

УДК 532.54

**ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
О СВОБОДНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ**

ЛЫЖИН Д. О., СОКОЛОВ Л. А., ТРИГУБ В. Н.

Предложен интегральный подход к решению задач о свободном взаимодействии, использующий моментные интегральные соотношения для вязкого подслоя. Разработанный интегральный метод апробирован на решении задачи о ламинарном отрыве.

При исследовании предельных решений уравнений Навье – Стокса при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности благодаря систематическому применению метода сращиваемых асимптотических разложений [1] была построена теория явления свободного взаимодействия [2, 3], согласно которой основной вклад во взаимодействие с внешним потоком определяется изменением толщины вытеснения вязкого подслоя. В рамках этой теории были получены решения ряда интересных физических задач [4–6].

Для исследования классических уравнений взаимодействующего пограничного слоя широкое применение нашли методы, использующие интегральные соотношения. Особенно успешно в последнее время использовался и развивался моментный интегральный метод Лиза и Ривза [7, 8]. Успех применения этого метода связан с удачным представлением профилей скорости [9], в том числе и полученных в [10] профилей скорости с возвратными токами.

Существенным отличием краевых задач теории свободного взаимодействия от классических задач взаимодействующего пограничного слоя является выполнение условия асимптотического стремления профиля скорости к сдвиговому на внешней границе подслоя.

Попытка использовать интегральный подход для решения таких задач была сделана в работе [11].

В настоящей работе выведены моментные интегральные соотношения для уравнений вязкого подслоя. Проведено как численное, так и аналитическое исследование соответствующего автомодельного уравнения.

Проведено сравнение полученных в интегральном приближении универсальных распределений давления и поверхностного трения с результатом численных расчетов в дифференциальном представлении задачи о ламинарном отрыве [12].

1. Уравнения, описывающие взаимодействие ламинарного вязкого подслоя на гладкой поверхности с внешним сверхзвуковым потоком, согласно [3], имеют следующий вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$u=v=0, \quad y=0$$

$$u \rightarrow u_e = y - \int_0^{\infty} p(t) dt, \quad y \rightarrow \infty; \quad u \rightarrow y, \quad x \rightarrow -\infty \quad (1.2)$$

Здесь использована безразмерная система единиц отсчета [3], в которой x, y – оси декартовых координат, u, v – составляющие вектора скорости на указанные оси, p – возмущение давления. Индекс e соответствует значениям функций на внешней границе подслоя при $y \rightarrow \infty$.

Вводя функцию тока $u = \partial \psi / \partial y, v = -\partial \psi / \partial x$ и производя замену переменных $\psi(x, y) = p(x) f(x, \eta), \eta = y p^{-1/2}(x)$, можно привести систему (1.1) –

(1.2) к виду, аналогичному [2]

$$f_{\eta\eta} = \beta(1 + f_{\eta}^2/2 - ff_{\eta\eta}) + p^{3/2}(f_{\eta}f_{x\eta} - f_x f_{\eta\eta}) \quad (1.3)$$

$$f(x, 0) = f_{\eta}(x, 0) = 0, \quad f_{\eta e} = \eta - p^{-1/2} \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

$$f_{\eta} \rightarrow \eta, \quad x \rightarrow -\infty \quad (1.4)$$

Здесь $\beta = p^{1/2} p_x$ — параметр градиента давления.

Заметим, что взаимодействие с внешним сверхзвуковым потоком обусловлено наличием дефекта скорости $f_{\eta e} - \eta$ на внешней границе подслоя.

Используя тождество $f_{\eta e} - \eta = \int_0^{\infty} (f_{\eta\eta} - 1) d\eta$ и вводя обозначение

$\delta(x) = \int_0^{\infty} (1 - f_{\eta\eta}) d\eta$, второе из граничных условий (1.4) можно записать в виде

$$p_x = \frac{2}{\delta} (p^{3/2} - p\delta_x) \quad (1.5)$$

Проинтегрировав уравнение (1.3) по поперечной координате от нуля до бесконечности с учетом граничных условий (1.4), получим интегральную форму уравнения продольного импульса

$$1 - f_{\eta\eta w} = p^{1/2} p_x \left(\frac{3}{2} \theta_2 + \frac{1}{2} \delta^3 + \delta \right) + p^{3/2} (\theta_{2x} + \delta^2 \delta_x)$$

$$\theta_2 = \int_0^{\infty} (1 - f_{\eta\eta}) [f_{\eta}^2 - (f_{\eta} - \eta)^2] d\eta \quad (1.6)$$

где $f_{\eta\eta w}$ — параметр поверхностного трения.

Интегральную форму высших моментов уравнения продольного количества движения можно получить аналогичным образом, умножая предварительно (1.3) на $(f_{\eta})^m$, где $m=1, 2, \dots$

$$m(I_{m-1} - \theta_{m-1} + (-1)^m \delta^m) = p^{1/2} p_x \left(\theta_m + \frac{(-1)^m}{m+1} \delta^{m+1} + \frac{(-1)^m \delta^{m+3}}{2(m+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{m+3}{2(m+1)} \theta_{m+2} \right) + \frac{p^{3/2}}{m+1} ((\theta_{m+2})_x + (-1)^{m+2} \delta^{m+2} \delta_x) \quad (1.7)$$

$$I_m = \int_0^{\infty} (1 - f_{\eta\eta}^2) f_{\eta}^m d\eta, \quad \theta_m = \int_0^{\infty} (1 - f_{\eta\eta}) [f_{\eta}^m - (f_{\eta} - \eta)^m] d\eta$$

2. При построении интегрального метода решения системы (1.1)–(1.2) ограничимся интегральными уравнениями продольного импульса и его первого момента совместно с условием взаимодействия (1.5)

$$1 - f_{\eta\eta w} = p^{1/2} p_x \left(\frac{3}{2} \theta_2 + \frac{1}{2} \delta^3 + \delta \right) + p^{3/2} ((\theta_2)_x + \delta^2 \delta_x) \quad (2.1)$$

$$I_0 - \delta = p^{1/2} p_x \left(1 - \frac{1}{4} \delta^4 + \theta_3 \right) + \frac{p^{3/2}}{2} ((\theta_3)_x - \delta^3 \delta_x), \quad p_x = \frac{2}{\delta} (p^{3/2} - p\delta_x)$$

Второе из уравнений (2.1) получено из (1.7) при $m=1$ с учетом тождества $\theta_1 - \delta^2/2 = 1$. Для замыкания системы необходимо установить соотношения между такими интегральными характеристиками поля течения, как $f_{\eta\eta w}$, I_0 , θ_2 и θ_3 . При этом весьма важное значение имеет выбор семей-

ства профилей распределения функций течения. В настоящей работе используется однопараметрическое семейство решений автомодельного уравнения $f^{(a)}(\eta_a, \beta_a)$, получающегося из (1.3) при обращении в ноль конвективного оператора

$$f_{\eta\eta}^{(a)} = \beta_a(1 - f_{\eta}^{(a)2})/2 - f^{(a)}f_{\eta\eta}^{(a)}, \quad f^{(a)}(0) = f_{\eta}^{(a)}(0) = 0, \quad f_{\eta\eta}^{(a)}(\infty) = 1 \quad (2.2)$$

Заметим, что в интегральных методах расчета пограничного слоя [7, 8] для аналогичных целей применялись решения автомодельного уравнения Фолкнера — Скэн [9, 10].

Предполагая, что автомодельные и рассматриваемые переменные связаны соотношением $\eta = k(x)\eta_a$, $f = k^2(x)f^{(a)}$, можно установить соответствие между автомодельными профилями и характерными функциями вязкого подслоя, входящими в (2.1).

Например, величина δ может быть записана в следующем виде:

$$\delta = \int_0^{\infty} (1 - f_{\eta\eta}) d\eta = k \int_0^{\infty} (1 - f_{\eta\eta}^{(a)}) d\eta_a = k\delta_a$$

Используя как масштаб величину $k = \delta/\delta_a$, можно получить

$$f_{\eta\eta w} = f_{\eta\eta w}^{(a)}, \quad \theta_2 = \frac{\delta^3}{\delta_a^3} \int_0^{\infty} (1 - f_{\eta\eta}^{(a)}) [f_{\eta}^{(a)2} - (f_{\eta}^{(a)} - \eta_a)^2] d\eta_a \quad (2.3)$$

$$\theta_3 = \frac{\delta^4}{\delta_a^4} \int_0^{\infty} (1 - f_{\eta\eta}^{(a)}) [f_{\eta}^{(a)3} - (f_{\eta}^{(a)} - \eta_a)^3] d\eta_a, \quad I_0 = \frac{\delta}{\delta_a} \int_0^{\infty} (1 - f_{\eta\eta}^{(a)}) d\eta_a$$

В качестве независимого параметра, используемого для представления функций профилей, из величин, которые берутся на основании автомодельных решений, удобно выбрать величину

$$H = \frac{\theta_2}{\delta^3} + \frac{1}{3} =$$

$$= \left(\int_0^{\infty} (1 - f_{\eta\eta}^{(a)}) [f_{\eta}^{(a)2} - (f_{\eta}^{(a)} - \eta_a)^2] d\eta_a \right) / \left(\int_0^{\infty} (1 - f_{\eta\eta}^{(a)}) d\eta_a \right) + \frac{1}{3}$$

Тогда, вводя следующие обозначения для интегральных функций:

$$J = \frac{\theta_3}{\delta^4} - \frac{1}{4}, \quad R = \frac{I_0}{\delta}, \quad P = f_{\eta\eta w}$$

и считая на основании (2.3), что их зависимость от формпараметра H такая же, как для соответствующих автомодельных величин, (2.1) можно записать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений для независимых переменных $p(x)$, $\delta(x)$ и $H(x)$

$$\begin{aligned} 1 - P(H) &= p^{1/2} p_x \left(\frac{3}{2} H \delta^3 + \delta \right) + p^{3/2} (H_x \delta^3 + 3\delta^2 H \delta_x) \\ \delta (R(H) - 1) &= p^{1/2} p_x (1 + J(H) \delta^4) + \frac{p^{3/2}}{2} \left(\frac{dJ}{dH} \delta^4 H_x + 4\delta^3 J \delta_x \right) \\ p_x &= \frac{2}{\delta} (p^{3/2} - p \delta_x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

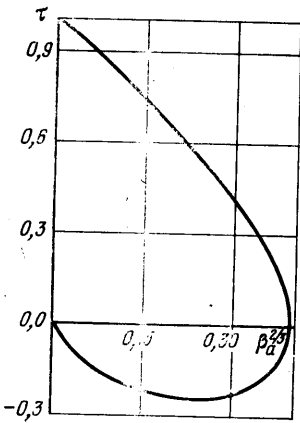
Следует подчеркнуть, что, так же как и в [7, 8], использование автомодельных решений не связано с предположением о локальном подобии, при котором форма профиля скорости однозначно определяется местным значением градиента давления.

В настоящей работе таких предположений не делается, а автомодельные решения используются лишь для установления дополнительных функциональных соотношений вида $P(H)$, $J(H)$, $R(H)$, необходимых для решения системы (2.4).

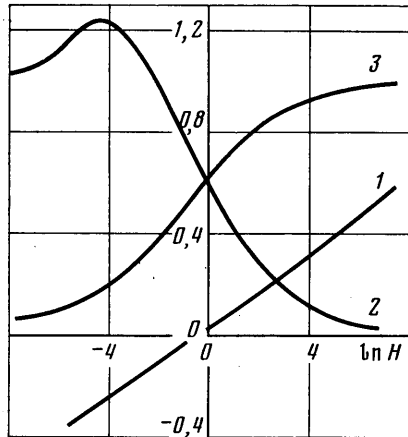
3. С этой целью было проведено численное исследование автомодельного уравнения (2.2) при различных значениях параметра β_a . Оказалось удобным произвести замену переменных $f^{(a)} = \varphi(z) \beta_a^{-2/3}$, $z = \beta_a^{1/3} \eta_a$, приводящую краевую задачу (2.2) к виду

$$\varphi_{zzz} = \beta_a^{2/3} + \varphi_z^2/2 - \varphi\varphi_{zz}, \quad \varphi(0) = \varphi_z(0) = 0, \quad \varphi_{zz}(\infty) = 1 \quad (3.1)$$

На фиг. 1 представлена зависимость параметра поверхностного трения $f_{\eta\eta W}^{(a)} = \varphi_{zz}(0)$ от величины параметра градиента давления β_a для $\beta_a \geq 0$. Значение



Фиг. 1



Фиг. 2

$\beta_a^{2/3} = 0.39$ соответствует предотрывному профилю скорости с величиной $f_{\eta\eta W}^{(a)} = 0$. Обращает на себя внимание факт существования двух решений для профиля скорости при каждом значении β_a — с областью возвратных токов ($f_{\eta\eta W}^{(a)} < 0$) и без нее ($f_{\eta\eta W}^{(a)} > 0$). При $\beta_a \rightarrow 0$ одно из решений соответствует невозмущенному сдвиговому профилю скорости ($f_{\eta\eta}^{(a)} \rightarrow 1$), а другое описывает профиль с развитой зоной малых по величине скорости возвратных токов ($f_{\eta\eta W}^{(a)} \rightarrow 0$), который соответствует отрывному течению при выходе величины давления на плато. Указанная бифуркация решения (3.1) вполне аналогична наличию отрывного и безотрывного семейств автомодельных профилей, полученных при исследовании уравнения Фолкнера — Скэн [10].

Рассчитанные в ходе решения (3.1) зависимости интегральных функций от форм-параметра H представлены на фиг. 2. Следует заметить, что величины H и функции $J(H)$ при видоизменении профиля скорости от сдвигового до развитого отрывного (в соответствии с кривой фиг. 1) меняются монотонно от бесконечности до нуля, поэтому для их описания использовался логарифмический масштаб. Кривая 1 на фиг. 2 представляет поведение функции $5 \cdot 10^{-2} \ln J$, кривая 2 — $(1-P)$, кривая 3 — $(R-1)$. Для дальнейших численных расчетов указанные зависимости были аппроксимированы с помощью кубических сплайнов.

Для определения начальных условий для системы (2.4) при $x \rightarrow -\infty$ необходимо исследовать поведение интегральных функций при изменении невозмущенного сдвигового профиля, который соответствует случаю $H \rightarrow \infty$, $\beta_a \rightarrow 0$.

Подставляя в (3.1) решение в виде $\varphi(z) = z^2/2 + \beta_a^{2/3} F(z)$ и учитывая, что $\beta_a \rightarrow 0$, получим

$$F_{zzz} + (z^2/2)F_{zz} - zF_z + F - 1 = 0, \quad F(0) = F_z(0) = F_{zz}(\infty) = 0 \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что $F_{zzz} = \exp(-z^3/6)$. Используя граничные условия для $F(z)$ и возвращаясь к функции $f^{(a)}(\eta_a)$, можно получить вид инте-

гральных функций при $\beta_a \rightarrow 0$.

$$\delta_a = K_1 \beta_a^{1/2}, \quad H = \frac{2}{3} \frac{K_2}{K_1} \beta_a^{-1/2}, \quad (3.3)$$

$$R=2, \quad P=1-K_2 \beta_a^{3/2}, \quad J=K_1^{-3} \beta_a^{-2}$$

$$K_1 = (6^{1/3}/3) \Gamma(2/3), \quad K_2 = (6^{1/3}/3) \Gamma(1/3)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Тогда при $H \rightarrow \infty$

$$P(H) = 1 - A_1 \cdot H^{-1/2}, \quad R(H) = 2, \quad J(H) = A_2 \cdot H^{3/2}$$

$$A_1 = \left(\frac{2K_2^3}{3K_1^3} \right)^{1/2}, \quad A_2 = \left(\frac{3K_1}{2K_2} \right)^{3/2} \quad (3.4)$$

Исследование асимптотики решения исходной задачи (1.1)–(1.2) при $x \rightarrow -\infty$ в работах [2, 3] показало, что $p = C - \exp(0.8272 \cdot x)$, где C — произвольная константа, определяющая, например, положение точки отрыва при течении сжатия. Из результатов работ [2, 3] можно также сделать вывод о правильном функциональном виде зависимостей (3.4) при $H \rightarrow \infty$, отличающихся от точных асимптотических соотношений только значениями коэффициентов A_1 и A_2 . Для получения аналогичной асимптотики в рамках предложенного интегрального метода будем искать решение системы (2.4) при $x \rightarrow -\infty$ в виде

$$p = C e^{\alpha x}, \quad \delta = C^{1/2} \alpha^{-1} e^{(\alpha/2)x}, \quad H = B e^{-2\alpha x} \quad (3.5)$$

Тогда из первых двух уравнений (2.4) следует, что $A_1 A_2 = 2$, в то время как, согласно (3.4), $A_1 A_2 = 3/2$. В связи с этим в дальнейших расчетах вместо функции $J(H)$ всюду использовалось ее переопределенное значение $J^*(H) = (4/3)J(H)$ и соответственно $A_2^* = (4/3)A_2$. Кроме того, подстановка (3.5) в (2.4) приводит к следующему соотношению между константой и собственным числом:

$$A_1 \alpha^2 = C^3 B^{3/2} \quad (3.6)$$

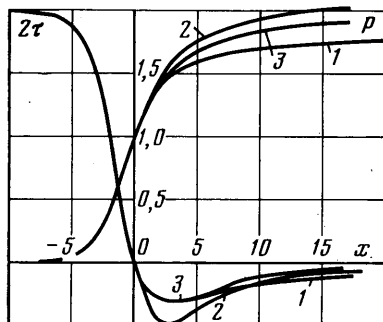
Из (3.6) видно, что в отличие от точного асимптотического решения [2, 3] интегральный подход приводит к произволу в выборе собственного числа. Для однозначного определения α и B в настоящей работе использовалось одно из двух дополнительных предположений. Первое из них состоит в том, что величина α полагается равной соответствующему значению для точного решения, т. е. $\alpha = 0,8272$, а константа B определяется из (3.6). Если же допустить, что независимые функции $\delta(x)$ и $H(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ ведут себя относительно друг друга так же, как автомодельные величины δ_a и H при $\beta_a \rightarrow 0$ (соотношения (3.3)), то мы получим, что $H = (2/3) K_1 K_2 \delta^4$ и, следовательно, с учетом (3.5) $B = (2/3) K_1 K_2 \alpha^4 / C^2$. В этом случае величина собственного числа определяется из уравнения (3.6): $\alpha = (3/2)^{1/2} K_1^{-1/2} = 0,8204$ и оказывается весьма близкой к точному значению [2, 3].

Как показали численные расчеты, использование одного или другого из указанных предположений практически не влияет на полученные результаты, поэтому в дальнейшем всюду применялось первое из них.

Изложенный выше интегральный метод был апробирован на решении задачи о самоиндуцированном отрыве ламинарного пограничного слоя с гладкой поверхности [2, 3]. С учетом замены $J(H)$ на $J^*(H)$ система (2.4), разрешенная относительно производных $p_x(x)$, $\delta_x(x)$, $H_x(x)$, численно интегрировалась с помощью метода Рунге — Кутты. В качестве начальных условий при достаточно большом отрицательном значении координаты x использовались асимптотики решений (3.5). Следует отметить, что выбор величины произвольной положительной константы C в соотношениях (3.5) не играет существенной роли в рассмотренной задаче, так

как различные ее значения соответствуют простому сдвигу полученных универсальных интегральных кривых вдоль оси x .

На фиг. 3 представлены распределения давления p и параметра поверхностного трения $\tau = f_{\text{нпв}}$ в окрестности точки отрыва $x=0$. Кривые 1



Фиг. 3

соответствуют численному решению исходных уравнений (1.1), (1.2), полученному в [12], а кривые 2 — результатам расчетов с помощью интегральных уравнений свободного взаимодействия (2.4). Как видно из графиков, указанные кривые очень хорошо совпадают вплоть до точки отрыва. Некоторое расхождение результатов наблюдается в области отрывного течения. Так, например, минимальная величина коэффициента поверхностного трения, полученная в [12], $\tau_{1 \min} = -0,148$, а в настоящей работе $\tau_{2 \min} = -0,242$. Величины плато давления в развитой срывной зоне равны соответственно $p_1 = 1,8$ и $p_2 = 2,02$. Были проведены также численные расчеты

с использованием модифицированной интегральной функции $P^*(H)$ вместо $P(H)$

$$P^*(H) = P(H), \quad P \geq 0; \quad P^*(H) = \frac{\tau_{1 \min}}{\tau_{2 \min}} P(H), \quad P < 0$$

Полученные распределения $p(x)$ и $\tau(x)$ представлены кривыми 3 на фиг. 3.

Указанная модификация привела к лучшему совпадению с результатами [12] за точкой отрыва. Так, рассчитанная величина плато давления $p_3 = 1,95$ превышает $p_1 = 1,8$ только на 8%. Заметим в заключение, что описанный интегральный подход представляется весьма перспективным не только для решения задач о свободном взаимодействии, но и вообще для расчета пристеночных областей вязкого течения, в которых существенным является наличие поперечного градиента скорости на внешней границе, таких, например, как энтропийные слои.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
2. Нейланд В. Я. Сверхзвуковое течение вязкого газа вблизи точки отрыва. — В кн.: 3-й Всес. съезд по теор. и прикл. механике. М.: Наука, 1968, с. 224.
3. Stewartson K., Williams P. L. Self-induced separation. — Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1969, v. 312, № 1509, p. 181–206.
4. Сычев В. В. О ламинарном отрыве. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3, с. 47–59.
5. Smith F. J. Upstream interactions in channel flows. — J. Fluid Mech., 1977, v. 79, № 4, p. 631–655.
6. Smith F. J., Duck P. W. Separation of jets or thermal boundary layers from a wall. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1977, v. 30, № 2, p. 143–156.
7. Lees L., Reeves B. L. Supersonic separated and reattaching laminar flows: I General theory and application to adiabatic boundary-layer/shock-wave interaction. — AIAA Journal, 1964, № 11, p. 1907–1920.
8. Klineberg J. M., Lees L. Theory of laminar viscous-inviscid interactions in supersonic flow. — AIAA Journal, 1969, v. 7, № 12, p. 2211–2221.
9. Falkner V. M., Skan S. N. Some approximate solutions of boundary layer equations. RM 1314, Great Britain aeronat. Res. Council, 1930.
10. Stewartson K. Further solutions of the Falkner – Skan equation. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, v. 50, № 3, p. 454–465.
11. Соколов Л. А. Поправка к критерию Чемпмена – Корста в результате действия вязких сил в области присоединения потока к поверхности обтекаемого тела. — Тр. ЦАГИ, 1977, № 1808, с. 23–29.
12. Williams P. L. A reverse flow computation in the theory of self-induced separation. Sect. Notes in Phys., 1975, v. 35, p. 445–451.

Москва

Поступила в редакцию
20.X.1982