

УДК 532.527.013

**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ
ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА
С ЖИДКОСТЬЮ**

КУРБАТОВА Г. И., ФИЛИПШОВ Б. В.

Исследуется течение идеальной несжимаемой невесомой жидкости, заполняющей вращающийся цилиндр. Ось вращения цилиндра находится вне его, параллельна его образующей, а форма сечения определяется в процессе решения задачи.

Ниже получен класс точных решений в элементарных функциях сформулированной задачи для различных угловых скоростей вращения цилиндра. В этих решениях поле течения формируется двумя прямолинейными вихревыми нитями, параллельными образующей цилиндра. Интенсивности вихревых нитей определяются угловой скоростью вращения ω .

Исследования течений идеальной жидкости во вращающихся сосудах начаты еще в прошлом веке Стоксом, Жуковским [1]. Обзор литературы по этому вопросу можно найти, например, в монографиях [2, 3].

1. Запишем постановку задачи для $\omega = \text{const}$ в прямоугольной системе координат XYZ , вращающейся с угловой скоростью ω

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{w} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + 2\omega \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u} \mathbf{n} = 0 \quad (xyz) \in F, \quad \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.3)$$

Здесь t — время, \mathbf{r} , \mathbf{u} , p , ρ — радиус-вектор, скорость, давление и плотность жидкости соответственно. Пусть ось Z параллельна оси вращения Z_1 , а координаты точки пересечения оси Z_1 и плоскости XY $(-\lambda, 0)$; $F(x, y) = 0$ — уравнение направляющей цилиндра в плоскости XY , \mathbf{n} — единичная внутренняя нормаль к F , $\mathbf{w} = -\omega^2 \lambda \mathbf{i}$.

Так как задача плоская и движение жидкости в системе координат XYZ установившееся, то в терминах завихренности Ω ($\Omega = \nabla \times \mathbf{u}$) и функции тока ψ ($u_x = \partial \psi / \partial y$, $u_y = -\partial \psi / \partial x$) система уравнений (1.1)–(1.3) запишется в виде

$$\nabla^2 \psi = -\Omega_z \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (x, y) \in F \quad (1.6)$$

Точные решения задачи (1.4)–(1.6) известны лишь для некоторых специальных случаев. Так, например, доказано, что область однородной завихренности, ограниченная эллипсоидом, может вращаться вокруг любой из его главных осей без изменения формы с постоянной угловой скоростью. Эта классическая задача рассмотрена Кирхгофом, Жуковским, Пуанкаре.

В рассматриваемом случае ось вращения находится вне цилиндра, содержащего жидкость.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что система (1.4), (1.5) имеет следующий класс точных решений:

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \{ \kappa_1 \ln[(x+d)^2 + y^2] + \kappa_2 \ln[(x-d)^2 + y^2] \} + \frac{\omega(x^2 + y^2)}{2} + \omega \lambda x + \psi_0 \quad (1.7)$$

$$\Omega_z = \kappa_1 \delta(x+d) \delta(y) + \kappa_2 \delta(x-d) \delta(y) - 2\omega \quad (1.8)$$

$$\kappa_1 = 4\pi d \omega (r_0 + 2d), \quad \kappa_2 = -4\pi d \omega r_0 \quad (1.9)$$

где ψ_0 — произвольная гармоническая функция, δ — функция Дирака.

Течения, определяемые выражениями (1.7)–(1.9), формируются двумя прямолинейными вихревыми нитями, параллельными оси вращения, с координатами $(-d, 0)$, $(d, 0)$ и интенсивностями κ_1 , κ_2 ; r_0 — расстояние первой вихревой нити от оси вращения, $2d$ — расстояние между вихревыми нитями, $\lambda = r_0 + d$. Параметры κ_1 , κ_2 , d , r_0 определены соотношениями (1.9) таким образом, что вихревые нити вращаются с угловой скоростью ω вокруг оси Z_1 .

Решения (1.7), (1.8) справедливы для неограниченной жидкости. Однако конструкция этих течений такова, что с их помощью можно решить и граничную задачу (1.4)–(1.6), выбрав надлежащим образом форму сечения цилиндра. Найденные решения удовлетворяют граничному условию (1.6), если направляющая цилиндра $F(x, y)$ совпадает с одной из линий тока течения $\psi = \text{const}$. Функция ψ_0 в выражении (1.7) в этом случае обращается в ноль.

2. Запишем выражение для функции тока (1.7) в безразмерном виде

$$\psi' = s \ln[(x' - 1)^2 + y'^2] - (s + 2) \ln[(x' + 1)^2 + y'^2] + \quad (2.1)$$

$$+ \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + (s + 1)x' - 4 \ln d$$

$$x' = \frac{x}{d}, \quad y' = \frac{y}{d}, \quad s = \frac{r_0}{d}, \quad \psi' = \frac{\psi}{\omega d^2}$$

Штрихи опустим. Введем функцию ψ_1

$$\psi_1 = \psi/s + (4 \ln d)/s$$

Так как ψ_1 зависит от ψ линейно, то функция ψ_1 принимает постоянные значения k на тех же самых кривых, что и функция тока ψ . Поэтому на любой кривой $F(x, y) = \psi_1 - k$ граничное условие (1.6) выполняется тождественно.

Покажем, что в семействе линий $\psi_1 = k$ существует замкнутая линия, охватывающая оба вихря и не охватывающая центра вращения. Эту линию следует выбрать в качестве направляющей цилиндра.

Уравнение

$$\psi_1 = \ln[(x-1)^2 + y^2] - \left(1 + \frac{2}{s}\right) \ln[(x+1)^2 + y^2] + \quad (2.2)$$

$$+ \frac{x^2 + y^2}{2s} + \left(1 + \frac{1}{s}\right)x = k$$

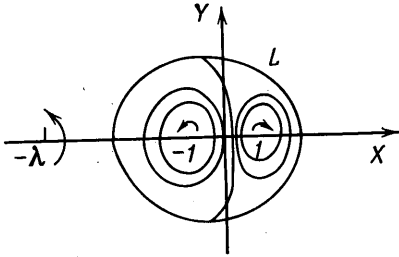
задает в плоскости XU кривые $L(x, y, s, k) = 0$, определяемые двумя параметрами s и k . Найдем такое значение параметра $k = k^*$, при котором кривая $L(x, y, s, k^*) = 0$ удовлетворяла бы сформулированным свойствам. Ее эскиз изображен на фиг. 1.

Из анализа уравнения (2.2) следует, что семейство линий тока $\psi_1 = k$ расслаивается на замкнутые кривые, охватывающие первый или второй вихрь в зависимости от величины параметра k . Для линий тока, охваты-

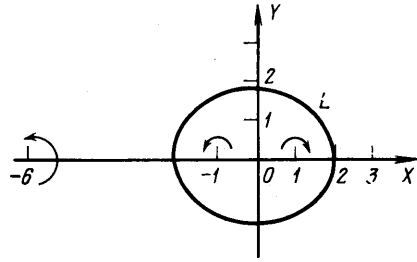
вающих первый вихрь, величина параметра k уменьшается по мере удаления от точки $(-1, 0)$, для линий тока вокруг второго вихря — увеличивается. Предположим, что существует предельное значение параметра $k=k^*$, при котором обе кривые смыкаются, образуя вместе искомую линию L (см. фиг. 1).

Найдем условия, которым необходимо подчинить параметр k^* , чтобы кривая L пересекла оси X, Y в следующих точках: $x_1 \in (-s+1, -1)$, $y_1=0$; $x_2 \in (1, \infty)$, $y_2=0$; $x_3=0$, $y_3 \in (0, \infty)$.

В силу симметрии задачи относительно оси X достаточно рассмотреть верхнюю полуплоскость.



Фиг. 1



Фиг. 2

Координаты точек пересечения кривой L с осью Y удовлетворяют уравнению

$$F(0, y) \equiv \ln(1+y^2) - \left(1 + \frac{2}{s}\right) \ln(1+y^2) + \frac{y^2}{2s} - k^* = 0 \quad (2.3)$$

Кривая L пересечет луч Y только один раз, если уравнение (2.3) имеет единственное решение. Функция $F(y)$ при любом k^* ведет себя следующим образом: монотонно убывает в области $[0, \sqrt{3})$, точка $y = \sqrt{3}$ является точкой перегиба, в области $(\sqrt{3}, \infty)$ — монотонно возрастает. Отсюда следует, что уравнение (2.3) имеет единственное решение в двух взаимоисключающих случаях

$$F(y)|_{y=0} < 0, \quad k^* > 0; \quad F(y)|_{y=\sqrt{3}} = 0, \quad k^* = \frac{3/2 - 4 \ln 2}{s} \quad (2.4)$$

Можно показать, что условия существования требуемых корней на оси X исключают первый случай и согласуются со вторым при дополнительном условии на величину s

$$\ln \left[\left(1 + \frac{2}{s}\right) \left(\frac{2}{s}\right)^{2/s} \right] < \frac{1}{s} + \frac{s+2}{4} \quad (2.5)$$

Решая неравенство (2.5) численно, находим $s > 1,300038$.

Проведенное исследование позволяет сформулировать алгоритмы построения кривой L : задаем значение параметра s , удовлетворяющее неравенству (2.5), определяем по нему значение параметра k^* из уравнения (2.4) и строим кривую по точкам, координаты которых определяем из численного решения уравнения (2.2) при $k=k^*$.

На фиг. 2 приведена кривая L , соответствующая значениям параметров $s=5$, $k^* = -0,2545176$.

При выбранном значении параметра s форма кривой L и соответственно форма сечения цилиндра оказались близкой к круговой.

Найденная кривая L сохраняется при переходе к вращению с другой угловой скоростью, направление которой остается прежним. Это связано с тем, что для исследуемой граничной задачи функция тока ψ (1.7) зависит от угловой скорости ω линейно ($\psi_0=0$). Поэтому для другой угловой скорости кривые, на которых функция тока принимает постоянное значение

ние, остаются прежними, а величина функции тока на этих кривых изменяется пропорционально изменению угловой скорости.

Применительно к построенному решению это означает, что положение вихревых нитей в жидкости, заполняющей цилиндр, остается неизменным, а их интенсивности меняются в соответствии с формулами (1.9).

Таким образом, параметр k^* определяется соотношением (2.4).

Если неравенство (2.5) не выполняется, кривая L пересекает ось X левее центра вращения, т. е. ось вращения цилиндра, направляющая которого совпадает с кривой L , окажется внутренней.

3. Найдем распределение давления в жидкости, целиком заполняющей цилиндр с направляющей L , построенной в п. 2. Для рассматриваемой задачи уравнение движения жидкости (1.2) можно записать в размерном виде

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} = \nabla (p^* + u^2/2), \quad p^* = p/\rho + 2\omega\psi - 1/2\omega^2 [(x+\lambda)^2 + y^2] \quad (3.1)$$

Из (1.8) следует, что величина завихренности Ω_z для любой точки жидкости, кроме особых точек расположения вихрей, определяется соотношением $\Omega_z = -2\omega$. Поэтому имеет место интеграл уравнения движения

$$p/\rho = 1/2\omega^2 [(x+\lambda)^2 + y^2] - 1/2u^2 + \gamma \quad (3.2)$$

Здесь γ — произвольная постоянная, одна и та же для всех точек жидкости.

Приведем явное выражение для скорости и давления жидкости в цилиндре

$$u_x = -2\omega d \left[\frac{(r_0 + 2d)y}{(x+d)^2 + y^2} - \frac{r_0 y}{(x-d)^2 + y^2} - \frac{y}{2d} \right] \quad (3.3)$$

$$u_y = 2\omega d \left[\frac{(r_0 + 2d)(x+d)}{(x+d)^2 + y^2} - \frac{r_0(x-d)}{(x-d)^2 + y^2} - \frac{x+\lambda}{2d} \right]$$

$$p = (2d\omega)^2 \rho \int (R, r_0, 2d) + \gamma, \quad R = ((x+\lambda)^2 + y^2)^{1/2} \quad (3.4)$$

$$\int (R, r_0, 2d) = \frac{(R - 2r_0 - 2d)}{2(R - r_0)^2 (R - r_0 - 2d)^2} [R^3 - R^2(r_0 + 4d) - R(r_0 - 2d)^2 + r_0(r_0^2 + 4d)^2 + 4d^2(r_0 + 2d)]$$

Здесь величины x, y размерные. Из выражений (3.3) — (3.4) следует, что в рассматриваемой задаче скорость жидкости пропорциональна угловой скорости вращения цилиндра, а давление в жидкости пропорционально квадрату угловой скорости. Формулы (3.3), (3.4) позволяют определить все параметры течения идеальной невесомой жидкости во вращающемся с угловой скоростью ω цилиндре, направляющая которого совпадает с кривой L , заданной уравнениями (2.2), (2.4).

Полученное точное решение стационарной задачи можно использовать при построении приближенного решения квазистационарных задач, когда угловая скорость цилиндра ω меняется со временем достаточно медленно.

Действительно, отождествим в выражениях (3.3), (3.4) ω с величиной мгновенной угловой скорости $\omega(t)$ построенного цилиндра. Легко проверить, что это поле скоростей в системе координат, вращающейся с угловой скоростью $\omega(t)$, в каждый момент времени удовлетворяет граничному условию непротекания, так как кривая L не меняется при переходе к вращению с другой угловой скоростью.

Кроме того, это поле скоростей и давлений будет приближенно удов-

летворять уравнениям движения, которые для $\omega = \omega(t)$ запишутся в виде

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - \omega^2(\lambda + x) - y \frac{d\omega}{dt} - 2\omega u_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} - \omega^2 y + (\lambda + x) \frac{d\omega}{dt} + 2\omega u_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.6)$$

Так как u_x и u_y зависят от времени только через ω , запишем (3.5), (3.6) в виде

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial \omega} - y \right) \frac{d\omega}{dt} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - \omega^2(\lambda + x) - 2\omega u_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\partial u_y}{\partial \omega} + \lambda + x \right) \frac{d\omega}{dt} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} - \omega^2 y + 2\omega u_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.7), (3.8) отличаются от стационарных уравнений движения только слагаемыми, содержащими множителем величину $d\omega/dt$. Поэтому всегда существует класс вращательных движений цилиндра с медленным изменением угловых скоростей, для которого выражения (3.3), (3.4) (если в них ω заменить на $\omega(t)$) можно считать приближенным решением квазистационарной задачи (3.7), (3.8).

Формулы (3.3), (3.4), отнесенные к части жидкости, находящейся вне цилиндра, представляют собой решение внешней задачи обтекания цилиндра.

Подчеркнем, что полученное решение граничной задачи (1.1)–(1.3) является одним из немногих примеров точного решения граничных задач для нелинейных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Полное собр. соч. Т. 3. Гидродинамика. М.–Л.; ОНТИ НКТП СССР. Глав. ред. авиацион. лит., 1936. 486 с.
2. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоздат, 1975. 303 с.
3. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., 1968. 230 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
30.XI.1982