МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1984

УДК 532.5.013.12:536.42

О ДВИЖЕНИИ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ

ГОЛОВИН А. М., ФОМИНЫХ В. В.

Изучению процессов движения и испарения капель в окружающей парогазовой среде посвящено большое количество экспериментальных и теоретических работ [1–4]. В [5–10] приняты допущения о постоянстве плотностей и коэффициентов переноса сред внутри и вне капли и малости чисел Рейнольдса Re и Пекле Pe, определенных по скорости натекающего на каплю потока. Влияние сферически-симметричного испарения капли на силу сопротивления исследовалось в [5] при скорости испарения, соответствующей малым числам Рейнольдса и Пекле $R\ll1$, $P\ll1$, определенным по скорости испарения, и в [8] при умеренных числах Рейнольдса и Пекле $R\,\mathrm{Re}\ll1$, $P\,\mathrm{Pe}\ll1$. При слабом испарении ($R\ll1$, $P\ll1$), лимитируемом переносом энергии, молекулярной теплопроводностью и конвекцией, скорость испарения отличается от соответствующей величины при сферически-симметричном испарении на члены порядка $\mathrm{Pe}\ll1$, но поправка к силе Стокса вследствие асимметрии теплового потока по поверхности капли сравнима с поправкой, обусловленной сферически-симметричным испарением [9].

В данной работе рассматривается квазистационарное испарение жидкой сферической капли с внутренним тепловыделением. Перенос энергии от капли к окружающей парогазовой среде осуществляется молекулярной теплопроводностью, конвекцией и излучением. Перепады температуры и концентрации между поверхностью капли и областью вдали от нее считаются малыми. Числа Рейнольдса и Пекле, определенные соответственно по скорости натекающего потока и среднемассовой скорости парогазовой среды на поверхности капли, удовлетворяют условиям $\mathrm{Re}\ll R$, $\mathrm{Pe}\ll P$, $R\,\mathrm{Re}\ll1$, $P\,\mathrm{Pe}\ll1$, $\mathrm{Re}\sim\mathrm{Pe}\ll1$. Целью данной работы является исследование влияния асимметрии теплового потока на силу сопротивления испаряющейся капли и выявление условий применимости модели сферически-симметричного испарения.

1. Уравнение движения испаряющейся капли. Изменение импульса жидкости в капле определяется соотношением

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho'\mathbf{v}'dV=\int\limits_V \rho'\frac{d\mathbf{v}'}{dt}dV-\oint\limits_S \rho(\mathbf{v}-\mathbf{v}_a')(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_a')dS$$

Здесь ρ, $\mathbf{v}$ — соответственно плотность и среднемассовая скорость движения парогазовой среды (соответствующие величины для жидкости здесь и далее обозначены штрихом), $\mathbf{v}_a'$ — скорость жидкости на поверхности S капли объема V, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к элементу ее поверхности.

В соответствии с уравнениями Навье — Стокса для жидкости внутри капли

$$\rho'\frac{dv_\alpha'}{dt}=\frac{\partial P_{\alpha\beta}'}{\partial x_\beta}\qquad (P_{\alpha\beta}'=-p'\delta_{\alpha\beta}+\Pi_{\alpha\beta}')$$

(p' — давление в жидкости, $\Pi_{\alpha\beta}'$ — компонента вязкой части тензора напряжений $P_{\alpha\beta}'$, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера) это соотношение перепишется в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho'\mathbf{v}_\alpha'dV=-\oint\limits_S p'n_\alpha dS+\oint\limits_S \Pi_{\alpha\beta}'n_\beta dS-\oint\limits_S \rho(v_\alpha-v_\alpha')n_\beta(v_\beta-v_\beta')dS \tag{1.1}$$

Здесь и далее индексами α и β отмечены компоненты соответствующих векторных величин, по индексу β произведено суммирование.

На границе сферической капли радиуса a выполняются условия

$$-pn_\alpha+\Pi_{\alpha\beta}n_\beta-\frac{2\sigma}{a}n_\alpha+\frac{d\sigma}{dT_a}(\nabla T_a)_\alpha=-p'n_\alpha+\Pi_{\alpha\beta}'n_\beta \tag{1.2}$$

где ∇T_a означает градиент температуры T_a поверхности капли, σ — коэффициент поверхностного натяжения, удовлетворяющий условию $\sigma/a\gg\rho u^2$, u — скорость натекающего на каплю потока вдали от нее. Подстановка (1.1) в (1.2) приводит к следующему результату:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho'\mathbf{v}'dV=\mathbf{F}+\mathbf{F}_\sigma \tag{1.3}$$

$$F_\alpha=-\oint\limits_S pn_\alpha dS+\oint\limits_S \Pi_{\alpha\beta}n_\beta dS-\oint\limits_S \rho(v_\alpha-v_\alpha')n_\beta(v_\beta-v_\beta')dS$$

$$\mathbf{F}_\sigma=-\oint\limits_S\frac{2\sigma}{a}\mathbf{n}dS+\oint\limits_S\frac{d\sigma}{dT_a}(\nabla T_a)dS$$

При значительно различающихся коэффициентах теплопроводности жидкости и парагазовой среды ($\varkappa'\gg\varkappa$) перепады температуры по поверхности капли приведут к малому изменению поверхностного натяжения, поэтому далее величиной $\mathbf{F}_\sigma$ по сравнению с $\mathbf{F}$ можно пренебречь.

2. Расчет движения жидкости. В системе отсчета, связанной с центром массы капли, стационарное движение среды, распределение температуры вне и внутри капли и распределение концентрации пара в окрестности испаряющейся капли определяются из совместного решения уравнений (2.1)—(2.3), записанных в сферической системе координат (r, θ) с полярной осью вдоль направления $\mathbf{u}$ — скорости натекающего потока

$$D^4\Psi=\frac{\mathrm{Re}}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta}+2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)D^2\Psi \tag{2.1}$$

$$\Delta T=\frac{\mathrm{Pe}}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) \tag{2.2}$$

$$\Delta c=\frac{\mathrm{PeLe}}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\frac{\partial c}{\partial r}-\frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial c}{\partial\theta}\right) \tag{2.3}$$

$$D^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta},\qquad \mathrm{Re}=\frac{\rho ua}{\mu},\qquad \mathrm{Pe}=\frac{ua}{\chi}$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta},\qquad \mathrm{Le}=\frac{\chi}{D}$$

Здесь r, Ψ — безразмерные расстояние и функция тока; μ, χ, D — соответственно коэффициенты динамической вязкости, температуропроводности и диффузии парогазовой среды; c — безразмерная массовая концентрация пара, Le — число Льюиса. В качестве характерных размеров длины, скорости и функции тока — соответственно a, u, ua^2; компоненты безразмерной скорости v_r, v_θ связаны с безразмерной функцией тока Ψ соотношениями

$$v_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta},\qquad v_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

Уравнения, аналогичные (2.1)—(2.2) с заменой искомых величин на штрихованные, будут описывать движение жидкости и распределение температуры внутри капли. Далее предполагается, что вязкость жидкости существенно превышает вязкость парогазовой среды, поэтому скорость внутреннего движения жидкости в капле достаточно мала и вследствие этого конвективным переносом энергии пренебрегается по сравнению с переносом энергии, обусловленным молекулярной теплопроводностью жидкости в капле.

Вдали от капли и на ее поверхности должны быть выполнены следующие граничные условия (индексами ∞ и a отмечены соответствующие значения):

$$r\to\infty:\quad \Psi\to\frac{r^2}{2}\sin^2\theta,\qquad T\to T_\infty,\qquad c\to c_\infty \tag{2.4}$$

$$r=1:\quad \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}=w(\theta)\sin\theta,\qquad \Psi'=0,\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial r}=\frac{\partial\Psi'}{\partial r} \tag{2.5}$$

$$\mu\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}-\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)=\mu'\left(2\frac{\partial\Psi'}{\partial r}-\frac{\partial^2\Psi'}{\partial r^2}\right) \tag{2.6}$$

$$T_a=T_a',\qquad \frac{1}{c_a}=1-\frac{m_2}{m_1}+\frac{m_2}{m_1}\exp\left[\frac{Lm_1}{R_0}\left(\frac{1}{T_a}-\frac{1}{T_*}\right)\right] \tag{2.7}$$

$$\rho Luw=-\frac{\rho LD}{a(1-c_a)}\left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_a=\frac{\varkappa}{a}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_a-\frac{\varkappa'}{a}\left(\frac{\partial T'}{\partial r}\right)_a-\varepsilon\sigma_r(T_a^4-T_\infty^4) \tag{2.8}$$

Здесь w — безразмерная радиальная компонента среднемассовой скорости на поверхности капли; m_1, m_2 — соответственно молекулярные веса пара и газа; L — удельная теплота фазового перехода, R_0 — универсальная газовая постоянная, T_* — температура кипения жидкости внутри капли, ε — эффективная степень черноты поверхности капли, σ_r — постоянная Стефана — Больцмана.

В условии (2.6) опущены члены, соответствующие термокапиллярным напряжениям, поскольку их вклад в поле скоростей является величиной пренебрежимо малого порядка $(\varkappa/\varkappa')\mathrm{Pe}\ll 1$.

Натекающий поток приводит к асимметрии теплового потока на поверхности капли и, следовательно, к скорости испарения. Отклонение испарения от сферически-симметричного считается малым, причем полагается справедливым следующее разложение:

$$w=w_0-w_1\cos\theta+\mathrm{Pe}\,w_2+\ldots\quad(w_0\gg w_1\gg\mathrm{Pe})$$

Здесь точками обозначены члены, которые имеют порядок Pe или выше, кроме членов порядка Pe, не зависящих от угловой переменной. Это разложение согласуется с граничными условиями (2.5)—(2.8), в соответствии с которыми функции тока Ψ, Ψ' имеют вид

$$\Psi=-w_0\cos\theta+\psi(r)\sin^2\theta-\mathrm{Pe}\,w_2\cos\theta+\ldots,\qquad \Psi'=-\frac{v_0'}{2}(r^2-r^4)\sin^2\theta+\ldots$$

Здесь точками обозначены члены, которые вблизи поверхности имеют порядок Re; $|v_0'|$ — наибольшее значение касательной компоненты скорости жидкости на поверхности капли. Уравнения (2.1)—(2.3) и граничные условия (2.4)—(2.8) позволят определить поправку к сферически-симметричному испарению без нахождения остальных членов порядка Re в функциях тока Ψ и Ψ'.

Из уравнения (2.1) и граничных условий (2.4)—(2.6) следует:

$$\psi=\frac{A_1r^4}{5}\left[1+\frac{5(1+R)e^{-R}-5}{3r^2}+\frac{2-2(1+R)e^{-R}-3R^2E_4(R)}{3r^5}-\right.$$
$$\left.-\exp\left(-\frac{R}{r}\right)-4\frac{R}{r}E_5\left(\frac{R}{r}\right)\right]+A_2r^2+\frac{A_3}{r} \tag{2.9}$$

$$A_1 = \frac{3[3m+2+(m+2)w_1]}{3m[2(1+R)e^{-R}-2+R^2]+2R^2(1-e^{-R})}$$

$$A_2 = \frac{v_0'}{3} - \frac{w_1}{6}, \qquad A_3 = -\frac{w_1}{3} - \frac{v_0'}{3}, \qquad R = \mathrm{Re}\, w_0$$

$$v_0' = \frac{3[2-(2+2R+R^2)e^{-R}]-w_1[-6+2R^2+(6+6R+R^2)e^{-R}]}{3m[2(1+R)e^{-R}-2+R^2]+2R^2(1-e^{-R})}$$

$$m = \frac{\mu'}{\mu}, \qquad E_n(z) = \int\limits_1 \frac{e^{-zt}}{t^n}\,dt$$

При $R\to 0$, $m\to\infty$ полученное решение согласуется с [5], где рассмотрена более общая задача о горении частицы без учета конвективных членов по R.

Сила сопротивления капли (проекция силы $\mathbf{F}$ на направление скорости $\mathbf{u}$), вычисленная в соответствии с (1.4), определится выражением

$$F = \frac{8}{3}\pi\mu a u R\left\{[1-(1+R)e^{-R}]A_1 + \frac{w_1}{2}\right\} \tag{2.10}$$

Соотношения (2.9)—(2.10) при $w_1=0$ согласуются с результатами [8], а выражение для силы сопротивления при $w_1\to 0$ и $m\to\infty$ согласуется с [7, 11]. Отметим, что в работе [11] повторены результаты, содержащиеся в [7].

3. Распределение температуры и концентрации пара. Для расчета скорости испарения капли необходимо найти распределение температуры парогазовой среды, жидкости внутри капли и концентрации пара.

С помощью метода сращиваемых асимптотических разложений можно получить двучленное внутреннее разложение для температуры

$$T = T_\infty + (T_0 - T_\infty)\left[\frac{1-\exp(-P/r)}{1-e^{-P}} + \mathrm{Pe}\,\Theta\right] \tag{3.1}$$

где T_0 – температура капли в отсутствие натекающего потока, $P = w_0\,\mathrm{Pe}$, а $\Theta(r, \theta)$ является решением уравнения

$$\left(\Delta - \frac{P}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Theta = -\frac{2P\cos\theta}{1-e^{-P}}\frac{\psi}{r^4}\exp\left(-\frac{P}{r}\right)$$

Предполагается, что на поверхности капли Θ имеет вид

$$\Theta(1, \theta) = B_0 + B_1\cos\theta \tag{3.2}$$

Коэффициенты B_0, B_1 определяются ниже. Из возможности сращивания в области $1 \ll r \ll 1/\mathrm{Pe}$ с внешним разложением

$$T(r, \theta) = T_\infty + \frac{(T_0 - T_\infty)P}{(1-e^{-P})r}\exp\left[-\frac{\mathrm{Pe}\, r}{2}(1-\cos\theta)\right] \tag{3.3}$$

решение можно искать в виде

$$\Theta(r, \theta) = \frac{2P}{1-e^{-P}}[Y(r, P)\cos\theta - Y_\infty] + \left(B_0 + \frac{2PY_\infty}{1-e^{-P}}\right)\frac{1-\exp(-P/r)}{1-e^{-P}} \tag{3.4}$$

Функция $Y(r, P)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{d}{dr}r^2\frac{dY}{dr} - P\frac{dY}{dr} - 2Y = -\frac{\psi}{r^2}\exp\left(-\frac{P}{r}\right)$$

$$Y(1, P) = \frac{1-e^{-P}}{2P}B_1, \qquad Y_\infty = \lim_{r\to\infty} Y(r, P) = \frac{1}{4}$$

Таким образом

$$Y(r,P)=\frac{Y_1(r,P)}{Y_1(1,P)}\left[\frac{1-e^{-P}}{2P}B_1+\frac{Y_2(1,P)}{P^3}\int\limits_1^\infty\frac{\psi Y_1}{t^2}dt\right]-$$

$$-\frac{1}{P^3}\left[Y_1(r,P)\int\limits_1^r\frac{\psi Y_2}{t^2}dt+Y_2(r,P)\int\limits_r^\infty\frac{\psi Y_1}{t^2}dt\right] \qquad (3.5)$$

$$Y_1(r,\ P)=P-2r+(P+2r)\exp(-P/r),\ Y_2(r,\ P)=P-2r$$

Внешнее разложение решения уравнения (2.2), ведущие члены которого выражаются соотношением (3.3), сращивается с внутренним с точностью до членов порядка Pe.

Далее можно получить, что

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_a=(T_0-T_\infty)\left\{\frac{P}{1-e^P}\left[1+\left(B_0+\frac{1}{2}\frac{P}{1-e^{-P}}\right)\mathrm{Pe}\right]+\mathrm{Pe}\,Y_3(1,P)\cos\theta\right\}$$

$$Y_3(1,P)=\frac{B_1}{Y_1(1,P)}\frac{d}{dr}Y_1(r,P)\,|_{r=1}+\frac{2PI(R,P)}{(e^P-1)\,Y_1(1,P)} \qquad (3.6)$$

$$I(R,P)=I_0(R,P)-I_1(R,P)\,w_1=\int\limits_1^\infty\frac{\psi Y_1(t,P)}{t^2}dt$$

Здесь $I_0(R,\ P)$ и $I_1(R,\ P)$ не зависят явно от w_1, Вычисление $I(R,\ P)$ с использованием (2.9) и (3.5) приводит к следующему результату:

$$I(R,P)=A_1\left\{\frac{2}{5P}-\frac{1}{2}+\frac{P}{3}-\frac{P^2}{6}+\frac{R^4}{10}+\frac{R^3P}{5}+\frac{3R^2P^2}{40}+\frac{RP^3}{60}-\right.$$

$$-\left(\frac{2}{5P}-\frac{1}{10}\right)e^{-P}-\left[\frac{2+2R}{5P}-\frac{1}{2}-R+\frac{RP}{2}-(1+R)\frac{P^2}{6}\right]e^{-R}+$$

$$+\left(\frac{2+2R}{5P}-\frac{1}{10}\right)e^{-(P+R)}-\frac{P}{10}E_4(P)-\frac{6R^2+15RP+10P^2}{10P}E_4(R)+$$

$$\left.+\frac{6R^2-3RP+P^2}{10P}E_4(P+R)-\frac{6R^5+15R^4P+10R^3P^2}{60P}\ln\left(1+\frac{P}{R}\right)-\frac{P^4}{60}\ln\left(1+\frac{R}{P}\right)\right\}-$$

$$-\left(\frac{1-e^{-P}}{P}-1+\frac{P}{2}-\frac{P^2}{6}\right)v_0'-\left(\frac{1-e^{-P}}{P}-\frac{1+e^{-P}}{2}+\frac{P^2}{12}\right)w_1$$

Значения I_0 и I_1 при $m=50$ и различных R и P представлены в таблице; при изменении m от 10 до ∞ соответствующие значения I_0 и I_1 отличаются от указанных не более чем на 7%.

Распределение температуры внутри жидкости в соответствии с принятыми допущениями о малости конвективных членов в уравнении конвективной теплопроводности и непрерывности температуры на поверхности капли будет иметь вид

$$T'=T_0+{}^1/_6(\rho'ka^2/\varkappa')(1-r^2)+\mathrm{Pe}(T_0-T_\infty)(B_0+B_1r\cos\theta) \qquad (3.7)$$

Здесь k – интенсивность внутреннего тепловыделения на единицу массы капли.

Распределение концентрации пара находится аналогично распределению температуры парогазовой среды. Таким образом, можно получить

$$\frac{c-c_\infty}{c_0-c_\infty}=\frac{1-\exp(-s/r)}{1-e^{-s}}+\mathrm{Pe\,Le}\,C,\qquad C(1,\theta)=C_0+C_1\cos\theta$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial r}\right)_a=(c_0-c_\infty)\left\{\left[1+\mathrm{Pe\,Le}\left(C_0+\frac{1}{2}\frac{s}{1-e^{-s}}\right)\right]\frac{s}{1-e^s}+\mathrm{Pe\,Le}\,Y_4(1,s)\cos\theta\right\} \qquad (3.8)$$

$$Y_4(1,s)=\frac{C_1}{Y_1(1,s)}\frac{d}{dr}Y_1(r,s)\,|_{r=1}+\frac{2sI(R,s)}{(e^s-1)\,Y_1(1,s)}$$

$$s=P\,\mathrm{Le}$$

R	P	100 I_0	100 I_1	P	100 I_0	100 I_1
0,5	0,25	0,045	0,046	0,5	0,349	0,338
1,0	0,5	0,328	0,346	1,0	2,474	2,358
1.5	0,75	1,008	1,098	1,5	7,448	7,002
2,0	1,0	2,185	2,456	2,0	15,84	14,75
2,5	1,25	3,913	4,535	2,5	27,92	25,82
3,0	1,5	6,220	7,422	3,0	43,78	40,30
0,5	0,375	0,150	0,149	0,625	0,671	0,634
1,0	0,75	1,074	1,076	1,25	4,702	4,266
1,5	1,125	3,267	3,301	1,875	14,01	12,30
2,0	1,5	7,011	7,151	2,5	29,56	25,25
2,5	1,875	12,45	12,83	3,125	51,75	43,29
3,0	2,25	19,65	20,46	3,75	80,72	66,40

4. Расчет скорости испарения капли. В отсутствие натекающего потока, как следует из соотношений (3.6)—(3.8) и граничного условия (2.8), величины P, T_0, c_0 определяются соотношением Клапейрона — Клаузиуса (2.7) и следующими формулами [3, 13, 14]:

$$\rho L \frac{\chi}{a} P = J = Z - X, \qquad e^s - 1 = \frac{c_0 - c_\infty}{1 - c_0} \tag{4.1}$$

$$Z = \frac{\rho' k a}{3} - \varepsilon\sigma_r (T_0^4 - T_\infty^4), \qquad X = \frac{\varkappa}{a}(T_0 - T_\infty)\frac{P}{e^P - 1}$$

При температуре поверхности капли, близкой к температуре кипения жидкости, первая из формул (4.1) позволит приближенно определить P, затем из второго соотношения можно найти величину c_0 и с помощью соотношения (2.7) определить уточненное значение T_0. Таким образом, методом итераций можно найти решение задачи.

С учетом натекающего потока результаты определяются следующими формулами:

$$w_1 = \frac{M Y_1(1,P) Q - 2X I_0(R,P)\Phi}{[J Y_1(1,P)/P - 2X I_1(R,P)]\Phi + N Q Y_1(1,P)} \tag{4.2}$$

$$w_2 = \frac{1}{\rho L u}\left[\frac{PX}{2(e^{-P}-1)} - (X+H)B_0\right] \tag{4.3}$$

$$B_0 = \frac{C_0}{\gamma} = -\frac{P}{2}\,\frac{X/(1-e^{-P}) + J\mathrm{Le}^2/(1-e^{-s})}{X + H + J\,\mathrm{Le}\,\gamma e^s}$$

$$B_1 = \frac{C_1}{\gamma} = -\frac{2}{\Phi}\left[\frac{I(R,s)}{Y_1(1,s)}\mathrm{Le}\,J + \frac{I(R,P)}{Y_1(1,P)}X\right]$$

$$\mathrm{Le}\,\gamma = \frac{m_2 L c_0^2 (T_0 - T_\infty)}{R_0 T_0^2 (c_0 - c_\infty)} \exp\left[\frac{L m_1}{R_0}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_*}\right)\right]$$

$$H = 4\varepsilon\sigma_r T_0^3 (T_0 - T_\infty)$$

$$\Phi = -J\,\mathrm{Le}\,\gamma(e^s - 1)\left[1 - \frac{Y_5(1,s)}{Y_1(1,s)s}\right] + Q$$

$$M = 2J\frac{I_0(R,s)\mathrm{Le}}{Y_1(1,s)} + \frac{2X I_0(R,P)}{Y_1(1,P)}, \qquad N = 2J\frac{I_1(R,s)\mathrm{Le}}{Y_1(1,s)} + \frac{2X I_1(R,P)}{Y_1(1,P)}$$

$$Q = \frac{\varkappa}{a}(T_0 - T_\infty)\frac{Y_5(1,P)}{Y_1(1,P)} - \frac{\varkappa'}{a}(T_0 - T_\infty) - H$$

$$Y_5(1,P) = \frac{d}{dr} Y_1(r,P)\big|_{r=1}$$

Как видно из полученных результатов, в отсутствие внутреннего тепловыделения и излучения ($k=0$, $\varepsilon=0$) при $\mathrm{Le}=1$ температура поверхности капли с точностью до членов порядка Ре включительно остается той же самой, что и в отсутствие натекающего потока. При $\varkappa'/\varkappa\to\infty$ температура поверхности будет однородной, но при $\mathrm{Le}\neq1$ отличной от T_0. При $\varkappa'/\varkappa\to\infty$, $k=0$, $\varepsilon=0$ и конечных значениях P выражение для w_1 упрощается

$$w_1=\frac{2I_0(R,s)s}{Y_1(1,s)+2sI_1(R,s)} \tag{4.4}$$

Следует отметить, что эта формула справедлива при $\mathrm{Le}=1$ для любых значений P. В предельных случаях слабого и интенсивного испарения из (4.4) следует:

$$R\ll1,\quad P\ll1,\quad w_1=\frac{3m+4}{8(m+1)}s \tag{4.5}$$

$$R\gg1,\quad P\gg1,\quad w_1=\frac{3m+2}{m+2}\cdot\frac{12q(\mathrm{Sc})}{1-12q(\mathrm{Sc})} \tag{4.6}$$

$$q(t)=\frac{t}{60}+\frac{3}{40}+\frac{1}{5t}+\frac{1}{10t^2}-\left(\frac{1}{6t}+\frac{1}{4t^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{10t^3}\right)\ln(1+t)-\frac{t^2}{60}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right),\qquad \mathrm{Sc}=\frac{\mu}{\rho D}$$

При $m\to\infty$ результат (4.5) согласуется с [9] только при $\mathrm{Le}=1$.

Для чисел Шмидта $\mathrm{Sc}=0{,}5$; $1{,}0$; $1{,}5$ при $m\to\infty$ w_1 принимает соответственно значения 0,594; 1,075; 1,506.

Результаты численных расчетов w_1 по формуле (4.4) могут быть аппроксимированы следующей формулой:

$$w_1=1{,}06\,\mathrm{Sc}\left[1-\exp\left(-\frac{3}{8}R\right)\right]$$

Погрешность этой формулы при $\mathrm{Le}=\mathrm{Sc}=1$, $m=50$ не превышает 6%.

При сильном испарении, обусловленном интенсивным внутренним тепловыделением и излучением, B_0, B_1, w_1 и w_2 экспоненциально уменьшаются с ростом P.

5. Обсуждение результатов. Из соотношений (2.9)—(2.10) следует, что при слабом испарении ($R\ll1$, $P\ll1$), определяемом переносом энергии молекулярной теплопроводностью и конвекцией

$$F=2\pi\mu au\frac{3m+2}{m+1}\left(1-\frac{7m+4}{24(m+1)}R+\frac{m+2}{3m+2}w_1\right) \tag{5.1}$$

$$v_0'=\frac{1}{2(m+1)}\left(1-\frac{3m+2}{8(m+1)}R-w_1\right) \tag{5.2}$$

Соотношение (5.1) при $\mathrm{Le}=1$, $m\to\infty$ согласуется с [9]. Видно, что в этих формулах два последних слагаемых сравнимы по величине. Для сильного испарения ($R\gg1$, $P\gg1$), обусловленного только молекулярной теплопроводностью и конвекцией, при $\varkappa'/\varkappa\to\infty$

$$F=\frac{4}{3}\pi\mu auRw_1,\qquad v_0'=-\frac{2w_1}{3m+2}$$

Здесь w_1 определяется формулой (4.6). Циркуляция жидкости внутри капли оказывается противоположной по направлению циркуляции при слабом испарении.

Для случая интенсивного внутреннего тепловыделения и излучения

($R \gg 1$, $P \gg 1$) соотношения (2.9)–(2.10) переходят в результаты работы [8], где использована модель сферически-симметричного испарения капли в натекающем потоке парогазовой среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ranz W. E., Marshall W. R.* Evaporation from drops.— Chem. Eng. Progr., 1952, v. 48, pt I, № 3, p. 141–146; pt II, ibid., № 4, p. 173–180.
2. *Williams A.* Combustion of droplets of liquid fuels: a review.— Combustion and Flame, 1973, v. 21, № 1, p. 1–31.
3. *Kent J. C.* Quasi-steady diffusion-controlled droplet evaporation and condensation.— Appl. Sci. Res., 1973, ser. A, v. 28, № 4/5, p. 315–360.
4. *Rastogi R. P., Singh H. J.* Combustion of fuel droplets and spray(s).— J. Scient. Industr. Res., 1976, v. 35, № 5, p. 278–296.
5. *Fendell F. E., Sprankle M. L., Dodson D. S.* Thin-flame theory for a fuel droplet in slow viscous flow.— J. Fluid Mech., 1966, v. 26, № 2, p. 267–280.
6. *Башкатов М. В., Шабанов С. И.* Обтекание сферы с поперечным потоком вещества при малых числах Рейнольдса.— ПМТФ, 1972, № 3, с. 103–109.
7. *Головин А. М.* Влияние вдува на сопротивление сферы в ламинарном потоке вязкой жидкости.— ПМТФ, 1972, № 3, с. 110–114.
8. *Головин А. М.* Влияние циркуляции жидкости внутри капли на силу сопротивления в вязком потоке и на скорость испарения.— Вестн. МГУ. Сер. матем., мех., 1973, № 1, с. 114–119.
9. *Бродский С. С., Головин А. М.* Влияние асимметрии теплового потока на силу сопротивления капли в натекающем вязком потоке.— Инж.-физ. ж., 1976, т. 30, № 3, с. 494–498.
10. *Лычагин Н. Н., Харитонов А. А.* Влияние радиального вдува на сопротивление сферы в потоке при малых числах Рейнольдса.— В кн.: Прикл. вопросы тепломассообмена. Днепропетровск: Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1977, с. 51–54.
11. *Dukowicz J. K.* An exact solution for the drag of a sphere in low Reynolds number flow with strong uniform suction or blowing.— Phys. Fluids, 1982, v. 25, № 7, p. 1117–1118.
12. *Acrivos A., Taylor T. D.* Heat and mass transfer from single spheres in stokes flow.— Phys. Fluids, 1962, v. 5, № 4, p. 387–394.
13. *Williams F. A.* On the assumptions underlying droplet vaporization and combustion theories.— J. Chem. Phys., 1960, v. 33, № 1, p. 133–144.
14. *Williams F. A.* On vaporization of mist by radiation.— Int. J. Heat and Mass Transfer, 1965, v. 8, № 4, p. 575–587.

Москва

Поступила в редакцию
16.XII.1982