

УДК 532.526.5

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЭЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ОСИ ВИХРЕВОЙ ПЕЛЕНЫ

ЗУБЦОВ А. В., ГАЙФУЛЛИН А. М.

Построено асимптотическое решение задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в окрестности оси вихревой пелены, возникающей в результате отрыва потока от острых кромок треугольного крыла малого удлинения при больших значениях числа Рейнольдса и малых углах атаки.

При больших числах Рейнольдса Re обтекание крыльев, установленных под углом атаки к набегающему потоку, как правило, сопровождается отрывом пограничного слоя. Для тонких треугольных крыльев малого и умеренного удлинения $\lambda \leq \lambda_0 \approx 2,0$ отрыв пограничного слоя происходит в окрестности передних кромок крыла. При $Re \rightarrow \infty$ оторвавшийся пограничный слой вырождается в вихревую пелену, которая сворачивается в спиралевидную поверхность. Ось этой поверхности берет начало из вершины крыла и близка по направлению к вектору скорости набегающего потока. Геометрия вихревой пелены и аэродинамические характеристики крыла могут быть определены из решения уравнений Эйлера при условии, что известно положение линий отрыва пограничного слоя [1, 2]. Как показали исследования, решения уравнений Эйлера имеют особенность на оси вихревой пелены [3, 4]. Все это указывает на то, что при $Re \gg 1$ задача об отрывном обтекании крыла не может быть полностью решена в рамках модели идеальной жидкости. Силы вязкости необходимо учитывать по крайней мере при определении линии отрыва пограничного слоя, а так же при построении картины течения в окрестности оси вихревой пелены. Интерес к исследованию влияния вязкости на течение жидкости вблизи оси вихревой пелены связан с необходимостью выяснения физических причин «взрыва» ядра вихревой пелены и построения математического описания этого явления. Практическая важность решения этой проблемы очевидна, поскольку «взрыв вихря» оказывает существенное влияние на характеристики глобального течения. В настоящей работе сделана попытка построить в окрестности оси вихревой пелены асимптотическое решение уравнений вязкой жидкости для случая треугольного крыла малого удлинения.

1. **Постановка задачи.** Введем цилиндрическую систему координат x, r, θ так, чтобы ось x совпала с осью вихревой пелены, и следующие обозначения: V_∞ — модуль скорости набегающего потока, $uV_\infty, vV_\infty, wV_\infty$ — составляющие скорости в системе координат (x, r, θ) , $1/2\rho V_\infty^2 p$ — статическое давление, α — угол атаки, θ_0 — угол при вершине крыла, $\alpha_0 = \alpha/\theta_0$, $Re = V_\infty x/\nu$. Будем искать асимптотическое решение рассматриваемой задачи в предположении, что

$$Re \gg 1, \quad 1 \gg \alpha \gg Re^{-1/2}, \quad r \ll \alpha x, \quad \alpha_0 \sim O(1)$$

Так как при $\alpha \ll 1$ и $\alpha_0 \sim O(1)$ характерный радиус кривизны вихревой пелены в плоскости $x = \text{const}$ является величиной порядка $r_0 \sim \alpha x$, то условие $r \ll \alpha x$ означает, что решение ищется в окрестности оси вихревой пелены. Условие $Re^{-1/2} \ll \alpha$ соответствует случаю, когда толщина пограничного слоя, оторвавшегося от острых кромок крыла, намного меньше r_0 .

2. **Решение уравнений Эйлера в окрестности оси вихревой пелены.** Из теории идеальной жидкости известно, что при отрывном обтекании треугольного крыла малого удлинения возмущенное течение является в первом приближении коническим (за исключением малой окрестности вершины крыла и его задней кромки), а составляющие безразмерной скорости

представимы в виде [5, 6]

$$u=1+\alpha^2 u_1(\eta, \theta, \alpha_0)+\dots, \quad v=\alpha v_1(\eta, \theta, \alpha_0)+\dots, \quad w=\alpha w_1(\eta, \theta, \alpha_0)+\dots \quad (2.1)$$

Здесь $\eta=r/\alpha x$.

Известно также, что $u_1 \rightarrow \infty$ при $\eta \rightarrow 0$ и поэтому в некоторой окрестности вихревой пелены результаты теории малых возмущений (2.1) становятся несправедливыми. В работе [3] получены характеристики конического течения несжимаемой жидкости при наличии вихревой пелены и $r/x \rightarrow 0$ на основе решения полных нелинейных уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} u &\sim C_1 \left[-\ln \frac{r}{x} + C_2 - \frac{r}{x} \left(-\ln \frac{r}{x} + C_2 + \frac{1}{2} \right)^{1/2} (\theta_s - \theta - \pi) \right] + \dots \\ v &\sim C_1 \left[-\frac{1}{2} \frac{r}{x} - \left(\frac{r}{x} \right)^2 \left(-\ln \frac{r}{x} + C_2 + 1 \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(-\ln \frac{r}{x} + C_2 + \frac{1}{2} \right)^{1/2} (\theta_s - \theta - \pi) \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$w \sim C_1 \left[\left(-\ln \frac{r}{x} + C_2 + \frac{1}{2} \right)^{1/2} + \frac{r}{x} \left(-\ln \frac{r}{x} + C_2 \right) (\theta_s - \theta - \pi) \right] + \dots$$

где C_1, C_2 — свободные константы, $\theta_s - 2\pi \leq \theta \leq \theta_s$, $\theta_s(r/x)$ — функция, определяющая форму сечения вихревой пелены плоскостью $x = \text{const}$ и удовлетворяющая уравнению

$$d\theta_s/dt = -t^{-2} (-\ln t + C_2 + 1/2)^{-1/2} + O(\ln t), \quad t = r/x \quad (2.3)$$

Полагая, что при малых значениях η существует область перекрытия асимптотических разложений (2.1) и (2.2), получим выражение для коэффициентов C_1 и C_2

$$C_1 = \alpha^2 C_0, \quad C_2 = (\alpha^2 C_0)^{-1} + \ln |\alpha|$$

где C_0 — некоторая константа, зависящая от α_0 и определяемая из глобального решения задачи.

Итак, при $\eta \ll 1$ имеют место следующие асимптотические разложения для составляющих скорости и функции θ_s :

$$\begin{aligned} u &\sim 1 - \alpha^2 C_0 \ln \eta - \alpha^2 \sqrt{C_0} \eta (1 - \alpha^2 C_0 \ln \eta / \sqrt{e})^{1/2} (\theta_s - \theta - \pi) + \dots \\ v &\sim -\alpha \eta \left[\frac{\eta}{\sqrt{C_0}} \left(1 - \alpha^2 C_0 \ln \frac{\eta}{e} \right) \left(1 - \alpha^2 C_0 \ln \frac{\eta}{\sqrt{e}} \right)^{1/2} (\theta_s - \theta - \pi) + \frac{\alpha^2 C_0}{2} \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} w &\sim \alpha \left[\sqrt{C_0} (1 - \alpha^2 C_0 \ln \eta / \sqrt{e})^{1/2} + \eta (1 - \alpha^2 C_0 \ln \eta) (\theta_s - \theta - \pi) \right] + \dots \\ \frac{d\theta_s}{d\eta} &= -\frac{\sqrt{C_0}}{\eta^2 (1 - \alpha^2 C_0 \ln \eta / \sqrt{e})^{1/2}} + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из разложений (2.4) следует, что предположение о малости возмущений, вносимых вихревой пеленой, нарушается в области, где $\eta \sim \sim \exp(-1/\alpha^2)$.

3. Асимптотические оценки в зоне вязких возмущений. С точностью до членов более высокого порядка малости решение (2.4) для составляющих скорости u и w можно переписать в виде

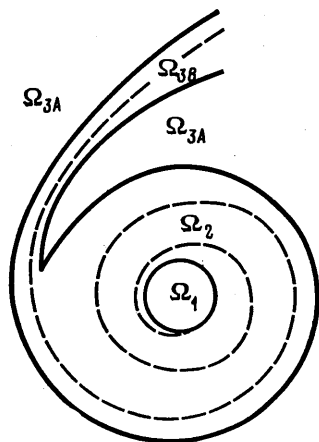
$$u \sim 1 - \alpha^2 C_0 \ln \eta, \quad w \sim \alpha \sqrt{C_0} (1 - \alpha^2 C_0 \ln \eta / \sqrt{e})^{1/2} \quad (3.1)$$

Очевидно, что это решение не удовлетворяет граничным условиям $du/d\eta = w = 0$ при $\eta = 0$. Для выполнения этих условий необходимо в окрестности линии $\eta = 0$ учесть действие сил вязкости. Если ограничиться рассмотрением случая, когда $\alpha \leq O(1/\sqrt{\ln \text{Re}})$, то из условия равенства поряд-

ков вязких и инерционных членов в уравнениях движения следует оценка для толщины вязкой зоны $r \sim x Re^{-1/2}$ или $\eta \sim \alpha^{-1} Re^{-1/2}$ (область Ω_1 , фиг. 1). Для получения непрерывного решения задачи при $\eta \gg \alpha^{-1} Re^{-1/2}$ необходимо учесть влияние сил вязкости в окрестности поверхности вихревой пелены, где, согласно (2.4), имеется разрыв составляющих скорости: $[u] \sim \alpha^2 \eta$, $[w] \sim \alpha \eta$, $[v] \sim \alpha \eta^2$. Окрестность вихревой пелены представляет собой слой смешения, который является продолжением пограничного слоя, оторвавшегося с острых кромок крыла. Толщина слоя смешения является величиной порядка $x Re^{-1/2}$.

Возмущения скорости, возникающие в слое смешения из-за действия сил вязкости, можно условно разделить на две части. Во-первых, это возмущения, обеспечивающие сглаживание того разрыва в составляющих скорости, который имеется во внешнем решении (2.4). Во-вторых, это возмущения, которые обеспечивают диффузию начальной завихренности, которую приобрели частички жидкости, попавшие в слой смешения после их прохождения через пограничный слой на крыле. Покажем, что при $\eta \ll 1$ возмущения, вызывающие диффузию начальной завихренности, малы по сравнению с главными значениями составляющих скорости на внешней границе слоя смешения (2.4). Пусть частички вихревой пелены из сечения $x=x_0$ при своем движении вниз по потоку попадают в область $x=x_1$, $0 < \eta(\theta) \leq \eta_1 \ll 1$. Из условия сохранения циркуляции скорости по контуру, охватывающему эти частички, следует, что

$$\frac{x_0}{x_1} \sim \frac{2\pi V C_0}{\Gamma} \eta_1 \quad (3.2)$$



Фиг. 1

где $\alpha^2 x V_\infty \Gamma$ — полная циркуляция вихревой пелены.

Из соотношения (3.2) следует, что частички жидкости, попадающие в ту часть слоя смешения, где $\eta \ll 1$, проходят относительно большие расстояния по сравнению с длиной того участка пограничного слоя на крыле, на котором проходила генерация начальной завихренности. Очевидно, что на больших расстояниях от точки схода пограничного слоя с поверхности крыла профиль скорости в слое смешения успеет выравняться так, что будет мало отличаться от соответствующих главных членов разложения (3.1). Таким образом, при $1 \gg \eta \gg \alpha^{-1} Re^{-1/2}$ слой смешения является зоной слабых возмущений, непрерывные составляющие решения (2.4) проходят через этот слой без существенных изменений.

При $1 \gg \eta \gg \alpha^{-1} Re^{-1/2}$ в возмущенном течении можно выделить две характерные области Ω_2 и Ω_3 (фиг. 1). Область Ω_2 («вихревой рулет») — это область, в которой толщина слоя смешения является величиной порядка расстояния между соседними витками вихревой пелены. Из уравнения (2.5) нетрудно получить оценку для толщины области Ω_2 : $r/x \sim \alpha^{1/2} Re^{-1/4}$ или $\eta \sim \alpha^{-1/2} Re^{-1/4}$. В зоне Ω_3 ($1 \gg \eta \gg \alpha^{-1/2} Re^{-1/4}$) расстояние между соседними витками вихревой пелены намного больше толщины слоя смешения.

Рассмотрим подробно случай, когда течение в ядре вихревой пелены является слабо возмущенным относительно набегающего потока, т. е. когда $\alpha^2 \ln Re \ll 1$.

4. Решение для слоя смешения в области Ω_3 ($1 \gg \eta \gg \alpha^{-1/2} Re^{-1/4}$). В основной части области Ω_3 решение задачи определяется формулами (2.4), (2.5). Необходимо построить решение для слоя смешения ($r-r_s \sim x Re^{-1/2}$ — область Ω_{3B}). В слое смешения составляющая скорости, направленная по нормали к поверхности вихревой пелены (2.5), выражается через состав-

ляющие скорости u, v, w и является величиной порядка $\text{Re}^{-1/2}$

$$v_N \sim \alpha \eta_s [-u + v/\alpha \eta_s + B(\eta_s)w/\alpha] \sim \text{Re}^{-1/2} \quad (4.1)$$

$$B(\eta_s) = \left(\frac{1 - \alpha^2 C_0 \ln \eta_s / \sqrt{e}}{C_0} \right)^{1/2}, \quad \frac{d\eta_s}{d\theta} = -B(\eta_s) \eta_s^2$$

В области Ω_{3B} введем новые независимые переменные (x, t_3, η)

$$x = x, \quad t_3 = (r - r_s) \sqrt{A \text{Re}} / x, \quad \eta = r/\alpha x, \quad A = 1 - \alpha^2 C_0 \ln \eta, \quad r_s = \alpha x \eta_s$$

Согласно оценкам, проведенным в п. 3, решение в слое смешения можно представить в виде суммы непрерывной части внешнего разложения (2.4) и малых возмущений, которые должны удовлетворять линеаризованным уравнениям движения

$$\begin{aligned} u &= A(\eta) - C_0 B(\eta) u_3(x, t_3, \eta), \quad w = \alpha [C_0 B(\eta) + A(\eta) w_3(x, t_3, \eta)] \\ v &= \alpha \eta \left[u - B(\eta) \frac{w}{\alpha} + \varepsilon_3 v_3(x, t_3, \eta) \right], \\ p &= \alpha^2 \left[C_0 \left(1 - \frac{\alpha^2 C_0}{2} \ln \frac{\eta}{e} \right) \ln \eta + \varepsilon_3 P_3 \right] \\ \varepsilon_3 &= (\alpha \eta \sqrt{A \text{Re}})^{-1} \ll 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подставляя выражения (4.2) в уравнения Навье – Стокса, записанные в цилиндрической системе координат, и проводя их линеаризацию относительно малых возмущений $u_3, w_3, \varepsilon_3 v_3$, получим, что функции u_3, w_3 удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial t_3^2} + \frac{3t_3}{2} \frac{\partial u_3}{\partial t_3} - x \frac{\partial u_3}{\partial x} + \eta \frac{\partial u_3}{\partial \eta} - \alpha^2 w_3 \right] [1 + O(\varepsilon_3) + O(\alpha^2) + O(\eta^2)] &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2 w_3}{\partial t_3^2} + \frac{3t_3}{2} \frac{\partial w_3}{\partial t_3} - x \frac{\partial w_3}{\partial x} + \eta \frac{\partial w_3}{\partial \eta} + \frac{C_0}{A} u_3 - w_3 \right] \times \\ \times [1 + O(\varepsilon_3) + O(\alpha^2) + O(\eta^2)] &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Граничные условия для u_3, w_3 следуют из условия асимптотического сращивания внутреннего и внешнего решений (4.2), (2.4)

$$u_3 \rightarrow \pm \pi \alpha^2 \eta, \quad w_3 \rightarrow \pm \pi \eta, \quad t_3 \rightarrow \pm \infty \quad (4.4)$$

В первом приближении решение (4.3), (4.4) представляется в виде

$$u_3 = \pi \alpha^2 \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t_3 \right) + \gamma \eta^{3/2} \exp \left(-\frac{3}{4} t_3^2 \right) \quad (4.5)$$

$$w_3 = \pi \eta \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t_3 \right) + \frac{C_0}{A} \gamma \eta^{3/2} \exp \left(-\frac{3}{4} t_3^2 \right) \quad (4.6)$$

где γ – пока произвольная константа.

5. Решение задачи в области Ω_2 ($\eta \sim \alpha^{-1/2} \text{Re}^{-1/4}$). Обозначим через Δr_s расстояние между соседними витками вихревой пелены. Из уравнения (2.5) следует, что $\Delta r_s = \alpha x \Delta \eta_s \sim 2\pi \alpha B(\eta_s) \eta_s^2 x$. Нетрудно видеть, что расстояние между соседними витками пелены становится порядка толщины слоя смешения $\delta \approx \text{Re}^{-1/2} x$ при $\eta \sim \alpha^{-1/2} \text{Re}^{-1/4}$ (область Ω_2). Это означает, что в области Ω_2 возмущенное течение является всюду вихревым и существенно вязким. По своей структуре область Ω_2 представляет собой «вихревой рулет», образованный слоем смешения, закрученным вокруг оси x .

В области Ω_2 введем новые независимые переменные (x_2, t_2, η_2)

$$x_2 = x, \quad \eta_2 = \eta / \varepsilon_2, \quad t_2 = r - r_s / \Delta r_s \sim t_3 / \eta_2^2, \quad \varepsilon_2 = (4\pi^2 A B^2 \alpha^2 \text{Re})^{-1/4} \quad (5.1)$$

В новых переменных (5.1) уравнения (4.3) принимают следующий вид:

$$\left(\frac{1}{\eta_2^4} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t_2^2} + \frac{3}{4} \eta_2 \frac{\partial u_3}{\partial \eta_2} - x_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \alpha^2 w_3 \right) [1 + O(\varepsilon_2) + O(\alpha^2)] = 0$$

$$\left(\frac{1}{\eta_2^4} \frac{\partial^2 w_3}{\partial t_2^2} + \frac{3}{4} \eta_2 \frac{\partial w_3}{\partial \eta_2} - x_2 \frac{\partial w_3}{\partial x_2} + \frac{C_0}{A} U_3 - w_3 \right) [1 + O(\varepsilon_2) + O(\alpha^2)] = 0 \quad (5.2)$$

Решение уравнений (5.2) представим в виде следующего двухчленного асимптотического разложения

$$u_3 = \varepsilon_2 \pi \alpha^2 \eta_2 w_1(t_2, \eta_2) + \gamma \varepsilon_2^{3/2} \eta_2^{3/2} w_2(\eta_2, t_2)$$

$$w_3 = \varepsilon_2 \pi \eta_2 w_1(t_2, \eta_2) + \frac{\gamma C_0}{A} \varepsilon_2^{3/2} \eta_2^{3/2} w_2(\eta_2, t_2) \quad (5.3)$$

Из (5.2), (5.3) следует, что функции w_1 , $f = \eta_2^2 w_2$ удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t_2^2} - \frac{\partial w_1}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2} - \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0, \quad \tau = \frac{1}{3\eta_2^4} \quad (5.4)$$

Сечение области Ω_2 плоскостью $x_2 = \text{const}$ представляет собой в переменных (t_2, τ) полубесконечную полосу $0 \leq \tau < \infty$, $|t_2| \leq 1$. Граничные условия для функций w_1 , f следуют из условия асимптотического сращения внутреннего и внешнего решений (4.5), (4.6), (5.3), а также из условий на нулевой поверхности тока. Для w_1 будем иметь

$$w_1(0, \tau) = w_1(\pm 1, \tau) = 0, \quad 0 \leq \tau < \infty \quad (5.5)$$

$$w_1(t_2, 0) = \begin{cases} 1 - 2t_2, & 1 > t_2 > 0 \\ -1 - 2t_2, & 0 > t_2 > -1 \end{cases} \quad (5.6)$$

При $\tau = 0$ ($\eta_2 \rightarrow \infty$) для функции f справедливы следующие предельные соотношения:

$$f = \eta_2^2 w_2 \approx \eta_2^2 \exp(-3/4 t_2^2) \sim \begin{cases} \eta_2^2 \exp(-3/4 \eta_2^4 t_2^2) \rightarrow 0, & t_2 \neq 0 \\ \rightarrow \infty, & t_2 = \text{const} \quad (t_2 \rightarrow 0) \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\int_{-a}^a f dt_2 \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{3}{4} t_2^2\right) dt_2 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \quad (a < 1)$$

Из (5.7) следует, что при $\tau = 0$ и $|t_2| \leq 1$

$$f = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left[\frac{1}{2} \delta(t_2 + 1) + \delta(t_2) + \frac{1}{2} \delta(t_2 - 1) \right] \quad (5.8)$$

где $\delta(t_2)$ — дельта-функция Дирака.

К условию (5.8) следует еще добавить условие равенства нулю производной $\partial w_2 / \partial t_2$ на нулевой поверхности тока, т. е.

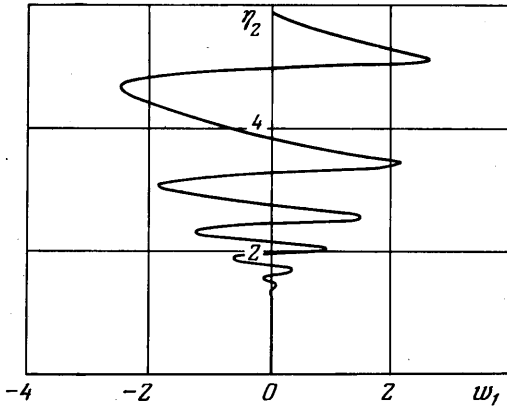
$$\partial f / \partial t_2 = 0, \quad t_2 = 0; \pm 1, \quad 0 < \tau < \infty \quad (5.9)$$

Вид граничных условий (5.5)–(5.9) позволяет искать решение уравнений (5.4) в виде периодических функций от переменной t_2 . Нетрудно проверить, что искомое решение представляется в виде

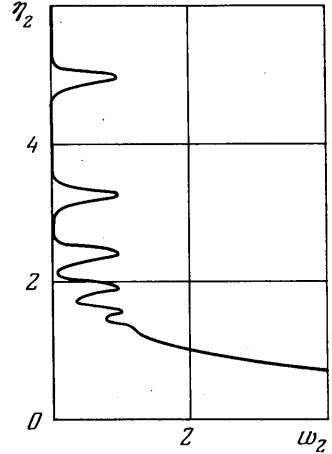
$$w_1 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi t_2}{\pi k} \exp\left(-\frac{4k^2 \pi^2}{3\eta_2^4}\right) \quad (5.10)$$

$$w_2 = \frac{f}{\eta_2^2} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{1}{\eta_2^2} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2k\pi t_2 \exp\left(-\frac{4k^2\pi^2}{3\eta_2^4}\right) \right] \quad (5.11)$$

Как и следовало ожидать, учет влияния вязкости в области Ω_2 позволяет получить непрерывное поле скоростей. Возмущения составляющих скорости u, w осциллируют вдоль направления оси r . Необходимо отметить, что амплитуда осцилляций той части возмущений, которая соответствует разрывной части решения (2.4), пропорциональна $\eta_2 \exp(-\pi/3\eta_2^4)$, а не η_2 , как это имеет место в идеальной жидкости при $\eta_2 \rightarrow 0$. В то же время в



Фиг. 2



Фиг. 3

соответствии с (5.3), (5.11) амплитуда возмущений, обеспечивающих диффузию начальной завихренности, растет при $\eta_2 \rightarrow 0$ как $\eta_2^{-1/4}$. Качественное объяснение этого результата состоит в том, что при $\eta_2 \rightarrow 0$ уменьшается расстояние между соседними витками нулевой поверхности тока, что приводит к увеличению завихренности в этой зоне. На фиг. 2, 3 представлена зависимость функций w_1 и w_2 от переменной η_2 при $\varepsilon_2/\sqrt{C_0} = 1/60$.

6. Решение задачи в области Ω_1 ($\eta \sim \alpha^{-1} \text{Re}^{-1/2}$). Так как толщина области Ω_1 является величиной порядка $x \text{Re}^{-1/2}$, то в этой области течения целесообразно ввести новые независимые переменные x, t_1, θ , где

$$t_1 = \eta/\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = (\alpha^2 \text{Re})^{-1/2} \sim \varepsilon_2^2 \quad (6.1)$$

Из условия асимптотического сращения внутреннего и внешнего разложений [7] следуют граничные условия для решения в области Ω_1 при $t_1 \rightarrow \infty$

$$u \sim 1 - \alpha^2 c_0 (\ln \varepsilon_1 + \ln t_1) - \frac{c_0 \gamma}{\sqrt{3\pi}} \frac{\varepsilon_1^{1/2}}{\sqrt{t_1}} + O(\alpha^2 \varepsilon_1^{1/2} \ln \varepsilon_1) \quad (6.2)$$

$$w \approx \alpha \sqrt{c_0} \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 c_0}{2} (\ln \varepsilon_1 + \ln t_1) + \frac{c_0 \gamma}{\sqrt{3\pi}} \frac{\varepsilon_1^{1/2}}{\sqrt{t_1}} + O(\alpha^2 \varepsilon_1^{1/2} \ln \varepsilon_1) + O(\alpha^4 \ln^2 \varepsilon_1) \right\}$$

$$p \sim \alpha^2 c_0 \ln \varepsilon_1 + \alpha^2 c_0 \ln t_1 + O(\alpha^4 \ln^2 \varepsilon_1)$$

Очевидно, что при $t_1 = 0$ должно иметь место

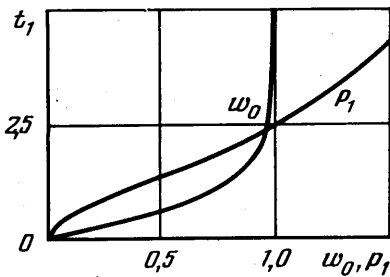
$$w = v = \partial u / \partial t_1 = 0 \quad (6.3)$$

Условия (6.2), (6.3) определяют вид первых членов асимптотического

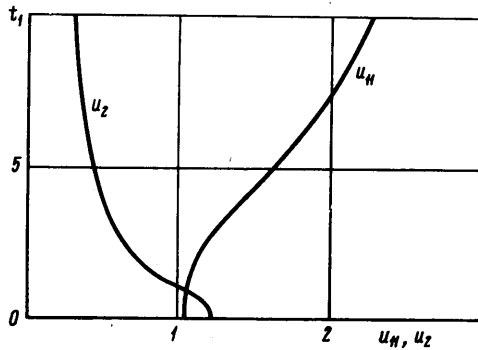
разложения для решения в области Ω_1

$$\begin{aligned}
 u &= 1 - \alpha^2 c_0 [\ln \varepsilon_1 + u_{11}(t_1)] - c_0 \gamma \sqrt[3]{3\pi} \varepsilon_1^{1/2} u_2(t_1) + \dots \\
 w &= \alpha \sqrt{c_0} \left\{ w_0(t_1) - \frac{\alpha^2 c_0}{2} [w_{10}(t_1) \ln \varepsilon_1 + w_{11}(t_1)] + \frac{c_0 \gamma}{\sqrt[3]{3\pi}} \varepsilon_1^{1/2} w_2(t_1) \right\} + \dots \\
 v &= \alpha \varepsilon_1 \left[\frac{\alpha^2 c_0}{2} v_1(t_1) + \frac{c_0 \gamma}{4\sqrt[3]{3\pi}} v_2(t_1) \right] + \dots \\
 p &= \alpha^2 c_0 \ln \varepsilon_1 + \alpha^2 c_0 p_1(t_1) + \dots
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Подставляя (6.4) в уравнения Навье – Стокса и приравнявая нулю



Фиг. 4



Фиг. 5

сумму членов одинакового порядка малости, получим уравнения, которым удовлетворяют неизвестные функции, входящие в разложения (6.4)

$$L(w_0) - \frac{w_0}{t_1^2} = 0, \quad p_1' = \frac{w_0^2}{t_1}, \quad L(w_{10}) - \frac{w_{10}}{t_1^2} = -t_1 w_0', \quad L(u_{11}) = \frac{w_0^2}{2} \tag{6.5}$$

$$L(u_2) + \frac{u_2}{4} = 0, \quad v_1' + \frac{v_1}{t_1} = -1 - t_1 u_{11}', \quad v_2' + \frac{v_2}{t_1} = -u_2 - 2t_1 u_2'$$

$$L(w_{11}) - \frac{w_{11}}{t_1^2} = -\frac{w_{10}}{2} - t_1 w_0' u_{11} - v_1' w_0' + \frac{w_0}{t_1},$$

$$L(w_2) + w_2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{t_1^2} \right) = \frac{t_1}{2} w_0' u_2 + \frac{v_2}{4} \left(w_0' + \frac{w_0}{t_1} \right)$$

$$L(f) = f'' + f' \left(\frac{1}{t_1} + \frac{t_1}{2} \right), \quad ()' = \frac{\partial}{\partial t_1}$$

Граничные условия

$$\begin{aligned}
 w_0, w_{10} \rightarrow 1, \quad p_1, w_{11}, u_{11} \rightarrow \ln t_1, \quad w_2, u_2 \rightarrow t_1^{-1/2}, \quad t_1 \rightarrow \infty \\
 w_0 = w_{10} = w_{11} = w_2 = v_1 = v_2 = u_{11}' = u_2' = 0, \quad t_1 = 0
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Не представляет особого труда выписать точное решение уравнений (6.5), (6.6). Так, например, решение для w_0, u_{11}', u_2 имеет следующий вид:

$$w_0(t_1) = \frac{\sqrt[3]{\pi}}{4} t_1 [I_0(z) - I_0'(z)] e^z, \quad u_2 = cF \left(\frac{1}{4}, 1, -\frac{t_1^2}{4} \right)$$

$$u_{11}'(t_1) = \frac{1}{2t_1} e^{-t_1^2/4} \int_0^{t_1} t_1 w_0^2 e^{t_1^2/4} dt_1$$

где $z = -t_1^2/8$, $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя, F — функция Похгаммера [8].

Зависимости $w_0(t_1)$, $p_1(t_1)$, $u_{11}(t_1)$, $u_2(t_1)$ представлены на фиг. 4, 5.

Асимптотическое решение задачи о течении вязкой жидкости в окрестности оси вихревой пелены содержит в себе две произвольные константы $C_0(\alpha_0)$ и γ . Величина $C_0(\alpha_0)$ определяется из решения задачи об отрывном обтекании треугольного крыла малого удлинения в рамках модели идеальной жидкости. Рассмотрим вопрос об определении величины γ . Величина γ — множитель при той части решения, которая определяет диффузию завихренности частичек жидкости сходящих с острых кромок крыла и попадающих в слой смешения с $\eta \ll 1$. Пограничному слою, сходящему с кромок треугольного крыла на участке $0 < x \leq x_0$, соответствует определенная величина потери количества движения в направлении оси x

$$P(x_0) = \alpha V_\infty^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} w(1-u) dn dx$$

где n — координата оси, направленной по нормали к поверхности крыла. В пограничном слое на треугольном крыле малого удлинения составляющие скорости u , w являются функциями от двух переменных φ и $y = n\sqrt{v_\infty}/\sqrt{x}$ (φ — угол между кромкой крыла и лучом, лежащим в плоскости крыла и выходящим из его вершины). Поэтому величина $P(x_0)$ преобразуется к виду

$$P(x_0) = \frac{2}{3} \alpha V_\infty^2 \delta(\alpha_0) x_0^2 \frac{V_\infty x_0}{v}^{-1/2} \quad (6.7)$$

$$\delta(\alpha_0) = \int_{-\infty}^{\infty} w(y, \alpha_0) [1-u(y, \alpha_0)] dy$$

где $\delta(\alpha_0)$ — толщина потери импульса, определяемая из решения уравнений пограничного слоя.

Величина $P(x_0)$ пропорциональна α . Перепад сил давления в рассматриваемом течении является величиной порядка α^2 . Следовательно, в слое смешения потеря количества движения в направлении оси x остается неизменной при $\alpha \rightarrow 0$. Рассмотрим слой смешения в области $x = x_1$, $0 < \eta \leq \eta_1 \ll 1$ и берущим свое начало на участке передней кромки $0 < x \leq x_0$. Координаты x_0 , x_1 , η_1 связаны соотношением (3.2). Для рассматриваемого участка слоя смешения потеря количества движения в направлении оси x представляется в виде

$$\begin{aligned} P(x_1, \eta_1) &\approx -V_\infty^2 \iint_{\Omega_1} u(1-u) r dr d\theta \approx -V_\infty^2 \iint_{\Omega_1} (1-u) r dr d\theta = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \gamma c_0 \alpha V_\infty^2 \eta_1^{3/2} x_1^2 \left(\frac{x_1 V_\infty}{v}\right)^{-1/2} = \frac{1}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma c_0^{1/4} \Gamma^{3/4} \alpha V_\infty^2 x_0^2 \left(\frac{V_\infty x_0}{v}\right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из (6.7), (6.8) следует, что $\gamma(\alpha_0) = \sqrt{6\pi^2 \delta/c_0^{1/4} \Gamma^{3/4}}$. Полученное соотношение замыкает зависимость решения задачи о течении вязкой жидкости в окрестности оси вихревой пелены от интегральных характеристик внешнего течения.

Используя решение, полученное в области Ω_1 , нетрудно выписать фор-

му линий тока в окрестности оси вихревой пелены $t_1 \rightarrow 0$

$$\theta = \theta_0 + \frac{\sqrt{\pi c_0}}{2\varepsilon_1}, \quad \frac{r}{r_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-ac_0/4} \quad (6.9)$$

Из выражений (6.9) следует, что с ростом координаты x частички жидкости медленно приближаются к оси, совершая вокруг нее бесконечное число оборотов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Smith J. H. B.* Improved calculations of leading - edge separation from slender, thin delta wings. - Proc. Roy. Soc., ser. A, 1968, v. 306, № 1484, p. 67-90.
2. *Судаков Г. Г.* Расчет отрывного течения около тонкого треугольного крыла малого удлинения. - Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 2, с. 10-18.
3. *Mangler K. W., Weber J.* The flow field near the centre of a rolled - up vortex sheet. - J. Fluid Mech., 1967, v. 30, № 1, p. 177-196.
4. *Guiraud J. P., Zeytounian R.* A double - scale investigation of the asymptotic structure of rolled - up vortex sheets. - J. Fluid Mech., 1977, v. 79, № 1, p. 93-112.
5. *Adams M. C., Sears W. R.* Slender - body theory - review and extension. - J. Aeronaut. Sci., 1953, v. 20, № 2, p. 85-98.
6. *Никольский А. А.* Законы подобия для трехмерного стационарного отрывного обтекания тел жидкостью и газом. - Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1, с. 1-7.
7. *Вак-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1976. 310 с.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.VIII.1982