

газов при умеренных и малых числах Кнудсена методом итераций.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 1, с. 172–182.

12. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1–1975, т. 15, № 5, с. 1195–1208; II–1975, т. 15, № 6, с. 1553–1567.
13. Yen S. M., Akai T. J. Nonlinear numerical solutions for an evaporation – effusion problem.— In: Rarefied Gas Dynamics. Techn. Pap. 10th Int. Symp., 1976. Pt 2. N. Y., 1977, p. 1175–1183.

Москва

Поступила в редакцию
12.X.1982

УДК 533.6.011.35–1

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ КВАЗИОДНОМЕРНЫХ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА

КАРАБУТОВ А. А.

Исследования нестационарных трансзвуковых течений газа, несмотря на имеющую обширную литературу, остаются весьма актуальными (см. обзор [1]). Уже в первых работах ([2]) были получены основные уравнения, описывающие процессы, происходящие в окрестности критического сечения квазиодномерных течений и многие важные закономерности нестационарных трансзвуковых течений, в частности, факт сохранения «площади» возмущения и динамика изменения во времени наклона профиля. Дальнейшее развитие теории было отражено в [3], где приводится, например, аналитическое решение задачи в неявных квадратурах (хотя конкретный анализ его отсутствует). Более общее уравнение, описывающее нестационарные процессы в окрестности произвольных переходов через скорость звука, было получено в [4]. В этой работе найден более общий закон изменения «площади» возмущения на фазовой плоскости и исследована устойчивость течений с переходом через скорость звука.

Новая волна активности в этом направлении связана с проблемой обтекания лазерного луча слабо поглощающим его потоком газа [5–9]. В [10] решение в квадратурах (аналогичное приведенному в [3]) было использовано для анализа с помощью фазовой плоскости поведения во времени распределения числа Маха в пространстве. Отмечено, что изображающие точки движутся по линиям постоянного расхода; определено физическое содержание закона сохранения площади возмущения, представленные характерные профили течения и найдены времена их формирования. В [11] полученное ранее уравнение было обобщено также на случай источников массы.

В данной работе иллюстрируется применение метода фазовой плоскости к анализу нестационарных процессов в окрестности критического сечения. Уравнение, описывающее медленные изменения течения, может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \varepsilon \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{q}{2\rho_0 c_0} + \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{Q}{2c_0 c_p T_0} + \frac{F}{2c_0^2} \quad (1)$$

Здесь φ – возмущение левого инварианта, причем $\varepsilon \varphi = M - 1$, где M – местное число Маха и $\varepsilon = (\kappa + 1)/2$, ρ_0 , c_0 , T_0 – критические плотность, скорость звука и температура газа, c_p – теплоемкость, $\theta = c_0 t$, координата x направлена по потоку, $A(x, \theta)$ – сечение канала, $q(x, \theta)$ – скорость производства массы газа, $Q(x, \theta)$ – удельная тепловая мощность, сообщаемая газу, $F(\theta, x)$ – внешняя сила, приходящаяся на единицу массы. Уравнение (1) справедливо в приближении $|\varphi| \sim \mu \ll 1$ и медленности изменения внешних воздействий

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} (q, A, Q, F) \right| \sim \mu \left| \frac{\partial}{\partial x} (q, A, Q, F) \right|$$

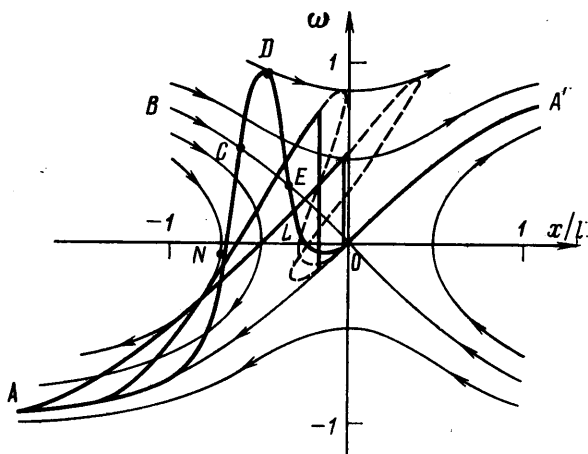
При этом внешние воздействия будут второго порядка малости.

Поскольку все источники q , A , Q и F считаются известными функциями координат и времени, они могут быть объединены в один потенциал $E(x, \theta)$, в который входят аддитивно. Уравнения характеристик для (1) могут быть сведены к следующему:

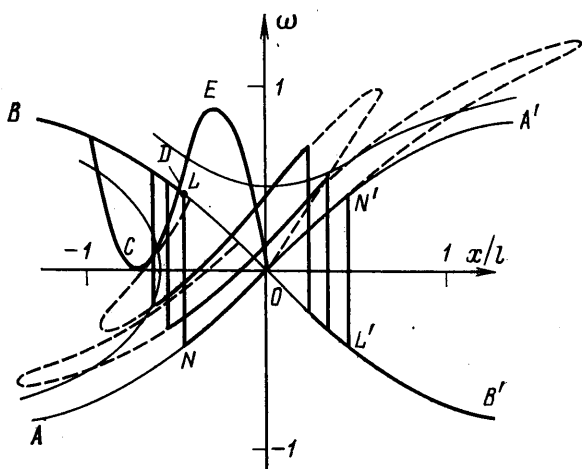
$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + \frac{dE}{dx} = 0 \quad (2)$$

Таким образом, элементы возмущения движутся независимо друг от друга. Координата x имеет смысл модифицированной лагранжевой координаты элемента возмущения: из истинного смещения вычитается величина $c_0 t = \theta$.

Для важного частного случая не меняющихся во времени воздействий $\partial E / \partial \theta = 0$ решение уравнения (1) удобно анализировать на фазовой плоскости $(x, \varepsilon \varphi)$. Точки начального профиля $\varepsilon \varphi(x, \theta = 0) = M_0(x) - 1$ движутся по линиям постоянного расхода



Фиг. 1



Фиг. 2

газа, являющимися стационарными решениями уравнения (1). Скорость их смещения по оси x пропорциональна ординате точки.

В окрестности критического сечения фазовая плоскость содержит особую точку типа седла. Рассмотрим конкретный вид потенциала этого типа

$$E(x) = -1/2 \Delta^2 \operatorname{ch}^{-2}(x/l) \quad (3)$$

Для него решение уравнения (1) может быть выражено в элементарных функциях. Фазовая плоскость уравнения (1) с потенциалом (3) изображена на фиг. 1 тонкими линиями ($X=x/l$). Стрелки указывают направление смещения изображающих точек (в верхней полуплоскости — вправо, в нижней — влево). На этой фигуре изображена трансформация профиля $ANCDELOA'$ для последовательных моментов времени $\theta \sqrt{\varepsilon} \Delta / l = 0; 0,5; 1$ ($\omega = \varphi \sqrt{\varepsilon} / \Delta$); он представляет собой возмущение левого инварианта φ на фоне стационарного течения с переходом через скорость звука с ускорением. Точки профиля, лежащие на дугах ANC и ELO , в дальнейшем останутся в дозвуковой части канала и будут смещаться навстречу потоку (кроме точек C и E , лежащих на сепаратрисе и движущихся по ней к точке O). Точки дуги CDE будут смещаться вниз по потоку все время оставаясь в сверхзвуковой области. Все точки будут лежать в области, ограниченной траекториями точек N и D и кривой AA' .

После появления в профиле слабой ударной волны амплитуда возмущения будет убывать и с течением времени установится течение AA' . Направление смещения разрыва определяется конкретным видом начального распределения: если площадь криволинейного сегмента CDE больше площади сегмента ELO , то разрыв будет смещаться в сверхзвуковую часть канала, причем в сверхзвуковую область течения проходит часть начальной массы возмущения, пропорциональная разности площадей сегментов CDE и ELO . При обратном соотношении площадей вся масса возмущения будет возвращаться в дозвуковую часть течения.

Если возмущение течения AA' , расположенное в дозвуковой части канала, не содержит зон, лежащих на фазовой плоскости выше сепаратрисы BB' , то возмущение полностью отразится от критического сечения. Для того чтобы возмущение инварианта Φ хотя бы частично смогло проникать в сверхзвуковую область, оно должно быть расположено достаточно близко к критическому сечению (для выполнения условия положительности разности площадей).

Трансформация возмущенного течения торможения BB' представлена на фиг. 2 (в моменты времени $\theta\sqrt{\epsilon}\Delta/l=0, 1, 2, \infty$). Возмущение DEO полностью проникает в закритическую часть и, трансформируясь, все ближе прилегает к сепаратрисе OA' . Поскольку площадь возмущения на фазовой плоскости сохраняется, то при $\theta \rightarrow \infty$ устанавливается течение с ударной волной, состоящей из отрезков сепаратрис OA' и OB' . Положение разрыва $N'L'$ определяется из условия равенства площадей сегментов DEO и $ON'L'$. Соответственно все точки возмущения BCD будут смещаться по потоку, а после поворота — навстречу ему. Образующаяся в докритической части канала ударная волна движется, и при $\theta \rightarrow \infty$ профиль течения будет иметь вид $BLNON'L'B'$, а положение фронта LN определяется из условия равенства площадей сегментов BCD и LNO .

Таким образом, течение с торможением в окрестности перехода через скорость звука является неустойчивым. Возмущения его приводят к формированию N-образного течения, содержащего две ударные волны и разгонный участок в окрестности критического сечения. Разгонный участок N-образного течения играет роль своеобразного буфера: возмущения, приходящие к критической части, лишь меняют размер этого участка в зависимости от того, с какой стороны, какой амплитуды и знака пришло возмущение. При определенных условиях возможны течения с изломом в критическом сечении: например $BLNOB'$ или $BON'L'B'$. Однако такие течения неустойчивы в той же мере, что и течение торможения.

Кроме описанных задач метод фазовой плоскости позволяет анализировать трансзвуковые течения при медленном изменении средней скорости потока [12], слабой неравновесности газа [13], слабой неоднородности возмущений [14].

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Н. Крайко за ценные замечания и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Осватич К. Трансзвуковые течения. — В кн.: Теор. и прикл. мех. Тр. 14-го Междунар. конгр. IUTAM, Делфт, 30 авг.—4 сент. 1976. М., 1979, с. 417—438.
2. Кантровиц А. Одномерные неустановившиеся течения. — В кн.: Основы газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, с. 325—385.
3. Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М., 1965, § 28, с. 139—141. (Тр. Вычисл. центра АН СССР).
4. Куликовский А. Г., Слободкина Ф. А. Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности точек перехода через скорость звука. — ПММ, 1967, т. 31, № 4, с. 593—602.
5. Ellinwood J. Y., Mirrels H. Density perturbations in transonic sluing laser beams. — Appl. Optics, 1975, v. 14, № 9, p. 2238—2242.
6. Белокопъ В. А., Руденко О. В., Хохлов Р. В. Аэродинамические явления при сверхзвуковом обтекании лазерного луча. — Акуст. ж., 1977, т. 23, № 4, с. 632—634.
7. Коган М. Н., Кучеров А. Н., Михайлов В. В., Фонарев А. С. Плоские течения газа при слабом подводе энергии. — Изв. АН СССР. ЖТГ, 1978, № 5, с. 95—102.
8. Азманов С. А., Руденко О. В., Федорченко А. Т. Оптическая генерация интенсивных волн в трансзвуковых потоках газа. — Письма в ЖТФ, 1979, т. 5, № 15, с. 934—936.
9. Карабутов А. А., Руденко О. В. Нелинейные плоские волны, возбуждаемые объемными источниками в движущейся с трансзвуковой скоростью среде. — Акуст. ж., 1979, т. 25, № 4, с. 536—542.
10. Гусев В. Э., Карабутов А. А. К вопросу о возбуждении акустических импульсов распределенными источниками, движущимися с трансзвуковой скоростью. — Акуст. ж., 1981, т. 27, № 2, с. 213—219.
11. Карабутов А. А. Исследование нестационарных трансзвуковых течений методом фазовой плоскости. — Вестн. МГУ. Сер. физ.-астр., 1982, т. 23, № 1, с. 26—30.
12. Гусев В. Э., Карабутов А. А. Возбуждение нелинейных плоских волн неравномерно движущейся с трансзвуковой скоростью термооптической антенной. — Акуст. ж., 1982, т. 28, № 1, с. 38—41.
13. Гусев В. Э., Карабутов А. А. Обтекание слоя тепловыделения трансзвуковым потоком релаксирующего газа. — Акуст. ж., 1982, т. 28, № 2, с. 177—183.
14. Азманов С. А., Гусев В. Э., Карабутов А. А., Руденко О. В. Возбуждение нелинейного звука движущимся световым лучом. — В кн.: Тез. докл. 5-го Всес. совещ. по нерезонансному взаимодействию оптического излучения с веществом. Л., 1981, с. 371—372.

Москва

Поступила в редакцию
12.V.1982