

УДК 532.542.2

О ПРОДОЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

ДИЛЬМАН В. В., КРОНБЕРГ А. Е.

Начало интенсивному изучению явлений переноса при течении жидкостей в каналах положил Тейлор [1, 2]. Автор показал возможность эффективного использования одномерных диффузионных уравнений для описания распространения примеси в ламинарном установившемся потоке в прямой круглой трубе. В дальнейшем анализ Тейлора был распространен для решения самых разнообразных задач, в том числе и для исследования проточных химических реакторов [3]. При этом на примерах задач, допускающих точные решения, в соответствии с ограничениями, указанными Тейлором, было подтверждено, что диффузионная модель с коэффициентом эффективной продольной диффузии, найденным по Тейлору, дает удовлетворительные результаты лишь в случае медленно изменяющихся полей концентрации, в том числе при малых скоростях химической реакции [4].

Ограниченность диффузионных моделей связана, в частности, с тем, что положенная в их основу линейная локальная связь между дисперсионным потоком (потоком вещества в продольном направлении в движущейся со средней скоростью системе координат) и градиентом средней по сечению концентрации, как и всякая другая аналогичная связь, имеет ограниченную область применимости, зависящую от соотношения временных масштабов всех составляющих процесса. Необходимым условием применимости указанного соотношения является малость времени релаксации дисперсионного процесса по сравнению с другими характерными временами задачи.

Условие малости времени релаксации часто не выполняется для процессов в проточных химических реакторах. Например, для полых реакторов с ламинарным режимом течения время релаксации порядка a^2/D и, как правило, намного превосходит характерное время химических реакций, где a — радиус реактора, D — коэффициент молекулярной диффузии.

В таких случаях связь между дисперсионным потоком и градиентом средней концентрации требует обобщения с учетом релаксационных явлений, приводящего к нелокальным в пространстве и времени формулам. Впервые на необходимость такого рода обобщения применительно к процессам продольной дисперсии вещества в движущейся жидкости было указано в работах [5, 6], где была учтена временная нелокальность градиентного выражения дисперсионного потока.

Непосредственный вывод уравнений переноса с учетом релаксационных явлений в большинстве случаев является непростой задачей, однако, когда имеется точная многомерная постановка задачи, можно, не теряя общности рассмотрения (т. е. с учетом релаксационных явлений) свести ее к одномерной.

1. Рассмотрим на примере процесса распространения вещества в установившемся ламинарном потоке в прямой круглой трубе новый метод сведения пространственной осесимметричной задачи к системе одномерных дифференциальных уравнений, допускающей простые решения для широкого класса задач.

В системе координат, движущейся со средней скоростью потока, задача об осесимметричном распространении вещества в ламинарном установившемся потоке в трубе в отсутствие влияния продольной молекулярной диффузии при наличии в объеме химической реакции первого порядка в безразмерных переменных может быть представлена в виде

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{2} - z^2 \right) \frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \alpha c \quad (1.1)$$

$$z=0, 1, \quad \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

$$\tau = \frac{tD}{a^2}, \quad z = \frac{r}{a}, \quad \xi = \left(x - \frac{u_0}{2} t \right) \frac{D}{a^2 u_0}, \quad \alpha = \frac{ka^2}{D}$$

Здесь t — время, r , x — радиальная и продольная координаты, k — константа скорости химической реакции, u_0 — скорость в центре трубы. Краевые условия по τ и ξ ставятся в соответствие с конкретной решаемой задачей.

Умножая уравнение (1.1) на $2(1/2-z^2)^n z$, $n=0, 1, 2, \dots$, и интегрируя по z от 0 до 1 с учетом граничных условий (1.2), получаем бесконечную цепочку сцепленных между собой уравнений для определения функций f_n ; $(n+1)$ -е уравнение этой системы имеет вид

$$\frac{\partial f_n}{\partial \tau} + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \xi} + \alpha f_n = 4n \left[\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} c_1 - n f_{n-1} + \frac{n-1}{2} f_{n-2} \right] \quad (1.3)$$

$$n=0, 1, 2, \dots, \quad f_n = 2 \int_0^1 c \left(\frac{1}{2} - z^2 \right)^n z dz$$

Здесь $f_{-1}=f_{-2}=0$, $c_1=c(\tau, \xi, 1)$ — значение концентрации на стенке трубы. Легко видеть, что $f_0=c_m$ — средняя по сечению трубы концентрация, а $f_1=j$ — средний дисперсионный поток вещества в продольном направлении, обусловленный неоднородностями по сечению профилей концентрации и скорости. Вообще, f_{n+1} есть средний дисперсионный поток свойства $c(1/2-z^2)^n$.

Система (1.3) допускает исключение неизвестной функции c_1 без изменения порядка уравнений. Исключая c_1 из n -го уравнения ($n=1, 2, \dots$) с помощью $(n+1)$ -го уравнения, получим новую бесконечную цепочку сцепленных между собой уравнений, не содержащих c_1 с $(n+1)$ -м уравнением вида

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_n}{\partial \tau} + \frac{2n}{n+1} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \tau} + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \xi} + \frac{2n}{n+1} \frac{\partial f_{n+2}}{\partial \xi} + \\ & + \alpha \left(f_n + \frac{2n}{n+1} f_{n+1} \right) + 8n(n+1) \left[f_n - \frac{n-1}{4(n+1)} f_{n-2} \right] = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Такое исключение c_1 не является принципиальным, однако оно способствует увеличению скорости сходимости получаемых ниже приближенных решений к точным. Из уравнений системы (1.4) следует, что отношение порядков величин первых членов к двум последним с ростом n стремится к нулю примерно как n^{-2} . Это позволяет замкнуть первые N ($N=1, 2, \dots$) уравнений системы (1.4) двумя приближенными алгебраическими уравнениями

$$f_n - \frac{n-1}{4(n+1)} f_{n-2} = 0, \quad n=N, N+1 \quad (1.5)$$

получающимися из $(N+1)$ -го и $(N+2)$ -го уравнений системы (1.4) путем отбрасывания малых членов. В соответствии со сказанным ошибка, вносимая в замыкаемую систему из N уравнений, должна уменьшаться с ростом N как N^{-2} .

Пусть $N=1$, тогда из (1.4), (1.5) получим

$$\frac{\partial c_m}{\partial \tau} + \alpha c_m = 0 \quad (1.6)$$

т. е. в первом приближении распределение средней по сечению концентрации описывается уравнением, соответствующим режиму идеального вытеснения. Во втором приближении ($N=2$) из (1.4), (1.5) находим

$$\frac{\partial c_m}{\partial \tau} + \frac{\partial j}{\partial \xi} + \alpha c_m = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial j}{\partial \tau} + \frac{1}{8} \frac{\partial j}{\partial \xi} + \frac{1}{12} \frac{\partial c_m}{\partial \tau} + \frac{1}{12} \frac{\partial c_m}{\partial \xi} + (\alpha + 16)j + \frac{\alpha}{12} c_m = 0 \quad (1.8)$$

Задача свелась к системе гиперболических уравнений, описывающих распространение вещества с конечной скоростью, равной $v_1 = (\sqrt{193} + 1)/48$, в направлении возрастания ξ и $v_2 = (\sqrt{193} - 1)/48$ — в противоположном направлении. Величины v_1 и v_2 представляют собой некоторые средние по сечению скорости распространения вещества в разные стороны. Различие средних скоростей распространения отражает несимметричность профиля скорости относительно поперечного сечения трубы — факт, не учитываемый диффузионной моделью. В случае отсутствия химической реакции ($\alpha=0$) результаты Тейлора получаются из уравнений (1.7), (1.8), если в (1.8) пренебречь первыми тремя членами, отражающими указанную выше несимметричность профиля скорости и конвективный механизм дисперсионного потока. Аналогично могут быть выписаны уравнения для последующих приближений.

При $\alpha=0$ уравнение (1.8) с учетом (1.7) может быть представлено в интегральной форме

$$j(\tau, \xi) = -\frac{1}{12} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\partial c_m(\eta, s)}{\partial s} e^{-16(\tau-\eta)} d\eta, \quad s = \xi - \frac{\tau-\eta}{24} \quad (1.9)$$

показывающей, что дисперсионный поток в точке ξ в момент τ определяется градиентом концентрации в моменты времени η в точке $\xi - (\tau-\eta)/24$ ($-\infty < \eta \leq \tau$) с весовой функцией, экспоненциально спадающей со временем.

2. Применим найденные уравнения для нахождения стационарного распределения средней по сечению концентрации примеси при заданном ее значении в некотором входном сечении. Такая задача возникает, в частности, в теории полых проточных реакторов. Для практических целей представляет интерес среднерасходная концентрация $c_v = c_m + 2j$, для которой в первом приближении в стационарном случае в неподвижной системе координат согласно (1.7) находим

$$\frac{dc_v}{d\xi} + 2\alpha c_v = 0 \quad (2.1)$$

Здесь $\xi = \xi + \tau/2$ — продольная безразмерная координата в неподвижной системе. Выбирая входное сечение за начало отсчета ξ и считая концентрацию безразмерной на ее входное значение, из определения c_m и j получаем граничное условие

$$\xi=0, \quad c_v=1 \quad (2.2)$$

Во втором приближении из уравнений (1.7), (1.8) получим

$$\frac{d^2 c_v}{d\xi^2} + \frac{2}{3} \left(\frac{25}{3} \alpha + 64 \right) \frac{dc_v}{d\xi} + \frac{16}{3} \alpha (\alpha + 16) c_v = 0 \quad (2.3)$$

$$\xi=0, \quad c_v=1, \quad \frac{dc_v}{d\xi} = -2\alpha \quad (2.4)$$

Второе граничное условие, дополнительное к (2.2), находится из исходной системы второго приближения в точке $\xi=0$. В третьем приближе-

нии аналогично получим

$$\frac{d^3 c_v}{d\xi^3} + \frac{2}{5} \left(\frac{67}{3} \alpha + 584 \right) \frac{d^2 c_v}{d\xi^2} + 4 \left(\frac{77}{15} \alpha^2 + \frac{1384}{5} \alpha + 1536 \right) \frac{dc_v}{d\xi} + 8\alpha \left(\frac{5}{3} \alpha^2 + 128\alpha + 1536 \right) c_v = 0 \quad (2.5)$$

$$\xi=0, \quad c_v=1, \quad \frac{dc_v}{d\xi} = -2\alpha, \quad \frac{d^2 c_v}{d\xi^2} = \frac{92}{15} \alpha^2 \quad (2.6)$$

Те же уравнения, но с несколько иными граничными условиями, получаются для c_m и j .

Выписанные выше уравнения и граничные условия существенно отличаются от обычно используемой в таких случаях диффузионной модели [3]

$$\frac{d^2 c_m}{d\xi^2} - 96 \frac{dc_m}{d\xi} - 192\alpha c_m = 0 \quad (2.7)$$

$$\xi=0, \quad c_m - \frac{1}{96} \frac{dc_m}{d\xi} = 1; \quad \xi=l, \quad \frac{dc_m}{d\xi} = 0 \quad (2.8)$$

$$c_v = c_m - \frac{1}{96} \frac{dc_m}{d\xi}$$

где l — длина участка трубы, на котором протекает химическая реакция. Задание граничного условия при $\xi=l$ диктуется уравнением диффузионного типа. При этом в исходной пространственной постановке задачи и в полученных из нее одномерных приближениях (2.1)–(2.6) параметр l отсутствует. В математическом смысле полученные приближения представляют собой не двухточечную краевую задачу, как (2.7), (2.8), а задачу Коши, что соответствует исходной двумерной задаче.

Решения уравнений (2.1), (2.3), (2.5) с соответствующими граничными условиями сопоставлены с численным решением [7] для случаев $\alpha=1, 10, 100, \infty$. Результаты представлены ниже:

$\alpha\xi$	0	1	2	3	4
$\alpha = 1$					
0,1	0,8220	0,8187	0,8212	0,8211	0,8211
1,0	0,1408	0,1353	0,1407	0,1407	0,1403
2,0	0,0198	0,0183	0,0198	0,0198	0,0196
$\alpha = 10$					
0,1	0,8437	0,8187	0,8247	0,8247	0,8251
1,0	0,1828	0,1353	0,1728	0,1718	0,1709
2,0	0,0334	0,0183	0,0312	0,0315	0,0316
$\alpha = 100$					
0,1	0,9060	0,8187	0,8255	0,8264	0,8282
1,0	0,3729	0,1353	0,2131	0,2072	0,2082
2,0	0,1390	0,0183	0,0558	0,0541	0,0540
$\alpha \rightarrow \infty (D \rightarrow 0)$					
0,1	0,9999	0,8187	0,8256	0,8266	0,8328
1,0	0,9999	0,1353	0,2221	0,2173	0,2194
2,0	0,9999	0,0183	0,0637	0,0603	0,0603

где 0 — решение по диффузионной модели, 1, 2 и 3 — первое, второе и третье приближения соответственно, а 4 — численное решение.

Представленные данные показывают быструю сходимость найденных результатов к точным при любом α и непригодность диффузионной моде-

ли при $\alpha \gg 1$. Такое ограничение на диффузионную модель соответствует условию ее применимости $\alpha \ll 16$, получающемуся из требования малости времени релаксации $\tau_p \approx 1/16$ (см. уравнение (1.9)) по сравнению с временем химической реакции α^{-1} . Важно отметить, что при больших α ($\alpha > 100$) диффузионная модель приводит к результатам, отличающимся от точных более, чем результаты, найденные по модели идеального вытеснения (2.1), (2.2). Другими словами, введение дисперсионного члена с коэффициентом, найденным в условиях отсутствия химических реакций, в модель идеального вытеснения приводит не к улучшению, а к ухудшению модели при малых по сравнению с временем релаксации временах химической реакции.

3. Применим найденные уравнения для решения нестационарной задачи о распространении в бесконечной трубе мгновенно введенного в поток импульса трассера динамически пассивной примеси. Решение задачи в первом приближении не представляет интереса. Поэтому займемся анализом уравнений второго приближения (1.7), (1.8). Считая, что концентрация обезразмерена на $MD(\pi a^2 u_0)^{-1}$, где M – количество введенного трассера, а импульс введен в момент $\tau=0$ в точке $\zeta=0$, имеем следующие начальные условия:

$$\tau=0, \quad c_m = \delta(\zeta), \quad j=0 \quad (3.1)$$

Исключая из (1.7), (1.8) j и используя (3.1), получим

$$\frac{\partial^2 c_m}{\partial \tau^2} + \frac{1}{24} \frac{\partial^2 c_m}{\partial \tau \partial \zeta} - \frac{1}{12} \frac{\partial^2 c_m}{\partial \zeta^2} + 2(\alpha+8) \frac{dc_m}{d\tau} + \frac{\alpha}{24} \frac{\partial c_m}{\partial \zeta} + \alpha(\alpha+16) c_m = 0$$

$$\tau=0, \quad c_m = \delta(\zeta), \quad \frac{dc_m}{d\tau} = -\alpha \delta(\zeta)$$

Решение этой задачи может быть найдено известными методами, например с помощью функции Рымана [8]. Решение отлично от нуля при $-v_2\tau \leq \zeta \leq v_1\tau$ и имеет вид

$$c_m = \frac{1}{2} \left\{ \delta(\zeta - v_1\tau) \exp(\zeta - v_1\tau) + \delta(\zeta + v_2\tau) \exp(\zeta + v_2\tau) + p I_0(Y) + p \frac{I_1(Y)}{Y} \left[8\tau - \beta \left(\zeta - \frac{\tau}{48} \right) \right] \right\} \exp \left[-(\alpha+8)\tau - \beta \left(\zeta - \frac{\tau}{48} \right) \right] \quad (3.2)$$

$$\beta = \frac{16(v_1 - v_2)}{(v_1 + v_2)^2}, \quad p = \frac{64v_1v_2}{(v_1 + v_2)^3}, \quad Y = \frac{32\sqrt{v_1v_2}}{(v_1 + v_2)^2} \sqrt{(v_1\tau - \zeta)(v_2\tau + \zeta)}$$

Здесь I_0, I_1 – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков. Найденное решение имеет два четких фронта при $\zeta = v_1\tau$ и $\zeta = -v_2\tau$, где концентрация изменяется скачком до нуля. Применение диффузионной модели к рассматриваемой задаче дает решение

$$c_m = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\pi\tau}} \exp \left(-\alpha\tau - \frac{48\zeta^2}{\tau} \right) \quad (3.3)$$

Распределения концентраций (3.2) и (3.3) стремятся друг к другу при достаточно большом τ в области $-v_2\tau \leq \zeta \leq v_1\tau$. Сравним дисперсии функций распределения концентраций, рассчитанных по уравнениям (3.2) и (3.3). Для распределений (3.2) и (3.3) соответственно имеем

$$\langle \zeta^2 \rangle = \frac{1}{96} \left[\tau - \frac{1}{16} (1 - e^{-16\tau}) \right] \quad (3.4)$$

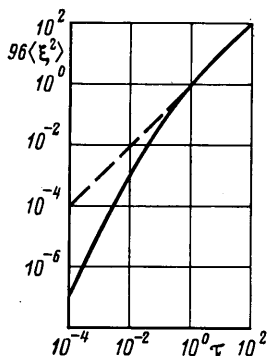
$$\langle \zeta^2 \rangle = \frac{\tau}{96} \quad (3.5)$$

Используя систему уравнений третьего приближения ($N=3$), находим

$$\langle \zeta^2 \rangle = \frac{1}{96} \left[\tau + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \gamma}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{\lambda_2 + \gamma}{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\lambda_1 \tau} + \frac{\lambda_1 + \gamma}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} e^{\lambda_2 \tau} \right] \quad (3.6)$$

$$\gamma = \frac{384}{25}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{48(-4 \pm \sqrt{6})}{5}$$

Выражения (3.4) и (3.6) переходят в (3.5) при $\tau \gg 1/16$, что совпадает с оценкой Тейлора [1, 2] применимости диффузионного уравнения. При малых τ выражения (3.5) и (3.4), (3.6) существенно различны. Учет конечности скорости дисперсионного переноса дает при малых τ квадратичную зависимость $\langle \xi^2 \rangle$ от τ . При $\tau \rightarrow 0$ (3.4) и (3.6) переходят соответственно в $\langle \xi^2 \rangle \approx \tau^2/12$ и $\langle \xi^2 \rangle \approx 2\tau^2/25$. На фигуре представлены зависимости (3.5) — штриховая кривая и (3.4), (3.6) — сплошная кривая. Выражения (3.4) и (3.6) отличаются не более чем на 5% и на фигуре неразличимы. Для рассматриваемой задачи $\langle \xi^2 \rangle$ не зависит от α , что непосредственно следует и из точной постановки задачи, тогда как использование диффузионного уравнения с эффективным коэффициентом диффузии, зависящим от α , приводит к зависимости $\langle \xi^2 \rangle$ от α [6]. Отметим, что распределение (3.2) несимметрично относительно начала координат. При больших временах несимметричность сглаживается.



В заключение укажем, что в задаче о распространении импульса трассера пренебрежение продольной молекулярной диффузией соответствует пренебрежению тонким пограничным слоем в начальные моменты времени. Толщина этого слоя может быть оценена, например, так: за время t импульс «размажется» по продольной координате за счет молекулярной диффузии на расстояние порядка $\sqrt{D t}$, а за счет конвективного движения — на расстояние порядка $u_0 t$. При условии $t \gg D/u_0^2$ вклад продольной молекулярной диффузии становится пренебрежимо малым по сравнению с конвективным «размазыванием». В безразмерных переменных указанное условие имеет вид $\tau \gg \text{Pe}^{-2}$ ($\text{Pe} = au_0/D$). В случае рассмотренной стационарной задачи, например, из оценки членов исходного уравнения можно получить, что пренебрежение продольной молекулярной диффузией возможно, если $\alpha \ll \text{Pe}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube.— Proc. Roy. Soc., London, Ser. A, 1953, v. 219, № 1137, p. 186–203.
2. Taylor G. Conditions under which dispersion of solute in a stream of solvent can be used to measure molecular diffusion.— Proc. Roy. Soc., London, Ser. A, 1954, v. 225, № 1163, p. 473–477.
3. Arus P. Анализ процессов в химических реакторах.— Л.: Химия, 1967, 328 с.
4. Bischoff K. B. Accuracy of the axial dispersion model for chemical reactors.— AIChE Journal, 1968, v. 14, № 5, p. 820–821.
5. Марон В. И. Распространение примеси в ламинарном потоке в круглой трубе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3, с. 97–103.
6. Марон В. И. Дисперсия радиоактивной примеси в потоке в трубе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 1, с. 174–176.
7. Cleland F. A., Wilhelm R. H. Diffusion and reaction in viscous-flow tubular reactor.— AIChE Journal, 1956, v. 2, № 4, p. 489–497.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.X.1982