

гающих волн отражение их вертикальной стенкой уступа уменьшается, а отражение волн дном мелководной зоны увеличивается при одновременном уменьшении глубины этой зоны (в рассмотренном случае — от 0,250 до 0,125 глубины H) и чем короче длина набегающих волн, тем больше вклады, вносимые в отражение волн вертикальной стенкой уступа и дном мелководной зоны, приближаются друг к другу (при изменении глубины мелководной зоны в тех же пределах).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Преломление и отражение плоских волн в жидкости при переходе с одной глубины на другую.— Изв. АН СССР. ОН, 1950, № 11, с. 1601–1614.
2. Войт С. С. Переход плоских волн через мелководную зону.— Тр. Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1959, т. 15, с. 34–42.
3. Mysak L. A. On the generation of double Kelvin waves.— J. Fluid Mech., 1969, v. 37, № 3, p. 417–434.
4. Черкесов Л. В. Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наук. думка, 1973. 247 с.
5. Ле Блон П. Х., Майсек Л. А. Волны в океане. М.: Мир, 1981, ч. 1. 480 с.; ч. 2. 365 с.
6. Витюк В. Ф. Численно-аналитическое исследование распределения возмущений, вызванных набегающими волнами на толстый док.— В кн.: Вычислительная математика. Киев, 1975, с. 36–41.
7. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
8. Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980. 463 с.
9. Канторович Л. В., Крылов В. Н. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Гостехиздат, 1949. 696 с.

Одесса

Поступила в редакцию
2.III.1982

УДК 533.6.011

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СИЛЬНОМ ИСПАРЕНИИ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

АБРАМОВ А. А.

Методом Монте-Карло получено численное решение задачи о сильном испарении одноатомного газа для модели молекул псевдомаквелловских и твердых сфер. Проведено сравнение с результатами других авторов. Результаты хорошо согласуются с решением данной задачи, полученным на основе модельного кинетического уравнения БГК.

1. Целью данной работы является решение задачи о сильном испарении одноатомного газа на основе уравнения Больцмана. Вопросы, связанные с постановкой задачи, рассматривались в [1–8], поэтому приведем постановку математической задачи применительно к уравнению Больцмана.

Необходимо решить стационарное уравнение Больцмана (1.1) в полубесконечном пространстве над испаряющейся поверхностью с граничным условием на поверхности (1.2) и граничным условием на внешней границе слоя Кнудсена (1.3)

$$v_x \frac{df}{dx} = \int (f'f_1' - ff_1) gb db de dv_1 = J(f, f); \quad g = |v_1 - v| \quad (1.1)$$

$$f(x=0, v_x > 0) = (a_w n_{ev} + n_r) (h_w / \pi)^{3/2} \exp(-h_w v^2) \quad (1.2)$$

$$f(x \rightarrow \infty) = n_\infty (h_\infty / \pi)^{3/2} \exp\{-h_\infty [(v_x - u_\infty)^2 + v_y^2 + v_z^2]\} \quad (1.3)$$

Здесь f — функция распределения молекул; v — скорость молекулы; b — прицельное расстояние; e — азимутальный угол; $h_w = m/2kT_w$, m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, T_w — температура поверхности, n_{ev} — плотность насыщенного пара материала поверхности при температуре T_w , n_r — плотность отраженных молекул, a_w — коэффициент испарения [9]. Ось x направлена по нормали к поверхности в сторону газа.

Параметры поверхности n_{ev} , T_w , a_w считаются заданными. Необходимо найти гидродинамические параметры n_∞ , T_∞ , u_∞ на внешней границе слоя Кнудсена как функции расхода испаряющегося материала.

В такой постановке задача рассматривалась в ряде работ. Использовалось три подхода: 1) приближенное решение, основанное на некоторой аппроксимации функции распределения [1–4]; 2) численное решение задачи, когда интеграл столкновений $J(f, f)$ берется в форме БГК [5–7]; 3) численное решение уравнения Больцмана с помощью метода статистического моделирования Берда [10].

В первом подходе записывают уравнения сохранения потоков массы, импульса и энергии для контрольных поверхностей, расположенных вблизи испаряющейся поверхности и на внешней границе кнудсеновского слоя. Различие здесь состоит в выборе аппроксимирующей функции для функции распределения молекул, падающих на поверхность. В работе [1] эта функция принимается за максвелловскую функцию распределения с параметрами, соответствующими плотности, скорости и температуре газа у поверхности. В работах [2–3] в качестве аппроксимирующей функции берется максвелловская функция распределения на внешней границе слоя Кнудсена (1.3), умноженная на некоторую константу, которая характеризует выбивание молекул, летящих к поверхности с внешней границы кнудсеновского слоя. В работе [4] для того, чтобы замкнуть систему моментных уравнений сохранения, используют приближенное выражение для изменения энтропии газа поперек кнудсеновского слоя.

Второй подход основан на численном решении модельного кинетического уравнения БГК с граничными условиями (1.2)–(1.3). Впервые такая попытка была предпринята в работе [5]. Однако впоследствии было обнаружено [7], что применяемый метод итераций обладает медленной сходимостью, сравнимой с ошибками вычислений, что привело к неправильным результатам вычислений. Чтобы получить правильные результаты, необходимо либо улучшать скорость сходимости итерационного процесса [7, 11], либо брать начальное приближение, достаточно близко расположенное к точному решению, как это сделано в [6], где в качестве начального приближения взяты результаты приближенного решения данной задачи, полученные в [4].

Третий подход заключается в статистическом моделировании задачи (1.1)–(1.3). В работе [10] данная задача решалась численно методом статистического моделирования Берда. Для этой цели рассматривалась поверхность, находящаяся в равновесии со своим паром при температуре T_0 . Затем температура поверхности скачком увеличивается до T_L и рассматривается картина формирования течения во времени. Для расчета полной картины рассматриваемого течения при заданном коэффициенте прилипания a_w в [10] задавались две величины: n_0/n_L и $\beta = [(n_L - n_0)/n_0] / [(T_L - T_0)/T_0]$, где n_0 и n_L – плотности пара при температурах T_0 и T_L . От поверхности тела бегут волна сжатия и контактный разрыв, за которыми происходит формирование области течения газа. Рассматривался процесс формирования течения в кнудсеновском слое после того, как волна сжатия и контактный разрыв уходят достаточно далеко от испаряющейся поверхности. В результате расчетов обнаружена зависимость гидродинамических параметров на внешней границе слоя Кнудсена при заданной величине расхода испаряющегося материала m от величины параметра β . Однако известно, что данная задача является однопараметрической [5]. Двухпараметричность, по-видимому, связана с тем, что авторам не удалось по причине ограниченности памяти ЭВМ и времени счета полностью проследить картину установления течения в слое Кнудсена.

2. Предположим, что одноатомный газ, состоящий из N молекул, заключен между двумя параллельными поверхностями, расположенными на некотором конечном расстоянии L друг от друга. Функция распределения молекул на нижней поверхности ($x=0$) имеет вид (1.2), на верхней ($x=L$) – (1.3). В дальнейшем рассматривались молекулы, сечение взаимодействия которых имеет вид: $\sigma = \sigma_0/g$ – псевдомаквелловские сферы ($\sigma_0 = \text{const}$) и $\sigma = \text{const}$ – молекулы твердые шары. Скорость молекул после столкновения определяем по формулам

$$\mathbf{v}' = 0,5(\mathbf{v} + \mathbf{v}_1 + g\mathbf{n}), \quad \mathbf{v}_1' = 0,5(\mathbf{v} + \mathbf{v}_1 - g\mathbf{n})$$

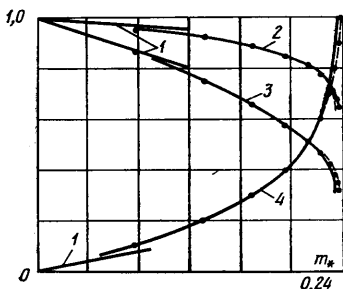
где \mathbf{n} – случайный вектор, равномерно распределенный по поверхности единичной сферы.

Все пространство разбивается на M полос шириной $H = L/M$, внутри которых параметры газа n , u и T считаются постоянными, причем ширина полосы H выбирается меньше, чем средняя длина пробега молекулы. Процесс моделирования осуществляется по схеме, предложенной в [12].

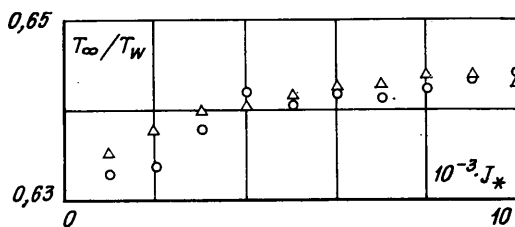
Решение данной задачи на основе модельного кинетического уравнения БГК [7] показало, что задачу удобно решать в обратной постановке, когда параметры n_∞ , T_∞ , u_∞ считаются заданными, а отношения n_∞/n_{ev} , T_∞/T_w находятся из законов сохранения потоков массы и энергии поперек кнудсеновского слоя. При решении методом Монте-Карло удобно считать, что заданы параметры n_* , T_∞ , u_∞ , где n_* – средняя плотность газа. Отношения n_∞/n_* , n_{ev}/n_* , T_∞/T_w также находятся из законов сохранения потоков массы и энергии, записанных в сечениях $x=0$ и $x=L$. Потоки массы и энергии в процессе численного моделирования вычисляются по числу ударов молекул о поверхность. В данном подходе параметром, от которого зависит решение, является число Маха на внешней границе кнудсеновского слоя M_∞ . При заданном значении числа M_∞ функция, по которой происходит розыгрыш скоростей молекул, влетающих с внешней границы $x=L$ в рассматриваемую область течения, фиксирована в процессе вычислений. Поэтому в кнудсеновский слой не приходят возмущения, связанные с процессом формирования течения в эйлеровской области, и установление течения в кнудсеновском слое происходит гораздо быстрее. Расчеты подтвердили данное предположение.

3. Результаты численного расчета величин T_∞/T_w , n_∞/n_{ev} , M_∞ при $a_w=1$ в зависимости от величины безразмерного расхода $m_* = \pi n_i h_w^{3/2} / n_{ev}$ для газа псевдомаксвелловских сфер изображены на фиг. 1 точками. Проводились также расчеты для модели твердых шаров. Сравнение результатов показало, что они отличаются друг от друга не более чем на 1%, поэтому результаты расчета для модели твердых шаров не приводятся. Заметим, что в работе [13], в которой рассматривалась задача о переконденсации, также отмечается нечувствительность полученных результатов к модели взаимодействия молекул.

Пунктирные и сплошные кривые соответствуют данным, полученным в работах [6, 7] для модельного кинетического уравнения БГК (кривая 2 — температура, 3 — плотность, 4 — число Маха). Кривые 1 соответствуют результатам решения задачи о слабом испарении, полученным на основе решения уравнения БГК в линейной по величине расхода постановке в [8]. Приведенные результаты показывают хорошее совпадение. Это в свою очередь означает, что различие в диссипативных коэф-



Фиг. 1



Фиг. 2

фициентах для модельного кинетического уравнения БГК уравнения Больцмана может сказаться лишь только на распределении макропараметров в кнудсеновском слое, но не на их предельных значениях.

Проводилось исследование установления результатов в зависимости от величины L . Для установления величин, приведенных на фиг. 1, достаточно взять $L \approx 20l$, где $l = 2c_{T_\infty} / \sqrt{\pi} n_i \sigma_0$ — средняя длина свободного пробега молекул. На фиг. 2 приведены результаты установления величины T_∞/T_w в зависимости от числа ударов молекул о внешнюю границу слоя Кнудсена J_* при числе $M_\infty=1$. Начальное значение $T_\infty^{(0)}/T_w^{(0)}$ для результатов, изображенных кружками, 0,667; для треугольников 0,909. Приведенные результаты получены при $H=0,025 L$ и $N=400$. Результаты для других значений коэффициента прилипания легко могут быть получены пересчетом по формулам, указанным в [5].

В заключение автор выражает благодарность М. Н. Когану за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов С. И., Имас Я. А., Романов Г. С., Ходыко Ю. В. Действие излучения большой мощности на металлы. М.: Наука, 1970, 272 с.
2. Ytrehus T. Theory and experiments on gas kinetics in evaporation.— In: Rarefied Gas Dynamics Techn. Pap. 10th Int. Symp. 1976. Pt 2. N. Y., 1977, p. 1213—1225.
3. Labuntsov D. A., Kryukov A. P. Analysis of intensive evaporation and condensation.— Int. J. Heat and Mass Transfer, 1979, v. 22, № 7, p. 989—1002.
4. Soga T. Quasisteady one-dimensional evaporation problem using entropy-balance relation.— In: Rarefied Gas Dynamics Techn. Pap. 10th Int. Symp. 1976. Pt 2. N. Y., 1977, p. 1185—1196.
5. Коган М. Н., Макашев Н. К. О роли слоя Кнудсена в теории гетерогенных реакций и в течениях с реакциями на поверхности.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 6, с. 3—11.
6. Soga T. On the arbitrary strong one-dimensional evaporation problem.— Trans. Jap. Soc. Aeronaut. and Space Sci., 1978, v. 21, № 52, p. 87—97.
7. Абрамов А. А., Коган М. Н., Макашев Н. К. Численное исследование процессов в сильно неравновесных слоях Кнудсена.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3, с. 72—81.
8. Макашев Н. К. Испарение, конденсация и гетерогенные химические реакции при малых значениях числа Кнудсена.— Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 3, с. 49—62.
9. Хирс Д., Паунд Г. Испарение и конденсация. М.: Металлургия, 1966. 196 с.
10. Murakami M., Oshima K. Kinetic approach to the transient evaporation and condensation problem.— In: Rarefied Gas Dynamics, Proc. 9th Int. Symp. Göttingen, 1974. V. 2. Porz — Wahn., 1974. p. F6/1 — F6/9.
11. Бишаев А. М., Рыжков В. А. Решение стационарных задач кинетической теории

газов при умеренных и малых числах Кнудсена методом итераций.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 1, с. 172–182.

12. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1–1975, т. 15, № 5, с. 1195–1208; II–1975, т. 15, № 6, с. 1553–1567.
13. Yen S. M., Akai T. J. Nonlinear numerical solutions for an evaporation – effusion problem.— In: Rarefied Gas Dynamics. Techn. Pap. 10th Int. Symp., 1976. Pt 2. N. Y., 1977, p. 1175–1183.

Москва

Поступила в редакцию
12.X.1982

УДК 533.6.011.35–1

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ КВАЗИОДНОМЕРНЫХ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА

КАРАБУТОВ А. А.

Исследования нестационарных трансзвуковых течений газа, несмотря на имеющую обширную литературу, остаются весьма актуальными (см. обзор [1]). Уже в первых работах ([2]) были получены основные уравнения, описывающие процессы, происходящие в окрестности критического сечения квазиодномерных течений и многие важные закономерности нестационарных трансзвуковых течений, в частности, факт сохранения «площади» возмущения и динамика изменения во времени наклона профиля. Дальнейшее развитие теории было отражено в [3], где приводится, например, аналитическое решение задачи в неявных квадратурах (хотя конкретный анализ его отсутствует). Более общее уравнение, описывающее нестационарные процессы в окрестности произвольных переходов через скорость звука, было получено в [4]. В этой работе найден более общий закон изменения «площади» возмущения на фазовой плоскости и исследована устойчивость течений с переходом через скорость звука.

Новая волна активности в этом направлении связана с проблемой обтекания лазерного луча слабо поглощающим его потоком газа [5–9]. В [10] решение в квадратурах (аналогичное приведенному в [3]) было использовано для анализа с помощью фазовой плоскости поведения во времени распределения числа Маха в пространстве. Отмечено, что изображающие точки движутся по линиям постоянного расхода; определено физическое содержание закона сохранения площади возмущения, представлены характерные профили течения и найдены времена их формирования. В [11] полученное ранее уравнение было обобщено также на случай источников массы.

В данной работе иллюстрируется применение метода фазовой плоскости к анализу нестационарных процессов в окрестности критического сечения. Уравнение, описывающее медленные изменения течения, может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \varepsilon \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{q}{2\rho_0 c_0} + \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{Q}{2c_0 c_p T_0} + \frac{F}{2c_0^2} \quad (1)$$

Здесь φ – возмущение левого инварианта, причем $\varepsilon \varphi = M - 1$, где M – местное число Маха и $\varepsilon = (\kappa + 1)/2$, ρ_0 , c_0 , T_0 – критические плотность, скорость звука и температура газа, c_p – теплоемкость, $\theta = c_0 t$, координата x направлена по потоку, $A(x, \theta)$ – сечение канала, $q(x, \theta)$ – скорость производства массы газа, $Q(x, \theta)$ – удельная тепловая мощность, сообщаемая газу, $F(\theta, x)$ – внешняя сила, приходящаяся на единицу массы. Уравнение (1) справедливо в приближении $|\varphi| \sim \mu \ll 1$ и медленности изменения внешних воздействий

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta} (q, A, Q, F) \right| \sim \mu \left| \frac{\partial}{\partial x} (q, A, Q, F) \right|$$

При этом внешние воздействия будут второго порядка малости.

Поскольку все источники q , A , Q и F считаются известными функциями координат и времени, они могут быть объединены в один потенциал $E(x, \theta)$, в который входят аддитивно. Уравнения характеристик для (1) могут быть сведены к следующему:

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + \frac{dE}{dx} = 0 \quad (2)$$

Таким образом, элементы возмущения движутся независимо друг от друга. Координата x имеет смысл модифицированной лагранжевой координаты элемента возмущения: из истинного смещения вычитается величина $c_0 t = \theta$.

Для важного частного случая не меняющихся во времени воздействий $\partial E / \partial \theta = 0$ решение уравнения (1) удобно анализировать на фазовой плоскости $(x, \varepsilon \varphi)$. Точки начального профиля $\varepsilon \varphi(x, \theta = 0) = M_0(x) - 1$ движутся по линиям постоянного расхода