МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1984

УДК 532.527.2.013.4

КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

КОЛЕСОВ В. В.

Изучается устойчивость неизотермического течения Куэтта – стационарного течения вязкой теплопроводной жидкости, заполняющей полость между двумя вращающимися концентрическими цилиндрами, нагретыми до различных температур. Методами теории возмущений установлены условия, достаточные для того, чтобы от нейтральной кривой монотонной неустойчивости ответвилась нейтральная кривая колебательной неустойчивости. Путем расчетов на ЭВМ показано, что при некоторых значениях параметров задачи эти условия реализуются и имеет место колебательная потеря устойчивости неизотермического течения Куэтта.

1. Постановка задачи. Линеаризованная задача устойчивости относительно $2\pi/\alpha$-периодических в аксиальном направлении вращательно-симметричных возмущений, наложенных на неизотермическое течение Куэтта [1–6], после разделения переменных и исключения давления приводится к виду

$$(L-\alpha^2-\sigma)(L-\alpha^2)u=\alpha^2\lambda f[2v-\mu r f\tau]$$
$$(L-\alpha^2-\sigma)v=2a\lambda u,\qquad \left(L+\frac{1}{r^2}-\alpha^2-\sigma P\right)\tau=\frac{\lambda u}{r} \tag{1.1}$$

$$\frac{du}{dr}=u=v=\tau=0\qquad (r=1,\ r=R) \tag{1.2}$$

$$L=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2},\qquad f=a+\frac{b}{r^2},\qquad a=\frac{\Omega R^2-1}{R^2-1}$$

$$b=1-a,\qquad R=\frac{R_2}{R_1},\qquad \Omega=\frac{\Omega_2}{\Omega_1},\qquad P=\frac{\nu}{\chi},\qquad \lambda=\frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu}.$$

$$\mu=\frac{\beta P(\Theta_2-\Theta_1)}{\ln R}$$

Здесь r – независимая радиальная переменная, λ – число Рейнольдса, P – число Прандтля, μ – параметр, характеризующий безразмерный температурный градиент, R_1, Ω_1, Θ_1 и R_2, Ω_2, Θ_2 – радиусы, угловые скорости и температуры соответственно внутреннего и внешнего цилиндров, β, ν и χ – коэффициенты соответственно теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности, σ – декремент возмущений, α – волновое число, $u(r)$, $v(r)$ и $\tau(r)$ – амплитуды возмущений соответственно радиальной и азимутальной компонент вектора скорости и температуры.

Введем гильбертово пространство H, полученное замыканием множества гладких вектор-функций $\Phi(r)=\{u(r),\ v(r),\ \tau(r)\}$, удовлетворяющих краевым условиям (1.2), в метрике, порожденной скалярным произведением

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int_1^R [u_1(r) u_2(r) + v_1(r) v_2(r) + \tau_1(r) + \tau_2(r)] r\,dr$$

Задача (1.1)—(1.2) сводится к операторному уравнению

$$A\Phi + \sigma B\Phi = \lambda C\Phi \tag{1.3}$$

$$A\Phi = \{(L-\alpha^2)^2 u, \quad (L-\alpha^2) v, \quad (L+1/r^2-\alpha^2)\tau\}$$

$$B\Phi = \{-(L-\alpha^2) u, -v, -P\tau\}$$

$$C\Phi = \{\alpha^2 f(2v-\mu r f\tau), 2au, u/r\}$$

Здесь линейные вещественные дифференциальные операторы A, B и C действуют в пространстве H.

Если число Рейнольдса λ не слишком велико, то все декременты σ лежат внутри левой полуплоскости ($\operatorname{Re}\sigma<0$) и неизотермическое течение Куэтта асимптотически устойчиво по Ляпунову в малом. Для определения критического значения λ_0 числа Рейнольдса λ, соответствующего монотонной потере устойчивости (переход вещественного декремента σ в правую полуплоскость через ноль), полагают в (1.3) $\sigma=0$ и ищут «первое» (наименьшее положительное) собственное значение λ_0 возникающей при этом спектральной задачи

$$A\Phi_0 = \lambda_0 C\Phi_0 \tag{1.4}$$

Для определения критического значения λ_ω, соответствующего колебательной потере устойчивости, полагают в (1.3) $\sigma=\pm i\omega$, где ω — неизвестная циклическая частота.

Зафиксируем параметры задачи R, Ω, P и α. Тогда критическое значение числа Рейнольдса зависит только от безразмерного температурного градиента μ.

Путем непосредственного расчета на ЭВМ было показано, что в предельном случае бесконечно малого зазора между цилиндрами при некотором $\mu=\mu_0$ от нейтральной кривой монотонной неустойчивости $\lambda_0=\lambda_0(\mu)$ ответвляется нейтральная кривая колебательной неустойчивости $\lambda_\omega=\lambda_\omega(\mu)$, расположенная так, что при μ, близких к μ_0, выполняется неравенство $\lambda_\omega(\mu)<\lambda_0(\mu)$, т. е. колебательная потеря устойчивости предшествует монотонной [4]. Целью данной работы является установление достаточных условий существования такой точки μ_0 в общем случае для произвольного зазора между цилиндрами. Применяется метод, близкий к тому, который был использован в [7, 8] для отыскания такого значения числа Гартмана, при котором возникает колебательная неустойчивость в подогреваемой снизу проводящей жидкости, находящейся в магнитном поле.

2. Обнаружение колебательной неустойчивости. Наряду с уравнением (1.4) будем рассматривать сопряженное к нему в пространстве H операторное уравнение

$$A^*\Psi_0 = \lambda_0 C^*\Psi_0, \quad A^* = A \tag{2.1}$$

$$C^*\Phi = \{2av+\tau/r, 2\alpha^2 fu, -\alpha^2\mu r f^2 u\}$$

Предположим, что собственные векторы Φ_0 и Ψ_0 уравнений (1.4) и (2.1), отвечающие «первому» собственному значению λ_0, определяются однозначно с точностью до произвольного постоянного множителя и декременты, лежащие внутри правой полуплоскости ($\operatorname{Re}\sigma>0$), ограничены при малых сверхкритичностях ($\lambda>\lambda_0$). Справедливость этих предположений проверялась численно.

Следуя [9], разложим вещественный декремент σ уравнения (1.3), исчезающий при $\lambda \to \lambda_0$, в ряд теории возмущений

$$\sigma = \sigma_1(\lambda - \lambda_0) + \sigma_2(\lambda - \lambda_0)^2 + \ldots \tag{2.2}$$

$$\sigma_1 = \frac{d\sigma}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{(C\Phi_0, \Psi_0)}{(B\Phi_0, \Psi_0)} \tag{2.3}$$

Знак σ_1 указывает на направление движения вещественного декремента σ, представимого рядом (2.2), из одной полуплоскости в другую при переходе числа Рейнольдса λ через критическое значение λ_0.

Если $\sigma_1 > 0$, то σ, двигаясь вдоль вещественной оси, переходит из левой полуплоскости ($\mathrm{Re}\,\sigma < 0$) в правую ($\mathrm{Re}\,\sigma > 0$), что соответствует монотонной потере устойчивости неизотермического течения Куэтта.

Если же $\sigma_1 < 0$, то направление движения противоположное: при малых докритичностях ($\lambda < \lambda_0$) в правой полуплоскости имеется декремент σ, который с ростом λ, двигаясь вдоль вещественной оси, проходит в левую полуплоскость. Наличие σ в правой полуплоскости при $\lambda < \lambda_0$ не может объясняться тем, что при некотором λ он попал туда, пройдя через ноль, так как это противоречило бы тому, что λ_0 является «первым» собственным значением. Прийти из бесконечности декремент σ также не мог ввиду предположения об ограниченности части спектра устойчивости, лежащей в правой полуплоскости. Следовательно, при некотором $\lambda = \lambda_\omega$ ($\lambda_\omega < \lambda_0$) комплексно-сопряженная пара декрементов прошла в правую полуплоскость через мнимую ось, т. е. произошла колебательная потеря устойчивости неизотермического течения Куэтта. Дальнейшее увеличение λ привело к тому, что эта пара слилась, образовав двукратный вещественный положительный декремент, который затем расщепился на два простых. Один из них, двигаясь вдоль вещественной оси, прошел при $\lambda = \lambda_0$ через ноль и вернулся в левую полуплоскость (именно этот декремент представим рядом (2.2) при λ, близких к λ_0), а другой декремент при $\lambda = \lambda_0$ остался внутри правой полуплоскости.

Если $(B\Phi_0, \Psi_0) = 0$ при некотором $\mu = \mu_0$, то разложение (2.2) теряет силу. В этой исключительной точке декремент σ, исчезающий при $\lambda \to \lambda_0$, и соответствующий ему вектор $\mathbf{\Phi}$ раскладываются в ряды

$$\begin{gathered} \sigma = \gamma + O(\lambda - \lambda_0), \quad \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_0 + \gamma\mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{O}(\lambda - \lambda_0) \\ \gamma = \pm[(\lambda - \lambda_0)(C\Phi_0, \Psi_0)/(B\Phi_1, \Psi_0)]^{1/2} \end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\mathbf{\Phi}_1$ — решение неоднородного операторного уравнения

$$A\Phi_1 - \lambda_0 C\Phi_1 = -B\Phi_0$$

Это решение существует, так как $(B\Phi_0, \Psi_0) = 0$.

Предположим, что $(C\Phi_0, \Psi_0)\cdot(B\Phi_1, \Psi_0) > 0$ при $\mu = \mu_0$ (вычисления подтверждают, что для неизотермического течения Куэтта это неравенство выполняется). Формула (2.4) тогда показывает, что при малых докритичностях в спектре устойчивости неизотермического течения Куэтта имеется комплексно-сопряженная пара декрементов. При $\lambda = \lambda_0$ эта пара сливается в двукратный декремент $\sigma = 0$. Дальнейшее увеличение λ приводит к тому, что декремент $\sigma = 0$ расщепляется на два простых вещественных декремента, знаки которых различны.

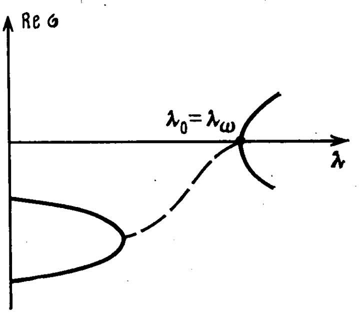
Картина поведения декрементов σ в окрестности критического значения λ_0 числа Рейнольдса λ для случая $\mu = \mu_0$ схематически показана на фиг. 1. Сплошной линией изображены вещественные декременты, штриховой — вещественная часть комплексно-сопряженной пары декрементов. Ввиду гладкой зависимости операторов A, B и C от параметра μ, при μ близких к μ_0, декременты σ ведут себя так, как это показано на фиг. 2 (случай $\sigma_1 > 0$) и фиг. 3 (случай $\sigma_1 < 0$).

Таким образом, если при некотором $\mu = \mu_0$ происходит смена знака функционала $(B\Phi_0, \Psi_0)$, не сопровождающаяся сменой знака функционала $(C\Phi_0, \Psi_0)$, то в точке $\mu=\mu_0$ от нейтральной кривой монотонной неустойчивости $\lambda_0=\lambda_0(\mu)$ ответвляется нейтральная кривая колебательной неустойчивости $\lambda_\omega=\lambda_\omega(\mu)$, причем $\lambda_\omega(\mu)<\lambda_0(\mu)$ при μ, близких к μ_0. При этом, разумеется, открытым остается вопрос о существовании нейтральных кривых колебательной неустойчивости, расположенных вдали от нейтральной кривой монотонной неустойчивости или пересекающих ее при некотором μ.

Заметим, что приведенные выше рассуждения весьма мало связаны со спецификой неизотермического течения Куэтта и могут быть использованы для обнаружения колебательной потери устойчивости других стационарных течений.

3. Численные результаты. Для определения старшего коэффициента σ_1 разложения декремента σ неизотермического течения Куэтта в ряд теории возмущений (2.2) требуется найти критическое значение λ_0 числа Рейнольдса λ и соответствующие ему собственные векторы Φ_0 и Ψ_0 спектральных задач (1.4) и (2.1). Эти расчеты были выполнены на ЭВМ БЭСМ-4 методом пристрелки.

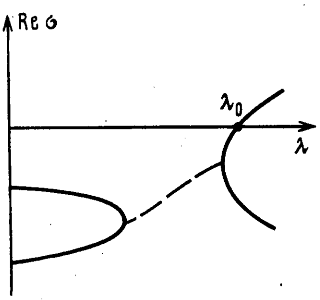
Вычисления, проведенные для случая $R=2$ (радиус внешнего цилиндра в 2 раза больше радиуса внутреннего цилиндра), $\Omega=0$ (внешний цилиндр покоится), $P=7{,}1$ (полость между цилиндрами заполнена водой), показали, что $\sigma_1>0$ при $\mu>\mu_0$ и $\sigma_1<0$ при $\mu<\mu_0$ $(\mu_0\approx-0{,}75)$. Это означает, что, когда температура внутреннего цилиндра выше температуры внешнего цилиндра и температурный градиент достаточно велик $(\mu<\mu_0)$, имеет место колебательная вращательно-симметричная потеря устойчивости неизотермического течения Куэтта.



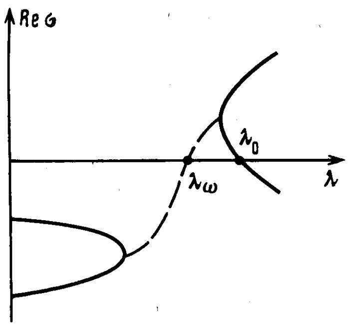
Фиг. 1

Расчеты, аналогичные описанным в [5], показали, что для рассматриваемых значений параметров задачи вращательно-симметричные возмущения являются самыми опасными в классе трехмерных пространственно-периодических возмущений. Поэтому в случае $\mu<\mu_0$ при переходе числа Рейнольдса λ через критическое значение λ_ω в экспериментах следует ожидать потерю устойчивости неизотермического течения Куэтта с образованием вторичного вращательно-симметричного автоколебательного режима. Если же $\mu>\mu_0$, то самыми опасными являются монотонные вращательно-симметричные возмущения и в экспериментах будет наблюдаться вторичное стационарное течение типа вихрей Тейлора.

Результаты расчета зависимости критических значений λ_0 и λ_ω числа Рейнольдса λ от безразмерного температурного градиента μ представлены в таблице.



Фиг. 2



Фиг. 3

При вычислениях проводилась численная минимизация функций $\lambda_0(\alpha)$ и $\lambda_\omega(\alpha)$ по волновому числу α, т. е. отыскивались возмущения, обладающие самой опасной длиной волны. Волновые числа самых опасных возмущений обозначены через α_0 для монотонных возмущений и через α_ω для колебательных возмущений. Расчет показал, что в случае колебательной неустойчивости стабилизирующее влияние отрицательных градиентов температуры $(\mu<0)$ гораздо менее существенно: $\lambda_\omega(\mu)$ возрастает при уменьшении μ как линейная функция, а $\lambda_0(\mu)$ возрастает гораздо

μ	λ_0	α_0	λ_ω	α_ω	ω
−4	215,2	3,67	80,7	3,10	0,075
−3	136,3	3,20	79,3	3,10	0,063
−2	97,9	3,14	77,9	3,10	0,046
−1	79,3	3,15	76,5	3,10	0,020
0	68,2	3,16	—	—	—
1	60,7	3,17	—	—	—
2	55,2	3,18	—	—	—
3	50,9	3,18	—	—	—
4	47,6	3,19	—	—	—

быстрее. Отметим также, что длина волны самого опасного колебательного возмущения практически не зависит от μ и при любых μ несколько превышает длину волны самого опасного монотонного возмущения.

Автор благодарит В. И. Юдовича за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yih C.-S.* Dual role of viscosity in the instability of revolving fluids of variable density. — Phys. Fluids, 1961, v. 4, № 7, p. 806—811.
2. *Уоловит, Цзяо, Диприма* Устойчивость течения в произвольном зазоре между концентрическими цилиндрическими поверхностями с учетом влияния радиального градиента температур. — Тр. амер. о-ва инж.-мех. Прикл. механика, 1964, т. 31, № 4, с. 12—21.
3. *Колесов В. В., Овчинникова С. Н.* Устойчивость течения жидкости между нагретыми вращающимися цилиндрами.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 3, с. 32—36.
4. *Ли.* Влияние термодиффузии на устойчивость течения между двумя вращающимися цилиндрами.— Тр. амер. о-ва инж.-мех. Проблемы трения и смазки, 1977, т. 99, № 3, с. 6—11.
5. *Колесов В. В.* Устойчивость неизотермического течения Куэтта.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 1, с. 167—170.
6. *Колесов В. В.* Об условиях устойчивости неизотермического течения Куэтта.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 441—447.
7. *Шлиомис М. И.* Осциллирующие возмущения в проводящей жидкости в магнитном поле.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 523—531.
8. *Шлиомис М. И.* О колебательной конвективной неустойчивости проводящей жидкости в магнитном поле.—ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, с. 678—683.
9. *Юдович В. И.* Устойчивость конвекционных потоков.—ПММ, 1967, т. 31, вып. 2, с. 272—281.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
29.X.1982