

УДК 532.546.013.4 536.25

О ВНУТРИПОРОВОЙ КОНВЕКЦИИ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ОСРЕДНЕННОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

БРАТУХИН Ю. К., ПУТИН Г. Ф.

Теплопроводность насыщенной жидкостью пористой среды обычно рассматривается как чисто молекулярная теплопередача [1]. При этом, по-видимому, считается, что при подогреве снизу локальный градиент температуры внутри каждой из пор, как и осредненный градиент во всем слое, направлен строго вертикально, и, поскольку размеры пор, как правило, малы, этот локальный градиент меньше критического. Поэтому предполагается, что в отсутствие крупномасштабной конвекции жидкость в порах находится в равновесии.

Однако при различных теплопроводностях жидкости и окружающего ее массива вертикальный градиент температуры в жидкости и соответственно равновесие последней возможны лишь в тех случаях, когда полость является шаром или определенным образом ориентированным эллипсоидом [1]. Поскольку форма пор отличается от указанной, конвективное движение, возникающее в каждой из пор либо в нескольких сообщающихся порах, может привести к увеличению эффективной теплопроводности жидкости и соответственно эффективной теплопроводности всей среды. Изучению этого эффекта и посвящена данная работа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим подогреваемую снизу пористую среду, представляющую собой случайным образом уложенные одинаковые твердые шаровые частицы. Полости между частицами заполнены жидкостью. Рэлеевская конвекция отсутствует. В качестве математической модели такой системы выберем бесконечный твердый массив с изолированными друг от друга сферическими полостями. В центре каждой полости находится шар из того же материала, что и массив. Зазор заполнен жидкостью. Задача решается аналитически для одного такого шарового слоя в матрице, и результаты усредняются по Эйнштейну [2, 3].

Внутренний шар радиуса R_1 может соответствовать в эксперименте как одной частице, так и нескольким вплотную расположенным частицам, образующим некоторое подобие шарового ядра, обтекаемого конвективным потоком. Зазор ($R_2 - R_1$) между внутренним шаром и внешней поверхностью шарового слоя (радиуса R_2) на теоретической модели соответствует в реальной пористой среде некоторому среднему расстоянию между частицами, которое можно принять равным приблизительно половине радиуса частицы.

В теоретической модели отношение $R = R_1/R_2$ является параметром задачи. При $R \rightarrow 0$ (сферическая полость без внутреннего шара) модель может быть отождествлена в эксперименте с пористой средой, в которой конвективные явления происходят в изолированных друг от друга порах. При математическом анализе этого случая учитывается отклонение поверхности реальной поры от сферы. Конвективное движение в модели с $R \rightarrow 1$ (малый зазор) соответствует в эксперименте межпоровому движению, при котором жидкость циркулирует вокруг ядра, состоящего из большого числа частиц.

Если отвлечься от отклонения поверхности полости от сферы, то и в том и в другом случае конвективная добавка к теплопроводности должна отсутствовать. В самом деле, при $R \rightarrow 0$ градиент температуры в жидкости вертикален и из-за малости размеров поры осредненный температурный

градиент меньше критического, так что движение не возникает. При $R \rightarrow 1$ гидродинамическое сопротивление узкого зазора велико и вклад образующегося ползущего течения в теплопередачу незначителен. При некотором промежуточном значении R_* теплопоток q_* через шаровой слой максимален. В соответствии с принципом Малкуса [1] в работе принимается, что в реальных условиях устанавливается такое сквозное движение между порами, которое соответствует теоретическому значению q_* . Конвекция в одной поре, вызванная отклонением поверхности поры от сферы, рассмотрена отдельно.

То, что шаровой слой в теоретической модели геометрически отличается от межпоровых полостей, в эксперименте не должно сказываться [1] на порядке величины q_* и поэтому допустимо в работе, претендующей на оценку конвективного вклада в теплопроводность.

2. Теория. Рассмотрим один шаровой слой в бесконечном массиве. Теплопроводности массива и внутреннего шара одинаковы и равны κ_1 , теплопроводности жидкости κ_2 . В массиве на бесконечности задан постоянный градиент температуры A , направленный вдоль ускорения силы тяжести g . Предполагается, что A меньше критического градиента температуры, при котором наступает рэлеевская конвекция.

Задачу удобно записать в безразмерном виде. Для этого выберем в качестве единиц длины, скорости v , температуры T , давления p и теплопотока q соответственно R_2 , $g\beta AR_2^3/v$, AR_2 , $\rho g\beta AR_2^2$, $\kappa_1 A$. В систему уравнений и в результаты войдут следующие безразмерные параметры: $\kappa = \kappa_2/\kappa_1$, $R = R_1/R_2$, числа Прандтля $Pr = v/\chi$, Грасгофа $Gr = g\beta AR_2^4/v^2$ и Рэлея $Ra = Gr \cdot Pr$.

Запишем систему уравнений и граничных условий в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в центре шарового слоя и с полярной осью z , направленной вдоль ускорения силы тяжести $g = gk$:

$$\begin{aligned} Gr(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} - T_2 \mathbf{k}; & \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ Ra \mathbf{v}\nabla T_2 &= \Delta T_2; & \Delta T_1 &= \Delta T_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty: & \quad T_1 = z; \\ r = R: & \quad \mathbf{v} = 0, \quad T_2 = T_3, \quad \kappa \frac{\partial T_2}{\partial r} = \frac{\partial T_3}{\partial r} \\ r = 1: & \quad \mathbf{v} = 0, \quad T_2 = T_1, \quad \kappa \frac{\partial T_2}{\partial r} = \frac{\partial T_1}{\partial r} \end{aligned}$$

Индексы 1, 2, 3 отмечают принадлежность функций T_i к массиву (среда 1), жидкости (среда 2) и внутреннему шару (среда 3).

Решение системы (2.1) будем искать в виде разложения в степенные ряды по числу Грасгофа:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_0 + Gr \mathbf{u}_1 + \dots; \quad T_i = \tau_i^{(0)} + Gr \tau_i^{(1)} + \dots \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.2)$$

После несложных, но громоздких вычислений получим для функций \mathbf{u}_0 , $\tau_2^{(0)}$ и $\tau_2^{(1)}$ следующие точные выражения (P_i — полиномы Лежандра)

$$\tau_2^{(0)} = \left(br + \frac{c}{r^2} \right) P_1; \quad \mathbf{u}_0 = f(r) P_2 \mathbf{x}_1 + g(r) r \nabla P_2 \quad (2.3)$$

$$b = \frac{3(2\kappa+1)}{(2\kappa^2+5\kappa+2)-2R^3(\kappa-1)^2}, \quad c = \frac{R^3(\kappa-1)b}{(2\kappa+1)}$$

$$f = Ar^3 + \frac{B}{r^2} + Cr + \frac{D}{r^4} - \frac{c}{4}, \quad g = \frac{(r^2 f)'}{6}$$

$$A = -1/2 c (R+1) (R^2+3R+1) \zeta, \quad B = 1/4 c R^2 (8R^4+17R^3+20R^2+17R+8) \zeta,$$

$$C = 1/2 c(R+1)(3R^4 + 9R^3 + 11R^2 + 9R + 3)\zeta, \quad D = -1/4 cR^4(4R^2 + 7R + 4)\zeta$$

$$\zeta = (4R^8 + 16R^5 + 40R^4 + 55R^3 + 40R^2 + 16R + 4)^{-1}$$

$$\tau_2^{(1)} = \tau_1(r)P_1 + \tau_3(r)P_3; \quad \tau_1(r) = \sum_k \alpha_k r^k \quad (k = \pm 5; \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0)$$

$$\alpha_1 = \text{Pr} \frac{Ab}{20}, \quad \alpha_2 = \text{Pr} \frac{Cb}{10}, \quad \alpha_3 = \text{Pr} \frac{Ac - cb}{20}$$

$$\alpha_4 = \left[\frac{\kappa - 1}{2\kappa + 1} R + \frac{2 + \kappa}{2(1 - \kappa)} \frac{1}{R^2} \right]^{-1} \sum_k \left[\frac{1 - k\kappa}{2\kappa + 1} R^k + \frac{2 + k\kappa}{2(\kappa - 1)} \right] \alpha_k$$

$$(k = \pm 5; \pm 3; \pm 2; 0; -1)$$

$$\alpha_5 = \text{Pr} \frac{Cc - 2Bb}{10}, \quad \alpha_6 = -\text{Pr} \frac{c^2}{20}, \quad \alpha_8 = -\frac{\text{Pr}}{5} Bc, \quad \alpha_9 = -\text{Pr} \frac{Dc}{15}$$

Другие функции в дальнейшем не понадобятся.

Для вычисления осредненного теплопотока $\langle q_z \rangle = V^{-1} \int q_z dV$ (V — объем всей системы, содержащей N включений) через массив со многими не взаимодействующими включениями используем методику Эйнштейна [2, 3]. После несложных преобразований получим следующее выражение для эффективной теплопроводности среды $\langle \kappa \rangle = -\langle q_z \rangle$ и для числа Нуссельта Nu_1 :

$$\langle \kappa \rangle = 1 + \frac{N}{V} (\kappa - 1) \left[\oint T_2 dS_z + \frac{\text{Ra}}{1 - \kappa} \int v_z T_2 dV \right] =$$

$$= \langle \kappa_0 \rangle + \text{Ra} F(R, \kappa, N); \quad \text{Nu}_1 = \text{Ra} \frac{F}{\langle \kappa \rangle} \quad (2.4)$$

$$dS_z = \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi; \quad v_z = (fP_2 \cos \vartheta - gP_2' \sin \vartheta)$$

Выражения T_2 , f и g выписаны выше — формулы (2.2) и (2.3).

В формуле (2.4) $\langle \kappa_0 \rangle$ — эффективная теплопроводность пористой среды в отсутствие межпоровой конвекции. Второе слагаемое, пропорциональное числу Рэлея Ra , учитывает увеличение теплопроводности массива, связанное с наличием межпоровой конвекции.

Функция $F(R, \kappa, N)$ сложным образом зависит от R и κ . Вычисления для $\kappa = 0,02; 0,2; 2$ показали, что $F(R \rightarrow 0, \kappa)$ и $F(R \rightarrow 1, \kappa)$ стремятся к нулю, как и было отмечено в п. 1. В интервале $0,4 < R < 0,7$ F максимальна, причем $F(0,7; 0,02) \approx 5 \cdot 10^{-5}$; $F(0,7; 0,2) \approx 1 \cdot 10^{-5}$ (для концентрации $N/V \sim 1$). Выбранный по принципу Малкуса параметр $R = 0,7$ означает, что в эксперименте конвективное движение должно обтекать ядро, состоящее из четырех — шести компактно уложенных частиц. Линии тока должны быть замкнутыми и располагаться вблизи соответствующих ядер в зазоре, размеры которого не превышают радиуса одной частицы. Это значит, что теоретическое значение R_2 равно двум — трем радиусам частиц, составляющих пористую среду.

Отметим, что в рассмотренной задаче числа Ra по предположению меньше критических, при которых возникает рэлеевская конвекция, и поэтому при $\kappa = 1$ $F = 0$.

Рассмотрим задачу о конвекции внутри одной поры ($R = 0$), предположив, что уравнение поверхности включения имеет вид $r = 1 + sP_2^{(1)} \cos \varphi$ ($P_l^{(m)}$ — присоединенные полиномы Лежандра; $s \ll 1$). Вы-

бор такой специальной формы полости связан с тем, что $P_2^{(1)} \cos \varphi$ — одна из крупномасштабных сферических гармоник, наличие которой в спектре функции, задающей форму реальной поры, приводит к искривлению изо-

терм в жидкости и, следовательно, к появлению конвективного движения уже при сколь угодно малых градиентах температуры.

Уравнения стационарной конвекции (2.1) для этой задачи останутся без изменения, граничными условиями будут

$$r=1+sP_2^{(1)} \cos \varphi, \quad \mathbf{v}=0, \quad T_1=T_2, \quad \kappa \frac{\partial T_2}{\partial n} = \frac{\partial T_1}{\partial n} \quad (2.5)$$

где n — вектор нормали к поверхности включения. Температуры T_2 в этой задаче нет.

Будем искать решение уравнений (2.1) и (2.5) в виде рядов по степеням малого параметра ε

$$\mathbf{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{v}^{(n)}; \quad T_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n T_i^{(n)} \quad (i=1, 2); \quad s = \varepsilon s_1 + \varepsilon^3 s_3 + \dots$$

Последнее уравнение определяет параметр ε , так как s задано. Последовательные члены разложения будем искать методом Бубнова — Галеркина [1]. Нулевое приближение известно [1]. Первое приближение называется равным

$$\mathbf{v}^{(1)} = (r^3 - r) \mathbf{r} \times \nabla (P_1^{(1)} \sin \varphi)$$

$$s_1 = \left(\frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_*} - 1 \right) \frac{100 (2 + \kappa)^2}{27 (1 - \kappa)}; \quad \text{Ra}_* = \frac{17 \, 325 (2 + \kappa)}{37 + 68 \kappa}$$

Усредняя полученный результат по многим порам, получим, как и выше в этом пункте, средний теплопоток $\langle q_z \rangle$ через сплошной массив объема V с N включениями:

$$\langle q_z \rangle = -1 + 4\pi \frac{N}{V} \frac{(1 - \kappa)}{(2 + \kappa)} \left[1 - \text{Ra} \frac{27\pi s}{(\text{Ra}/\text{Ra}_* - 1) 800 (2 + \kappa)^2} \right]$$

Число Нуссельта Nu_2 , подсчитанное по этой формуле для $\kappa=0,06$, равно

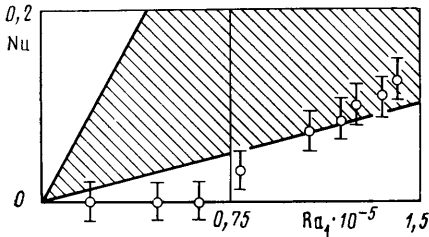
$$\text{Nu}_2 = 0,021 \frac{\text{Ra} s}{1 - 0,00167 \text{Ra}} \quad (2.6)$$

3. Сравнение с экспериментом. Для регистрации внутрипоровой конвекции сравнивалась теплопередача через слои, насыщенные жидкостями, теплопроводности которых имели равные значения, а «конвективные параметры» $g\beta/\nu\chi$ существенно различались.

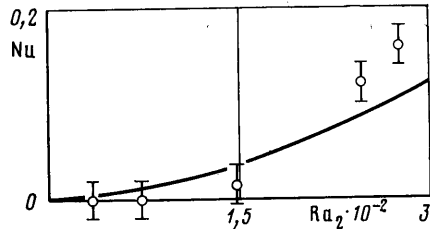
Установка представляла собой горизонтальную щелевую полость, ограниченную сверху и снизу медными пластинами теплообменников, в одном из которых имела плексигласовая горизонтальная прослойка толщиной 2 мм. В теплообменниках циркулировала вода от струйных термостатов. С боковых сторон полость окружалась прямоугольной плексигласовой рамкой внутренними размерами 14×14 см². Для изменения высоты пористого слоя использовались рамки различной толщины: 0,7, 2,0 и 3,0 см. Термопарами измерялись разность температур $\Delta\theta_1$ между теплообменниками и перепад $\Delta\theta_2$ на твердой прокладке. Чтобы исключить крупномасштабную рэлеевскую конвекцию, модель подогревалась сверху. В качестве жидкости с низким конвективным параметром использовался глицерин ($g\beta/\nu\chi \sim 100$ см⁻³ град⁻¹). Жидкостью с высоким значением конвективного параметра служил 70%-ный раствор

спирта в воде ($g\beta/\nu\chi \sim 50 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}\text{град}^{-1}$). Равенство их теплопроводностей контролировалось во вспомогательных опытах на этой же установке. Для значений средне-объемной температуры, которые реализовались в опытах с пористой средой, теплопроводности обеих жидкостей отличались не более чем на 2–3%.

На фиг. 1 точками представлены результаты опытов со слоем высотой 2 см из свинцовых шариков диаметром 7 мм (дробь), насыщенным спиртовым раствором. Отношение теплопроводностей жидкостей и свинца $\kappa=0,06$. По оси абсцисс отложено число Рэлея Ra_1 , определенное по формуле п. 2, где в качестве характерного размера R_2 взята половина толщины слоя (1 см). Это соответствует межпорovому обтеканию ядра из трех — четырех дробин, обеспечивающему максимальную теплопередачу. По оси ординат отложено число Нуссельта Nu , равное отношению кон-



Фиг. 1



Фиг. 2

вективной и молекулярной составляющих теплопотока и определяемое в эксперименте соотношением

$$Nu = \frac{\langle \kappa \rangle - \langle \kappa_0 \rangle}{\langle \kappa_0 \rangle} = K \frac{\Delta\theta_2}{\Delta\theta_1} - 1$$

Здесь K — эмпирическая постоянная, имеющая смысл отношения молекулярных теплопроводностей прослоек между соответствующими термopарами, вычисленная в отсутствие конвекции по данным опытов с глицерином либо с раствором при $Ra_1 < 7,5 \cdot 10^4$ из равенства $K\Delta\theta_2 = \Delta\theta_1$. Пока числа Ra_1 малы, обсуждаемый эффект незаметен на фоне экспериментальных погрешностей. Однако когда $Ra_1 > 7,5 \cdot 10^4$, надежно регистрируется рост теплопередачи; при числах $Ra_1 \sim 1,5 \cdot 10^5$, соответствующих разности температур на границах слоя $\Delta\theta_1 = 10 \text{ C}$, число Нуссельта увеличивается на 10%. В опытах с глицерином при тех же перепадах температур числа Рэлея не превышали 300 и эффект был меньше ошибок измерения. На этой же фигуре заштрихована область, в которую попадают теоретические значения, отвечающие отношению теплопроводностей $\kappa=0,06$ и оптимизированному по принципу Малкуса параметру $0,5 \leq R \leq 0,7$ (формула (2.4)). Если принять во внимание приближения, сделанные при анализе, согласие экспериментальных и теоретических результатов следует признать удовлетворительным.

Кроме описанных выше, проводились также опыты, в которых между теплообменниками заключался только один слой свинцовых шариков диаметром 7 мм. Поры при этом были несколько больше, чем при многослойной плотной упаковке. Соответствующие результаты приведены на фиг. 2. В этой ситуации основной вклад в конвективную теплопередачу вносит движение в одной несферической поре. В соответствии с п. 2 в числе Рэлея Ra_2 за определяющий размер выбран средний радиус поры ($R_2 = 0,15 \text{ см}$, отклонение от сферичности $s=0,01$); число $Ra_2=300$ отвечает перепаду $\Delta\theta_1=8,4^\circ$. Точками отмечены данные опытов со спиртовым раствором, сплошной линией — теоретическая кривая (2.6). Увеличение

теплопотока в этом случае достигает 15%. Чтобы убедиться, что влияние внутрипоровой конвекции на теплопередачу убывает с уменьшением размера пор, были проделаны опыты со слоем высотой 2 см из свинцовых шариков диаметром 3 мм. Расщепление температурных кривых для раствора и глицерина в этом случае не регистрируется на фоне экспериментальных ошибок.

Отсутствие конвективного вклада в теплопередачу при $\kappa=1$ проверялось в экспериментах с двухсантиметровым слоем полиэтиленовых гранул диаметром 3,5 мм, теплопроводность которых близка к теплопроводности жидкостей. В согласии с теорией, точки, полученные в опытах с глицерином и спиртовым раствором, ложатся на прямую $Nu=0$.

Таким образом, когда теплопроводности скелета и жидкости различаются, а поры достаточно велики, при определении теплопроводности среды кроме молекулярной теплопередачи необходимо учитывать вклад внутрипоровой конвекции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 532 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.

Пермь

Поступила в редакцию
25.X.1982