмерном виде во вращающейся сферической системе координат $(r,\ \theta,\ \varphi)$ примут вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \mathrm{Pr}^{-1}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla P + \Delta \mathbf{v} + \mathrm{Ra}\frac{r_0^2}{r^2}T'\mathbf{e}_r + {}$$

$$+ \mathrm{Ra}\,\mathrm{Re}^2 A T'\mathbf{e}_z \times [\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}] - 2\,\mathrm{Re}[\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}]$$

$$\mathrm{Pr}\frac{\partial T'}{\partial \tau} + \mathbf{v}\nabla T' = \Delta T'; \quad \nabla \mathbf{v} = 0, \quad v_r = \tau_{r\varphi} = \tau_{r\theta} = 0 \quad (r = r_\sigma, r_\Sigma) \qquad (1.1)$$

$$T' = \frac{T - T_1}{T_1 - T_2}; \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \quad \mathrm{Ra} = \frac{g(T_1 - T_2)\beta h^3}{\nu\chi}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\Omega h^2}{\nu}, \quad \mathrm{Re}^2 A r_0 = \frac{\Omega^2 R_1}{g} = \mathrm{Fr}, \quad A = \frac{\nu^2}{g h^3}$$

$$r_0=\frac{R_1}{h}, \qquad h=R_2-R_1$$

где $\mathbf{v}$, r, T' и τ — безразмерные скорость, радиальная координата, температура и время соответственно; в ∇P включены все потенциальные силы; $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{r\theta}$ — компоненты тензора напряжений; $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_z$ — единичные векторы, направленные по r и z; r_σ и r_Σ — безразмерные радиусы внутренней и внешней границ слоя; Pr, Ra, Re, Fr — числа Прандтля, Рэлея, Рейнольдса и Фруда соответственно; β, ν и χ — коэффициенты теплового расширения, вязкости и температуропроводности; g и ρ_0 — ускорение силы тяжести и плотность на внутренней границе слоя. За характерные масштабы длины, времени, скорости и давления приняты соответственно h, h^2/ν, χ/h, $\rho_0\nu\chi/h^2$.

Учет центробежной силы в уравнениях движения, характеризуемой предпоследним слагаемым в правой части уравнения импульсов, приводит к следующим важным эффектам: во-первых, в этом случае равновесие жидкости с градиентом температуры, описываемым уравнением теплопроводности, оказывается невозможным и возникает осесимметричное течение с характеристиками, определяемыми согласно (1.1); во-вторых, в случае свободных границ центробежная сила вызывает их деформацию и, в-третьих, в уравнениях для линейных возмущений появляется дополнительный член, соответствующий конвективной центробежной силе. Для исследования устойчивости основного течения представим, как обычно, характеристики движения в виде суммы характеристик основного течения $\mathbf{U}(r, \theta)$, $T(r, \theta)$ и нестационарных малых возмущений $\mathbf{u}$ и t

$$\mathbf{v}=\mathbf{U}(r, \theta)+\exp(\sigma\tau)\mathbf{u}(r, \theta, \varphi), \qquad T'=T(r, \theta)+\exp(\sigma\tau)t(r, \theta, \varphi)$$

(возмущения записаны в нормальных модах с декрементом σ).

Поскольку поле скоростей соленоидально, $\mathbf{U}$ и $\mathbf{u}$ можно представить в виде [2]

$$\mathbf{U}=\operatorname{rot}\mathbf{r}W+\operatorname{rot}^2\mathbf{r}S, \qquad \mathbf{u}=\operatorname{rot}\mathbf{r}w+\operatorname{rot}^2\mathbf{r}s \tag{1.2}$$

Применив к первому уравнению (1.1) операторы $\mathbf{r}\operatorname{rot}$, $\mathbf{r}\operatorname{rot}^2$ и использовав выражение (1.2), получим для основного течения и возмущений две системы уравнений, отличающиеся от аналогичных уравнений в [4] наличием центробежных членов.

Задача состоит в том, чтобы на основании этих уравнений и граничных условий определить характеристики основного течения, предел линейной устойчивости Ra_c, а также форму критической конвекции.

Будем считать, что скорость вращения слоя достаточно мала и слой достаточно тонок, т. е. параметры Re и r_0^{-1} можно считать малыми и представить характеристики основного и возмущенного течений S, W, T, s, w, t, Ra, σ в виде рядов по целым положительным степеням Re и r_0^{-1}

$$f=\sum_i f_i\,\mathrm{Re}^i, \qquad f_i=\sum_j f_{ij}r_0^{-j} \tag{1.3}$$

Подставляя выражения типа (1.3) в уравнения, получим последовательность систем линейных уравнений и соответствующих им граничных условий.

Решение задачи для возмущений, исходя из вида левых частей уравнений, удобно искать в виде произведения сферической гармоники Y_l^m на зависящую от радиуса амплитуду

$$s_i(r, \theta, \varphi)=s_i(r)Y_l^m, \quad t_i(r, \theta, \varphi)=t_i(r)Y_l^m, \quad Y_l^m=P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{1.4}$$

В случае недеформируемых границ $r_\sigma=r_0$, $r_\Sigma=r_0+1$ и граничные условия для основного течения и возмущений имеют вид

$$T_0|_{r=r_0}=0, \qquad T_0|_{r=r_0+1}=1; \qquad S_i=S_i''=\left(\frac{W_i}{r}\right)'=T_{i+1}=s_i=$$

$$=s_i''=t_i=\left(\frac{w_i}{r}\right)'=0 \qquad (i=0,1,2\ldots) \qquad (r=r_0, r_0+1) \qquad (1.5)$$

Рассмотрим деформацию вращающегося объема под действием центробежной силы. Пусть давление вне объема постоянно и равно p_e. Обозначим через $R_\Sigma=R_2\xi(\theta)$ деформированную внешнюю границу слоя и запишем баланс сил на этой границе в безразмерном виде

$$\frac{(p-p_e)R_2}{\rho g R_1^2}+\frac{1}{\xi}+\frac{\mathrm{Fr}(r_0+1)^3}{2r_0^3}\xi^2\sin^2\theta=0$$

Кроме того, функция $\xi(\theta)$ должна удовлетворять условию нормировки, обусловленному законом сохранения массы. Поскольку в реальных условиях числа Фруда достаточно малы, $\xi(\theta)$ можно разложить в ряд по Fr и, учитывая два первых члена разложения, получить

$$r_\Sigma\equiv\frac{R_\Sigma}{h}=(r_0+1)\left[1-\frac{\mathrm{Re}^2 A(r_0+1)^3P_2(\cos\theta)}{3r_0^2}\right] \qquad (1.6)$$

Здесь $P_2(\cos\theta)$ — полином Лежандра.

Если внутренняя граница также деформируется, то для нее получается аналогичное выражение

$$r_\sigma=r_0[1-\mathrm{Re}^2 A r_0 P_2(\cos\theta)/3] \qquad (1.7)$$

Разложим искомые функции вблизи границ в ряды: сначала в ряды Тейлора в окрестностях точек r_0 и r_0+1, а затем в ряды, аналогичные (1.3). Подставим в эти разложения (1.6), (1.7) и, сравнивая выражения одного порядка малости, получим граничные условия для членов разложений искомых функций. Заметим, что эти условия в нулевом и первом приближении по Re не отличаются от условий (1.5).

Далее будут рассмотрены три случая: I — границы слоя не деформируются и сохраняют сферическую форму, II — деформируется только внешняя граница, III — деформируется внешняя и внутренняя границы.

Для изучения влияния центробежной силы на возникновение конвекции сделаем дополнительное предположение о величине числа Фруда. В случаях I и III $\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Ar}_0=\mathrm{Fr}\sim\mathrm{Re}^\alpha$. В случае II необходимо наложить более сильное ограничение на величину числа Фруда (поскольку деформация внешней границы должна быть мала по сравнению с толщиной слоя): $\mathrm{Re}^2 A r_0^2=\mathrm{Fr}\, r_0\sim\mathrm{Re}^\beta$.

Очевидно, что решение задачи зависит от диапазонов изменения параметров α или β и различно в следующих трех интервалах: 1) — $0<\alpha$, $\beta<2$; 2) — α, $\beta=2$; 3) — α, $\beta>2$.

В случае *3* влиянием центробежной силы можно пренебречь, и задача сводится к рассмотренной ранее в [3].

2. Слой с недеформируемыми границами. Рассмотрим сначала случай I — 2. Характеристики основного течения для двух первых приближений по Re легко определяются и имеют вид

$$T_0=\frac{r_0(r_0+1)}{r}-r_0-1, \qquad S_0=W_0=S_1=W_1=T_1=0 \qquad (2.1)$$

Величины S_2 и T_2 определяются из следующей системы уравнений и граничных условий:

$$L^2\Delta W_2=0, \qquad L^2\Delta^2 S_2-\mathrm{Ra}_0\frac{r_0^2}{r^3}L^2T_2=-\mathrm{Ra}_0 A M^2 T_0, \qquad \frac{1}{r}\frac{dT_0}{dr}L^2S_2-\Delta T_2=0$$

$$L^2=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$M^2=\sin^2\theta L^2+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial\theta}-4\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+2P_2(\cos\theta)r\frac{\partial}{\partial r}$$

$$S_2=\frac{\partial^2 S_2}{\partial r^2}=T_2=0\qquad(r=r_0,\ r_0+1)\tag{2.2}$$

Форма правых частей уравнений и граничных условий позволяет искать решение в виде

$$S_2(r,\ \theta)=S_2(r)P_2(\cos\theta),\qquad T_2(r,\ \theta)=T_2(r)P_2(\cos\theta)\tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в (2.2), получим

$$T_2(r)\sim\mathrm{Ra}_0A,\qquad S_2(r)\sim\mathrm{Ra}_0Ar_0\tag{2.4}$$

Используя (1.4), (2.1), запишем системы уравнений для возмущений

$$L^2(\Delta-\sigma_0)w_i(r,\ \theta,\ \varphi)=f_i^\circ(r,\ \theta,\ \varphi)\tag{2.5}$$

$$l(l+1)D_l(D_l-\sigma_0)s_i(r)-l(l+1)\frac{r_0^2}{r^3}\mathrm{Ra}_0\,t_i(r)=f_i^1(r)$$

$$-l(l+1)\frac{r_0(r_0+1)}{r^3}s_i(r)-(D_l-\mathrm{Pr}\,\sigma_0)t_i(r)=f_i^2(r)$$

$$D_l=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}\tag{2.6}$$

Правые части этих уравнений выражаются через искомые функции предыдущих приближений и приведены в Приложении.

Для однородной задачи (2.5), (2.6), (1.5) $w_0=0$ и справедлив принцип смены устойчивости [2], т. е. $\sigma_0=0$.

Разложим искомые функции, коэффициенты и правые части уравнений (2.6) в ряды по r_0^{-1}. Тогда задача в нулевом приближении по r_0^{-1} совпадает с задачей для плоского горизонтального слоя [2], имеющей решение

$$s_{00}=\sin\pi(r-r_0),\qquad t_{00}=\frac{r_0}{3}\sin\pi(r-r_0),\qquad \mathrm{Ra}_{00}=\frac{27}{4}\pi^4,\qquad \frac{l(l+1)}{r_0^2}=\frac{\pi^2}{2}\tag{2.7}$$

Запишем условие разрешимости задачи в первом приближении по r_0^{-1} и нулевом по Re.

$$\mathrm{Ra}_{01}r_0^{-1}\langle t_{00},\ s_{00}\rangle-\langle D_{l1}^2s_{00},\ s_{00}\rangle-3\mathrm{Ra}_{00}r_0^{-1}\langle(r-r_0)t_{00},\ s_{00}\rangle+$$
$$+\mathrm{Ra}_{00}\langle D_{l1}t_{00},\ t_{00}\rangle/l(l+1)+\dot{\mathrm{R}}\mathrm{a}_{00}r_0^{-1}\langle[1-3(r-r_0)t_{00}],\ t_{00}\rangle=0$$

$$D_{l0}=\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r_0^2},\qquad D_{l1}=2\frac{d}{dr}+2\frac{l(l+1)}{r_0^2}(r-r_0)$$

$$D_{l1}^2=2D_{l0}D_{l1};\qquad \langle f_1,f_2\rangle=\int_{r_0}^{r_0+1}f_1(r)f_2(r)\,dr$$

После подстановки в это уравнение решения (2.7) найдем, что $\mathrm{Ra}_{01}=\mathrm{Ra}_{00}$. Поскольку все Ra_{0j} не зависят от m, определение формы критической конвекции на основе решения задачи в нулевом приближении по Re невозможно.

Выражения для s_{01} и t_{01} имеют вид

$$s_{01}=\frac{r-r_0}{2}\sin\pi(r-r_0)+\frac{\pi}{2}(r-r_0)(1+r_0-r)\cos\pi(r-r_0)$$

$$t_{01}=\frac{r_0}{3}\left[\frac{\sin\pi(r-r_0)}{3}-\frac{(r-r_0)\sin\pi(r-r_0)}{2}-\frac{\pi}{2}(r-r_0)(r-r_0-1)\cos\pi(r-r_0)\right]$$

Задача определения w_{10}, s_{10}, t_{10}, σ_{10}, Ra_{10} ничем не отличается от соответствующей задачи в [3]. Поэтому приведем лишь основные результаты вычислений

$$\mathrm{Ra}_{10}=0,\qquad \sigma_{10}=\frac{2im}{l(l+1)(\mathrm{Pr}+1)}$$

Кроме того, на основании (2.6), (1.5) легко показать, что $\mathrm{Ra}_{1j}=0$ при $j\geqslant 0$. Таким образом, рассмотрение первых двух приближений по Re оставляет параметр m не определенным. Эта неопределенность снимается при рассмотрении следующего приближения по Re и нулевого по r_0^{-1} ($i=2$, $j=0$). Параметр Ra_{20} оказывается зависящим одновременно от l и m. Минимизация по m выражения для $\mathrm{Ra}_{20}(l, m)$ позволяет определить значение параметра m и, следовательно, полностью определить форму течения, реализуемого на пределе устойчивости. Условие разрешимости задачи для s_{20}, t_{20} записывается в виде

$$l(l+1)\sigma_{20}\langle D_{l0}s_{00}, s_{00}\rangle+l(l+1)\sigma_{10}\langle D_{l0}s_{10}, s_{00}\rangle-2im\langle D_{l0}s_{10}, s_{00}\rangle-$$
$$-\mathrm{Ra}_{00}\mathrm{Pr}\sigma_{10}\langle t_{10}, t_{00}\rangle-\mathrm{Ra}_{00}\mathrm{Pr}\sigma_{20}\langle t_{00}, t_{00}\rangle+l(l+1)\mathrm{Ra}_{20}r_0^{-1}\langle t_{00}, s_{00}\rangle-$$
$$-\mathrm{Pr}^{-1}\langle G_{l0}^m, s_{00}\rangle-2\langle H_{l0}^m, s_{00}\rangle-\mathrm{Ra}_{00}A\langle I_{l0}^m, s_{00}\rangle-\mathrm{Ra}_{00}\langle J_{l0}^m, t_{00}\rangle=0 \qquad (2.8)$$

Выражения для G_l^m, H_l^m, I_l^m, J_l^m приведены в Приложении. Имеет место следующая оценка

$$\|M^2[t_{00}Y_l^m]\|\approx\|t_{00}\sin^2\theta L^2Y_l^m\|\approx\frac{l(l+1)}{2}\left[1+\left(\frac{m}{l}\right)^2\right]t_{00}$$

На основании этой оценки для функции $\langle I_{l0}^m(t_{00}), s_{00}\rangle$ получим

$$\langle I_{l0}^m(t_{00}), s_{00}\rangle=\frac{l(l+1)}{2}\left[1+\left(\frac{m}{l}\right)^2\right]\langle t_{00}, s_{00}\rangle$$

Значение $\langle H_{l0}^m(w_{10}), s_{00}\rangle$ и явный вид G_l^m, J_l^m получены в [4]

$$\langle H_{l0}^m, s_{00}\rangle=l(l+1)\left[1-\left(\frac{m}{l}\right)^2\right]\mathrm{Ra}_*, \qquad \mathrm{Ra}_*\approx 8{,}985$$

$$\langle G_{l0}^m, s_{00}\rangle\sim S_2\langle t_{00}, s_{00}\rangle; \quad \langle J_{l0}^m, t_{00}\rangle\sim r_0^{-1}l(l+1)T_2\langle t_{00}, s_{00}\rangle$$

Подставляя эти выражения в (2.8), получим

$$\sigma_{20}=0, \qquad \mathrm{Ra}_{20}=\left[1-\left(\frac{m}{l}\right)^2\right]\mathrm{Ra}^*+\frac{\mathrm{Ar}_0\,\mathrm{Ra}_{00}}{2}\left[1+\left(\frac{m}{l}\right)^2\right]$$

Первый член в выражении для Ra_{20} обусловлен действием силы Кориолиса, а второй – действием конвективной центробежной силы на возмущения. В рассмотренном случае оба члена одного порядка малости. Поэтому при $\mathrm{Fr}>2\mathrm{Re}^2\mathrm{Ra}_*/\mathrm{Ra}_{00}$ минимум Ra_{20} достигается при $m=0$ и равняется $\mathrm{Ra}_{20\,\min}=\mathrm{Ra}_*+{}^1/_2\mathrm{Ar}_0\mathrm{Ra}_{00}$. При $\mathrm{Fr}<2\mathrm{Re}^2\mathrm{Ra}_*/\mathrm{Ra}_{00}$ $\mathrm{Ra}_{20\,\min}=\mathrm{Ar}_0\mathrm{Ra}_{00}$ $(m=l)$.

В случае 1 первым членом в выражении для Ra_{20} можно пренебречь. Тогда минимум Ra_{20} достигается при $m=0$ и равен $\mathrm{Ra}_{20\,\min}={}^1/_2\mathrm{Ar}_0\mathrm{Ra}_{00}$. Таким образом, при $\mathrm{Fr}>2\mathrm{Re}^2\mathrm{Ra}_*/\mathrm{Ra}_{00}$ критическая конвекция стационарна и имеет форму тороидальных ячеек. При $\mathrm{Fr}<2\mathrm{Re}^2\mathrm{Ra}_*/\mathrm{Ra}_{00}$ на пределе устойчивости реализуются трехмерные течения бананообразной структуры, которые распространяются волновым образом в азимутальном направлении противоположно вращению слоя с фазовой скоростью $\omega=-2\mathrm{Re}/[(l+1)(\mathrm{Pr}+1)]=\omega^*$.

Влияние центробежной силы на критическую конвекцию в случае вращающегося слоя с недеформируемыми сферическими границами заключается в следующем: 1) действие центробежной силы приводит к стабилизации основного течения жидкости по сравнению со случаем покоящегося слоя ($\mathrm{Ra}_c>\mathrm{Ra}_0$); 2) при достаточно большой величине центробежной силы форма критического течения меняется: на смену бананообразным ячейкам, распространяющимся волновым образом в сторону, противоположную вращению, приходят стационарные ячейки в виде торов.

3. Учет деформации границ слоя под действием центробежной силы. Рассмотрим случай II – 2. Граничными условиями задачи в первых двух приближениях по Re являются условия (1.5). Поэтому все решения в первых двух приближениях совпадают с решениями, полученными выше. Граничные условия для S_2, T_2, s_2, t_2 на внешней границе будут учитывать ее деформацию, а на внутренней останутся условия (1.5). Решение задачи для основного течения будем искать в виде (2.3). Тогда

$$T_{20}(r)=-\mathrm{Ar}_0^2(r-r_0)/3, \quad S_2\sim\mathrm{Ar}_0^2$$

Задачу определения s_{20}, t_{20} сведем к задаче с однородными граничными условиями, для чего представим искомые характеристики в виде сумм $s_{20}=s_{20}^*(r)+\varphi(r)$, $t_{20}(r)=t_{20}^*(r)+\psi(r)$, где s_{20}^*, t_{20}^* удовлетворяют однородным, а φ и ψ – следующим граничным условиям:

$$\varphi(r_0+1)=k_0\,\mathrm{Ar}_0^2\,s_{00}'(r_0+1)/3, \qquad \varphi''(r_0+1)=k_0\,\mathrm{Ar}_0^2\,s_{00}'''(r_0+1)/3$$

$$\psi(r_0+1)=k_0\mathrm{Ar}_0{}^2t_{00}'(r+1)/3,\quad \varphi(r_0)=\varphi''(r_0)=\psi(r_0)=0$$

$$k_0=\left[1-3\left(\frac{m}{l}\right)^2\right]\Big/4 \tag{3.1}$$

Условие разрешимости задачи для определения s_{20} и t_{20} имеет вид

$$\frac{\mathrm{Ar}_0{}^2}{3}k_0\left[\frac{l(l+1)}{r_0}\mathrm{Ra}_{00}\langle\varphi,t_{00}\rangle+\mathrm{Ra}_{00}\langle D_{l0}\psi,t_{00}\rangle-l(l+1)\langle D_{l0}{}^2\varphi,s_{00}\rangle+\right.$$

$$\left.+\frac{l(l+1)}{r_0}\mathrm{Ra}_{00}\langle\psi,s_{00}\rangle\right]+\langle f_{20}{}^1,s_{00}\rangle+\mathrm{Ra}_{00}\langle f_{20}{}^2,t_{00}\rangle=0 \tag{3.2}$$

Здесь $f_{20}{}^1$ и $f_{20}{}^2$ отличаются от соответствующих функций, определенных в п. 2, тем, что входящие в них выражения $G_{l0}{}^m$ и $J_{l0}{}^m$ вычислены с учетом условий (3.1).

Значения выражений, входящих в (3.2), приведены в Приложении. Подставив в (3.2) вычисленные значения и оценив все члены по порядку величины, получим

$$\sigma_{20}=0,\qquad \mathrm{Ra}_{20}=\left[1-\left(\frac{m}{l}\right)^2\right]\mathrm{Ra}_*+\mathrm{Ar}_0{}^2\frac{\mathrm{Ra}_{00}}{4}\left[1-3\left(\frac{m}{l}\right)^2\right]$$

Второй член в выражении для Ra_{20} обусловлен деформацией внешней границы, которая вызывает изменение основного течения жидкости и граничных условий для возмущений.

Очевидно, что в рассматриваемом случае 2, а также в случае 1 минимум Ra_{20} достигается при $m=l$ и равен $\mathrm{Ra}_{20\,\min}=-{}^1/_2\mathrm{Ar}_0{}^2\mathrm{Ra}_{00}$.

Таким образом, деформация внешней границы под действием центробежной силы приводит к дестабилизации движения жидкости ($\mathrm{Ra}_c<\mathrm{Ra}_0$), на пределе устойчивости независимо от величины центробежной силы реализуются бананообразные ячейки, распространяющиеся с фазовой скоростью $\omega=\omega^*$.

Деформация только внешней границы слоя возможна, например, когда планета имеет твердое ядро. При отсутствии твердого ядра может деформироваться как внешняя, так и внутренняя граница слоя.

Пусть в случае III $\alpha=2$, тогда решение задачи в первых двух приближениях по Re совпадает с решениями п. 2. Искомые функции второго приближения будут удовлетворять на внешней и внутренней границах условиям типа (3.1).

Характеристики основного течения легко определяются

$$S_{20}=S_{21}=0,\quad T_{20}=-{}^1/_3\mathrm{Ar}_0{}^2,\quad T_{21}=-{}^1/_3\mathrm{Ar}_0{}^2[2(r-r_0)+1],\quad S_2\sim S_{22}r_0{}^{-2}\sim\mathrm{Ar}_0$$

Как и прежде, разложим s_2, t_2, Ra_2, σ_2, а также коэффициенты уравнений (2.6) и граничных условий в ряды по $r_0{}^{-1}$. Из условия разрешимости задачи для s_{20}, t_{20} найдем

$$\sigma_{20}=0,\qquad \mathrm{Ra}_{20}=\left[1-\left(\frac{m}{l}\right)^2\right]\mathrm{Ra}_*+\frac{2}{3}\mathrm{Ar}_0\,\mathrm{Ra}_{00}\left[2-3\left(\frac{m}{l}\right)^2\right]$$

Заметим, что для определения σ_{20}, R_{20} требуется знание не только s_{00}, t_{00}, но и s_{01}, t_{01}, вычисленных в п. 2.

Второе слагаемое в выражении для Ra_{20} описывает влияние трех эффектов: первый обусловлен действием центробежной силы на возмущения, оказывает стабилизирующее действие на основное течение и связанный с ним вклад минимален при $m=0$; второй обусловлен влиянием деформации границ на основное течение, оказывает дестабилизирующее действие, связанный с ним вклад минимален при $m=0$; третий эффект обусловлен влиянием деформации границ на возмущения, дестабилизирует основное течение, вклад минимален при $m=l$. Суммарный эффект приводит к понижению устойчивости основного течения.

Во всех случаях 1—3 минимум Ra_{20} достигается при $m=l$ (бананообразные ячейки), $\omega=\omega^*$. В случаях 1 и 2 $\mathrm{Ra}_{20\,\min}=-{}^2/_3\mathrm{Ar}_0 Ra_{00}$.

4. Выводы. Результаты, полученные в п. 2—4, показывают, что в медленно вращающемся тонком слое жидкости на пределе устойчивости могут возникать течения либо с бананообразными ($m=l$), либо с тороидальными ($m=0$) конвективными ячейками, причем последние возможны только в областях с недеформируемыми сферическими границами при достаточно больших значениях числа Фруда. Независимо от формы слоя и величины центробежной силы бананообразные ячейки распространяются волновым образом в азимутальном направлении в сторону, обратную вращению слоя, с фазовой скоростью $\omega=-2\mathrm{Re}/[(l+1)(\mathrm{Pr}+1)]$.

В случае недеформируемых границ центробежная сила стабилизирует движение жидкости ($\mathrm{Ra}_c>\mathrm{Ra}_0$).

Деформация под действием центробежной силы одной или обеих границ приводит к дестабилизации основного течения ($\mathrm{Ra}_c<\mathrm{Ra}_0$).

Приближенные значения критического числа Рэлея в каждом конкретном случае приведены ниже.

I. Недеформируемые сферические границы, $\mathrm{Fr}\sim\mathrm{Re}^\alpha$

$$0<\alpha<2:\ \mathrm{Ra}_c=\mathrm{Ra}_0+\frac{\mathrm{Fr\,Ra}_{00}}{2},\qquad m=0\quad(\mathrm{Fr})$$

$$\alpha=2,\quad \mathrm{Fr}>\frac{2\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Ra}_*}{\mathrm{Ra}_{00}}:\ \mathrm{Ra}_c=\mathrm{Ra}_0+\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Ra}_*+\frac{\mathrm{Fr\,Ra}_{00}}{2},\quad m=0\quad(\mathrm{Re}^2)$$

$$\alpha=2,\quad \mathrm{Fr}<\frac{2\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Ra}_*}{\mathrm{Ra}_{00}}:\ \mathrm{Ra}_c=\mathrm{Ra}_0+\mathrm{Fr\,Ra}_{00},\quad m=l\quad(\mathrm{Re}^2)$$

$$\alpha>2:\ \mathrm{Ra}_c=\mathrm{Ra}_0,\quad m=l\qquad(\mathrm{Re}^2)$$

II. Деформируется только внешняя граница, $r_0\mathrm{Fr}\sim\mathrm{Re}^\beta$

$$0<\beta\leqslant2:\ \mathrm{Ra}_c=\mathrm{Ra}_0-r_0\mathrm{Fr}\mathrm{Ra}_{00}/2\qquad(r_0\mathrm{Fr})$$

$$\beta>2:\ \mathrm{Ra}_c=\mathrm{Ra}_0\qquad(\mathrm{Re}^2)$$

III. Деформируются внешняя и внутренняя границы, $\mathrm{Fr}\sim\mathrm{Re}^\alpha$

$$0<\alpha\leqslant2:\ \mathrm{Ra}_c=\mathrm{Ra}_0-2\mathrm{Fr}\mathrm{Ra}_{00}/3\qquad(\mathrm{Fr})$$

$$\alpha>2:\ \mathrm{Ra}_c=\mathrm{Ra}_0\qquad(\mathrm{Re}^2)$$

Здесь в скобках указан порядок учитываемых членов в разложениях Ra_c.

Приложение. Правые части уравнений (2.5), (2.6) при $i=0$, 1, 2 имеют следующий вид:

$$f_0{}^0=f_0{}^1=f_0{}^2=0;\qquad f_1{}^0=2Q[s_0(r)Y_l{}^m],\qquad f_1{}^1=l(l+1)\sigma_1D_ls_0(r)+l(l+1)\frac{r_0{}^2}{r^3}\mathrm{Ra}_1t_0(r)-$$

$$-2imD_ls_0(r),\qquad f_1{}^2=-\mathrm{Pr}\,\sigma_1t_0(r)$$

$$f_2{}^0=\sigma_1L^2w_1(r,\theta,\varphi)+\sigma_2L^2w_0(r,\theta,\varphi)-2\frac{\partial}{\partial\varphi}w_1(r,\theta,\varphi)+2Q[s_1(r)Y_l{}^m]-$$

$$-im\,\mathrm{Ra}_0\,\mathrm{Ar}_0\cos\theta t_0(r)+\mathrm{Pr}^{-1}\,\mathbf{r}\,\mathrm{rot}[(\mathbf{U}_2\nabla)\mathbf{u}_0+(\mathbf{u}_0\nabla)\mathbf{U}_2]$$

$$f_2{}^1=l(l+1)\sigma_2D_ls_0(r)+l(l+1)\sigma_1D_ls_1(r)-2imD_ls_1(r)+l(l+1)\mathrm{Ra}_2\frac{r_0{}^2}{r^3}t_0(r)+$$

$$+l(l+1)\mathrm{Ra}_1\frac{r_0{}^2}{r^3}t_1(r)-\mathrm{Ra}_0\,AI_l{}^m(t_0)-\mathrm{Pr}^{-1}\,G_l{}^m(S_2,s_0)-2H_l{}^m(w_1)$$

$$f_2{}^2=-\mathrm{Pr}\sigma_2t_0(r)-\mathrm{Pr}\sigma_1t_1(r)-J_l{}^m(S_2,\ T_2,\ s_0,\ t_0)$$

Здесь введены обозначения

$$Q=r\cos\theta\Delta-\left(L^2+r\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$G_l{}^m=\|\mathbf{r}\,\mathrm{rot}^2[(\mathbf{U}_2\nabla)\mathbf{u}_0+(\mathbf{u}_0\nabla)\mathbf{U}_2]\|,\quad H_l{}^m=\|Qw_1(r,\ \theta,\ \varphi)\|$$

$$I_l{}^m=\|M^2[t_0(r)Y_l{}^m]\|,\quad J_l{}^m=\|\mathbf{u}_0\nabla T_2+\mathbf{U}_2\nabla t_0\|$$

$$\|\cdot\|=\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}(\cdot)\overline{Y_l{}^m}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\Big/\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}|Y_l{}^m|^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

В условие разрешимости (3.2) входят следующие выражения:

$$\frac{\mathrm{Ar}_0^2}{3} k_0[l(l+1)\mathrm{Ra}_{00}\, r_0^{-1}\langle\varphi, t_{00}\rangle + \mathrm{Ra}_{00}\langle D_{l0}\psi, t_{00}\rangle -$$

$$-l(l+1)\langle D_{l0}^2\varphi, s_{00}\rangle + l(l+1)\mathrm{Ra}_{00}\, r_0^{-1}\langle\psi, s_{00}\rangle] = -\frac{3}{4} r_0^4\pi^6 A k_0$$

$$\langle J_{l0}^m,\ t_{00}\rangle = \langle k_0 l(l+1) r_0^{-1} T_{20}',\ t_{00}\rangle = -k_0 l(l+1)\mathrm{Ar}_0\langle t_{00},\ s_{00}\rangle/3$$

$$\langle G_{l0}^m,\ s_{00}\rangle \sim \mathrm{Ar}_0^2\langle t_{00},\ s_{00}\rangle$$

$\langle I_{l0}^m, s_{00}\rangle$ и $\langle G_{l0}^m, s_{00}\rangle$ по порядку величины меньше $\langle J_{l0}^m, t_{00}\rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Яворская И. М., Беляев Ю. Н.* Конвективные течения во вращающихся слоях.— Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Механ. жидкости и газа, 1982, т. 17, с. 3–85.
2. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961, 652 p.
3. *Busse F. H.* Differential rotation in stellar convection zones. II.— Astron. Astrophys., 1973, v. 28, № 1, p. 27–37.
4. *Келлер Б. С., Яворская И. М.* Влияние широтного градиента температуры на возникновение конвекции во вращающемся сферическом слое.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 1, с. 128–137.

Москва

Поступила в редакцию
15.III.1983