

УДК 532.517.2:536.25

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ
КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА В КУБИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ,
ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ**

ЩЕРБАК С. Б.

Различные вопросы естественной конвекции в замкнутых полостях широко изучаются [1–3]. В полостях, подогреваемых снизу, конвективное движение возникает лишь при некотором критическом значении числа Рэлея. Обычно аналитически удается вычислить критические числа Рэлея для движений различной формы. Исследование конвективного движения при малой и умеренной за критичности аналитическими методами сильно затруднено. Здесь большое значение имеют экспериментальные работы. Широкое распространение получило изучение задач конвекции с помощью численных методов. К настоящему времени достигнут значительный прогресс в численном решении модельных двумерных задач.

В настоящей работе численными методами изучаются различной формы конвективные движения газа в кубической полости, подогреваемой снизу. Движение вызывается прогревом основания полости по заданному закону. Прослеживается эволюция форм движения до установления конечного состояния. Для трех основных форм движения определены области устойчивости, коэффициенты теплопередачи через полость, критические числа Рэлея. Экспериментальное изучение конвекции в кубической полости проводилось для воды [4] и воздуха [5, 6]. В [7] экспериментально и теоретически исследовалось влияние числа Прандтля на картину стационарных течений жидкости в полости. Для форм движения, имеющих наиболее низкие уровни устойчивости, вычислены критические числа Рэлея [8]. Численное исследование конвекции жидкости после потери устойчивости равновесия проведено в [9, 10].

1. Постановка задачи. Рассматривается движение сжимаемого вязкого теплопроводного газа в замкнутой кубической полости $0 \leq x_\alpha \leq L$, $\alpha = 1, 2, 3$ (x_α — декартовы координаты). Полость находится в поле силы тяжести. Направление действия силы тяжести совпадает с осью x_1 . Движение газа внутри полости описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho u_i &= 0 \\ \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho u_\alpha u_i + \delta_{i,\alpha} P] &= -g \delta_{1,\alpha} + \frac{\partial G_{i,\alpha}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(E+P) u_i] &= -g \rho u_1 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_j G_{i,j} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] \\ E &= \rho (c_v T + U^2/2), \quad P = R_0 \rho T \\ G_{i,\alpha} &= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{i,\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

где t — время, u_α — проекция вектора скорости газа U на ось x_α , ρ — плотность, E — плотность энергии, P — давление, T — температура, g — ускорение свободного падения, μ и λ — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности, c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме, R_0 — газовая постоянная, $\delta_{i,\alpha}$ — символ Кронекера, по повторяющемуся индексу

подразумевается суммирование. В дальнейшем коэффициенты переноса полагаются постоянными.

В начальный момент времени газ находится в покое при постоянной температуре T_1

$$u_\alpha(0, x_\alpha) = 0, \quad T(0, x_\alpha) = T_1, \quad \rho(0, x_\alpha) = \rho_1 \exp(-gx_1/R_0T_1)$$

где ρ_1 — плотность газа у основания полости в начальный момент времени. Затем основание полости прогревается по заданному закону от начальной температуры T_1 до более высокой температуры T_2 . Использовались следующие законы прогрева основания полости:

$$\begin{aligned} T(t, 0, x_2, x_3) &= T_1 + (T_2 - T_1)F(t, x_2, x_3) \\ \text{a) } F &= \theta(u_0 t - x_2), \quad \text{b) } F = \theta(u_0 t - x_2 - x_3) \\ \text{c) } F &= \theta(u_0 t - |x_2 - L/2|), \quad \text{d) } F = \theta(u_0 t - L/2 + |x_2 - L/2|) \\ \text{e) } F &= \theta(u_0 t - |x_2 - x_3|), \quad \text{f) } F = \theta(u_0 t - L + |x_2 - x_3|) \\ \text{g) } F &= \theta(u_0 t - |x_2 - L/2|)\theta(u_0 t - |x_3 - L/2|) \\ \text{h) } F &= \theta(u_0 t - L/2 + |x_2 - L/2|)\theta(u_0 t - L/2 + |x_3 - L/2|) \\ \theta(\xi) &= 0, \quad \xi < 0; \quad \theta(\xi) = 1, \quad \xi \geq 0 \end{aligned}$$

где u_0 — заданная константа. При всех законах прогрева спустя некоторое время $t_0 \sim L/u_0$ температура основания полости принимает постоянное значение T_2 и далее не меняется.

Считается, что на всех гранях полости выполняется условие прилипания $u_\alpha = 0$, верхнее основание полости $x_1 = L$ находится при постоянной начальной температуре T_1 , боковые грани полости теплоизолированы $\partial T/\partial n = 0$ ($\partial/\partial n$ — производная по нормали к грани полости).

В поле силы тяжести прогрев газа вызывает его движение. В работе прослеживалось развитие этого движения до установления конечного состояния.

2. Методика расчета. Вводятся безразмерные переменные, при этом в качестве характерных масштабов выбираются: длина ребра куба L , скорость \sqrt{Lg} , плотность ρ_1 , температура T_1 . Это приводит к появлению в исходной системе уравнений и граничных условий следующих безразмерных параметров:

$$M^2 = \frac{Lg}{\gamma R_0 T_1}, \quad Re = \frac{L\sqrt{Lg}\rho_1}{\mu}, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad T_* = \frac{T_2}{T_1}, \quad \omega = \frac{u_0}{\sqrt{Lg}}$$

где c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении.

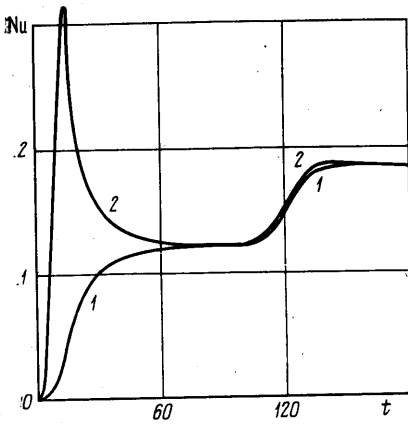
Соответствующее число Рэлея выражается формулой $Ra = Pr Re^2 (T_* - 1)$.

Для характеристики движения газа использовались величины безразмерного теплового потока на верхнее и нижнее основания полости Nu_+ и Nu_- — числа Нуссельта

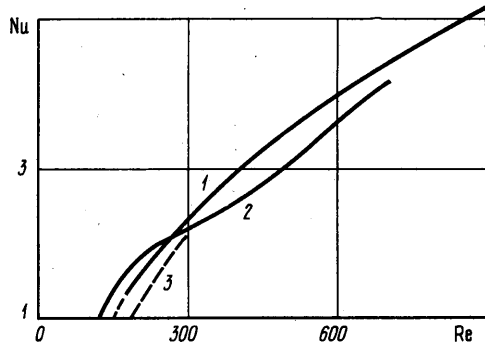
$$Nu_+ = Nu(L), \quad Nu_- = Nu(0), \quad Nu(x_1) = \int_0^L \int_0^L \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_2 dx_3 / L(T_2 - T_1)$$

Для стационарных режимов тепловые потоки на основания полости равны $Nu_+ = Nu_-$.

Поставленная задача решалась численно при помощи метода [11]. Пространственные производные аппроксимировались через потоки физических величин W на границах расчетных ячеек центральными разностями.



Фиг. 1



Фиг. 2

ми второго порядка точности

$$\frac{\partial W(\varphi)}{\partial x_\alpha} \approx \frac{W(\varphi_{i+\frac{1}{2}}) - W(\varphi_{i-\frac{1}{2}})}{h}, \quad \varphi_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{\varphi_i + \varphi_{i\pm 1}}{2}$$

$$\frac{\partial W(\partial\psi(\varphi)/\partial x_\alpha)}{\partial x_\alpha} \approx \left[W\left(\frac{\psi(\varphi_{i+1}) - \psi(\varphi_i)}{h}\right) - W\left[\frac{\psi(\varphi_i) - \psi(\varphi_{i-1})}{h}\right] \right] / h$$

$$\frac{\partial W(\partial\psi(\varphi)/\partial x_\beta)}{\partial x_\alpha} \approx \left[W\left(\frac{\psi(\varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) - \psi(\varphi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})}{l}\right) - W\left(\frac{\psi(\varphi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) - \psi(\varphi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})}{l}\right) \right] / h$$

$$\varphi_{i\pm\frac{1}{2}, j\pm\frac{1}{2}} = (\varphi_{i,j} + \varphi_{i\pm 1,j} + \varphi_{i,j\pm 1} + \varphi_{i\pm 1,j\pm 1})/4, \quad \alpha \neq \beta$$

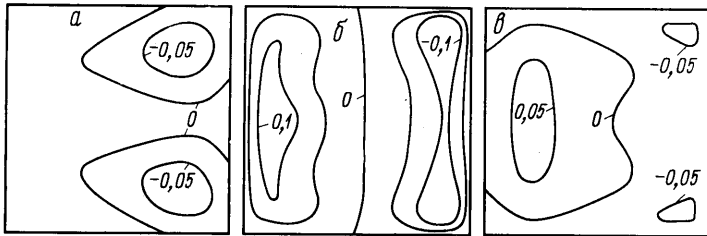
где $\varphi = (\rho, \rho u_\alpha, E)$, $\psi = (u_\alpha, T)$; h и l — шаги разностной сетки вдоль направлений x_α и x_β .

Расчеты проводились на равномерной по всему пространству сетке с $h=1/10$ и $1/16$. Параметры M , Pr , γ , T_* , ω имели постоянные значения 0,5; 1; 1,4; 1,5; $1/32$ соответственно. Временной шаг τ , при котором удавалось правильно проводить расчет нестационарных процессов, удовлетворял условию $Ku=3$ ($Ku=\tau/hM$ — число Куранта). Ниже изложены результаты, не зависящие от пространственного и временного шагов.

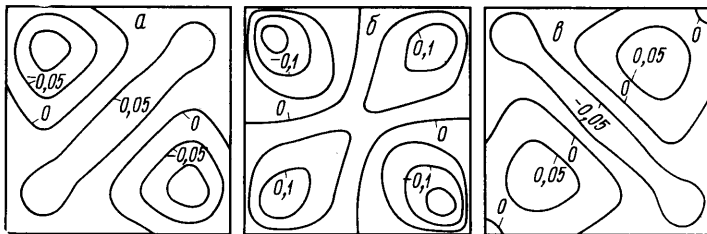
3. Результаты расчетов. В серии расчетов с $Re=200$ во время прогрева основания в полости возникало движение, форма которого обладала симметрией закона прогрева. Над участками основания полости с более высокой температурой газ поднимался вверх, над остальными опускался вниз. Возникшие формы движения наблюдались и после окончания прогрева. Тепловые потоки через полость стабилизировались около трех значений числа Нуссельта. Прогрев по законам a и b вызывал движение с $Nu \approx 1,80$, по законам e и f — с $Nu \approx 1,55$, по законам c, d, g, h — с $Nu \approx 1,22$. Далее при установлении в полости образовывалось лишь два физически различных стационарных состояния. В первом состоянии газ поднимался вверх у одной боковой грани полости и опускался вниз у противоположной. Для этого движения $Nu=1,80$. Во втором стационарном состоянии газ поднимался вверх в двух противоположных боковых двугранных углах полости, а опускался вниз в двух других противоположных боковых двугранных углах. Для этого движения $Nu=1,55$. Оно получалось при законах прогрева e и f . Остальные законы прогрева давали первое стационарное состояние.

Фигура 1 иллюстрирует динамику процессов внутри полости при законе прогрева g . Здесь показано поведение тепловых потоков Nu_+ (кривая 1) и Nu_- (2) от времени. До момента $t=15$ происходит прогрев основания. Затем тепловой поток через полость стабилизируется. При $50 < t < 100$ наблюдается почти горизонтальный участок зависимости $Nu(t)$. Далее движение в полости перестраивается и устанавливается первая стационарная форма движения.

Первая и вторая формы движения газа, а также форма движения, отвечающая закону прогрева g основания полости, изучались более подробно в широком диапазоне изменения параметра Re . Результаты расчетов представлены на фиг. 2, где показана зависимость числа Нуссельта от числа Re для стационарных (сплошные линии) и квазистационарных режимов (штриховые линии). Кривые 1 и 2 соответствуют первой и второй форме



Фиг. 3



Фиг. 4

движения, кривая 3 — форме движения, отвечающей закону прогрева g . Число Нуссельта для квазистационарных режимов отределялось приблизительно по горизонтальным участкам зависимостей $Nu(t)$ (см. фиг. 1). Критические числа Re для этих трех форм движения оказались равными 120,3; 155 и 185, что соответствует числам Рэлея $Ra=7236, 12\ 000, 17\ 100$.

Первая форма движения возбуждается мягко, т. е. амплитуда стационарного движения непрерывно растет от нуля с увеличением надкритичности. Установление стационарного движения при $Re < 500$ сопровождается затухающими колебаниями теплового потока Nu с периодом колебаний $T_0=20$. При $Re > 500$ период этих колебаний увеличивается до $T_0=36$. Стационарное движение первого типа удавалось наблюдать до $Re=700$. При $Re > 700$ движение теряло симметрию и начинало перестраиваться. В расчетах динамика перестройки зависела от шага пространственной сетки.

Вторая форма движения при $155 \leq Re \leq 170$ неустойчива и со временем переходит в первую. Устойчивое стационарное движение здесь возможно лишь с конечной амплитудой. Установление стационарного состояния происходит с затухающими колебаниями с одним и тем же периодом $T_0=20$ при всех Re . Кривые 1 и 2 (фиг. 2) при $Re=250$ пересекаются. При $Re > 250$ большую теплопередачу через полость обеспечивает вторая форма движения. Численные расчеты при $Re > 900$ давали незатухающие колебания всех величин и зависели от шага пространственной сетки.

Фигуры 3 и 4 иллюстрируют первую и вторую формы движения газа соответственно при $Re=500$. Показаны изолинии величины ρu_1 , которые проведены через 0,05, в сечениях $x_1=5/32$ (а), $15/32$ (б), $27/32$ (в). Сравнение локальных характеристик течения газа в стационарном состоянии при различных Re показывает, что с ростом Re форма второго движения меняется незначительно. Происходит только постоянное увеличение его амплитуды. Форма первого движения меняется более существенно. Величина скорости газа в отдельных точках полости с ростом Re даже может убывать.

Третью форму движения газа некоторое время после прогрева основания полости удавалось наблюдать лишь при $Re < 300$. При $Re > 300$ горизонтальный участок в зависимости $Nu(t)$ практически отсутствовал. Это движение при всех Re перестраивалось в первую форму движения.

Для значений параметров, при которых проводились расчеты, влияние сжимаемости еще не велико. Поэтому настоящие результаты можно сравнивать с результатами, полученными для несжимаемых сред. Количественное сравнение необходимо проводить, используя эффективные значения безразмерных параметров, в которых в качестве характерных масштабов плотности и температуры взяты некоторые средние значения. Например, эффективное число Рэлея Ra_* можно вычислить по средней температуре $(T_1+T_2)/2$ и плотности $(\rho_1+\rho_1 \exp(-\gamma M^2))/2$, что дает $Ra_*=0,58 Ra$. Эффективные критические числа Ra_* для рассмотренных трех движений оказываются равными 4200, 6950, 9900.

Критические числа Рэлея для указанных форм движения были вычислены также путем решения линейной задачи устойчивости равновесия, следуя методике [8]. Основания полости считались идеально теплопроводными, боковые грани — теплоизолированными. Базисные функции для скорости выбирались те же, что и в [8]. Возмущения для температуры соответственно имели вид

$$T = \alpha x_1 (1 - x_1) (2x_2 - 1) (1 + 2x_2 - 2x_2^2)$$

$$T = \alpha x_1 (1 - x_1) (2x_2 - 1) (1 + 2x_2 - 2x_2^2) (2x_3 - 1) (1 + 2x_3 - 2x_3^2)$$

$$T = \alpha x_1 (1 - x_1) [(2x_2 - 1)^2 (1 + 4x_2 - 4x_2^2) + (2x_3 - 1)^2 (1 + 4x_3 - 4x_3^2) + \beta]$$

где α и β — константы.

Вычисления дали значения $Ra_*=4000, 7050, 10\,400$, что хорошо согласуется с результатами расчета нелинейной задачи.

Экспериментальные данные по конечно-амплитудной конвекции [4–7] при $Pr \approx 1$ подтверждаются настоящими расчетами: наблюдаются только два типа движения, потеря устойчивости равновесия происходит мягко относительно первой формы движения, второе движение возбуждается жестко и теряет устойчивость при больших числах Рэлея.

Из квазистационарных движений, возбуждавшихся в полости, выделяется движение, отвечающее второму закону прогрева. Это движение можно было наблюдать по времени в несколько раз дольше остальных. Этот факт является косвенным подтверждением результатов [7] и численных расчетов [10].

В заключение автор выражает благодарность Л. А. Чудову за поддержку и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость. — В кн.: Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа, 1978, т. 11, с. 66–154.

3. *Полежаев В. И.* Численное исследование естественной конвекции жидкостей и газов.— В кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Вып. 4. М.: Изд-во МГУ, 1971, с. 86–180.
4. *Овчинников А. П.* Конвективная устойчивость жидкости в кубической полости.— ПМТФ, 1967,, № 3, с. 118–120.
5. *Зимин В. Д., Кетов А. И.* Надкритические конвективные движения в кубической полости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 5, с. 110–114.
6. *Зимин В. Д., Кетов А. И.* Конвективные колебания в подогреваемой снизу кубической полости.— Гидродинамика. Вып. 6. Пермь, 1975, с. 3–12.
7. *Любимов Д. В., Пугин Г. Ф.* Надкритические движения в кубической полости.— Гидродинамика. Вып. 10. Пермь, 1977, с. 15–26.
8. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Овчинников А. П.* Конвективная устойчивость жидкости в кубической полости.— Гидродинамика. Вып. 1. Пермь, 1968, с. 49–55.
9. *Тарунин Е. Л., Толкачева Л. В.* Свободная конвекция в кубической полости при подогреве снизу.— В кн.: 5-й Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике. Аннот. докл. Алма-Ата: Наука, 1981, с. 334.
10. *Тарунин Е. Л., Толкачева Л. В.* Надкритические режимы конвекции в кубической полости при подогреве снизу.— В кн.: Проблемы вязких течений. Новосибирск, 1981, с. 190–193.
11. *Щербак С. Б.* Об одном методе расчета нестационарных пространственных задач конвекции и горения газов.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1982, т. 13, № 3, с. 122–134.

Москва

Поступила в редакцию
9.XII.1982