ЛИТЕРАТУРА

1. *Беляев В. А.* Дифракция поверхностных гравитационных волн на произвольно расположенной системе вертикальных препятствий.– Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 2, с. 28–33.
2. *Селезов И. Т., Яковлев В. В.* Дифракция волн на симметричных неоднородностях. Киев: Наук. думка, 1978. 146 с.
3. *Chakrabarti S. K.* Wave forces on multiple vertical cylinders.– J. Waterway Port Coast. and Ocean Div.– Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1978, v. 104, № 2, p. 147–161.
4. *Massel S. R.* Interaction of water waves with cylinder barrier.– J. Waterways. Harbors and Coast. Eng. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1976, v. 102, № 2, p. 165–187.
5. *Spring B. H., Monkmeyer P. L.* Interaction of plane waves with vertical cylinders.– Int. Coastal Eng. Conf. 14-th Proc. Copenhagen, 1974, v. 3, N. Y., Publ. by ASCE. 1975, p. 1828–1847.
6. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978 307 с.
7. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 583 с.
8. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.

Киев — Поступила в редакцию 4.V.1982

УДК 532.593.5

ОБ ОТРАЖЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ДОННЫМ УСТУПОМ

ВИТЮК В. Ф.

Проблеме распространения волн в бассейне с вертикальным уступом дна посвящено много работ. Одними из первых в этой области являются работы [1–3]. Библиографию работ можно найти, например, в [4, 5]. В этих работах в мелководной зоне бассейна используется теория длинных волн, а в глубоководной – либо теория длинных волн, либо теория волн малой амплитуды. В настоящей работе использована теория волн малой амплитуды как в мелководной, так и глубоководной зонах бассейна.

Изучено распространение поверхностных волн в бассейне с вертикальным уступом дна. Использован метод сопряжения решений на горизонтальной границе, являющейся продолжением дна мелководной зоны бассейна, и метод факторизации. Показано, что отражение волн зависит от длины набегающих волн и перепада глубин зон бассейна.

Пусть по свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости справа налево перемещаются волны, встречая донный уступ. В этом случае возникающее движение жидкости описывается потенциалом скорости $F(x, y, t)$, который удовлетворяет в области, занятой жидкостью, уравнению

$$\Delta F(x, y, t)=0$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+\frac{\partial F}{\partial y}=0, \qquad y=1, \qquad 0<x<\infty$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0, \qquad y=h, \qquad -\infty<x<0, \qquad y=0, \qquad -\infty<x<\infty$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0, \qquad x=0, \qquad 0\leqslant y\leqslant h$$

Функция $F(x, y, t)$ на бесконечности ограничена.

Здесь всюду введены безразмерные величины по формулам (звездочки в изложении опущены)

$$(x^*, y^*, h^*)=\frac{1}{H}(x, y, h), \qquad t^*=t\sqrt{\frac{g}{H}}, \qquad F^*=\frac{F}{H\sqrt{gH}}$$

где H, h – глубины жидкости справа и слева от уступа соответственно ($h<H$), t – время, g – ускорение силы тяжести.

В принятых обозначениях потенциал скорости набегающих волн представляется выражением

$$F^i(x, y, t)=\operatorname{ch} C_0 y \operatorname{Re}\{\exp[-i(C_0 x+\omega t)]\}$$

где C_0 – положительный корень уравнения $C_0 \operatorname{sh} C_0-\omega^2 \operatorname{ch} C_0=0$, ω – безразмерная частота колебаний жидкости.

Решение выписанной задачи отыскивается в виде [6]

$$F(x, y, t)=\mathrm{Re}\,\{[\mathrm{ch}\,C_0y\exp(-iC_0x)+\varphi(x, y)]\exp(-i\omega t)\}$$

$$\varphi(x, y)=\begin{cases}\varphi_1(x, y), & 0\leqslant y\leqslant h, \quad x\geqslant 0 \quad \text{(область I)}\\ \varphi_2(x, y), & h\leqslant y\leqslant 1, \quad |x|<\infty \quad \text{(область II)}\end{cases}$$

Каждая из функций $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ удовлетворяет соответствующей граничной задаче. Причем на вертикальной стенке уступа, т. е. при $x=0$, $0\leqslant y\leqslant h$, функция $\varphi_1(x, y)$ должна удовлетворять условию

$$\partial\varphi_1(x, y)/\partial x=iC_0\,\mathrm{ch}\,C_0y \tag{1}$$

На границе $x\geqslant 0$, $y=h$ требуется выполнение условий сопряжения

$$\frac{\partial\varphi_1(x, y)}{\partial y}=\frac{\partial\varphi_2(x, y)}{\partial y}, \qquad \varphi_1(x, y)=\varphi_2(x, y) \tag{2}$$

выражающих собой равенство нормальных скоростей и давлений на границе, являющейся продолжением дна мелководной зоны бассейна.

Предлагается в дальнейшем условие (2) записывать в виде

$$\frac{\partial\varphi_1(x, y)}{\partial y}-\omega_1^2\varphi_1(x, y)=\frac{\partial\varphi_2(x, y)}{\partial y}-\omega_1^2\varphi_2(x, y)=0 \tag{3}$$

$$\varphi_1(x, y)=\varphi_2(x, y) \qquad (y=h, \;\; x\geqslant 0)$$

где $\omega_1^2=C_0\,\mathrm{th}\,C_0h$, так как при $h\to 0$ $\omega_1^2\to\omega^2$ и первое из условий (3) переходит в соответствующее условие на поверхности жидкости, а при $h\to 0$ $(\omega_1^2\to 0)$ – в условие на дне.

Функция $\varphi_1(x, y)$ находится методом разделения переменных и с учетом удовлетворения первого из условий (3), условия на бесконечности и на дне области I принимает вид

$$\varphi_1(x, y)=A_0\,\mathrm{ch}\,C_0ye^{iC_0x}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos C_nye^{-C_nx} \tag{4}$$

Здесь C_n $(n=1, 2,\ldots)$ – положительные корни уравнения $C_n\,\mathrm{tg}\,C_n=-\omega^2$, коэффициенты A_k $(k=0, 1,\ldots)$ будут определены ниже.

Для нахождения $\varphi_2(x, y)$ в области II применяется интегральное преобразование Фурье по переменной x

$$\Phi(\alpha, y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(x, y)e^{i\alpha x}\,dx, \qquad \alpha=\sigma+i\tau$$

$$\varphi_2(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\Phi(\alpha, y)e^{-i\alpha x}\,d\alpha$$

причем на части нижней границы этой области $x\geqslant 0$ учитывается первое из условий (3).

Для применимости указанного преобразования необходимо потребовать, чтобы значение C_0 было представимо в виде $C_0=C_0'+iC_0''$, $C_0''>0$. В конечном результате C_0'' устремляется к нулю.

Трансформанта $\Phi(\alpha, y)$ удовлетворяет краевой задаче

$$\frac{d^2\Phi(\alpha, y)}{dy^2}-\alpha^2\Phi(\alpha, y)=0, \qquad h<y<1$$

$$\frac{d\Phi(\alpha, y)}{dy}-\omega^2\Phi(\alpha, y)=0, \qquad y=1 \tag{5}$$

$$\frac{d\Phi_+(\alpha, y)}{dy}-\omega_1^2\Phi_+(\alpha, y)=0, \qquad \frac{d\Phi_-(\alpha, y)}{dy}=f(\alpha), \qquad y=h$$

$$f(\alpha)=\frac{iC_0\,\mathrm{sh}\,C_0h}{\alpha-C_0}$$

$$\Phi_+(\alpha, y) = \int_0^\infty \varphi_2(x, y) e^{i\alpha x}\, dx, \qquad \Phi_-(\alpha, y) = \int_{-\infty}^0 \varphi_2(x, y) e^{i\alpha x}\, dx$$

Решение задачи (5) записывается в виде

$$\Phi(\alpha, y) = \frac{V(\alpha)}{\vartheta(\alpha)} \Psi(\alpha, y), \qquad \vartheta(\alpha) = \alpha\delta(\alpha) = \frac{d\Psi(\alpha, h)}{dy}$$
$$\Psi(\alpha, y) = \omega^2 \operatorname{sh} \alpha(1-y) - \alpha \operatorname{ch} \alpha(1-y), \qquad V(\alpha) = f(\alpha) + \omega_1^2 \Phi_+(\alpha, h) \tag{6}$$

Функция $\Phi_+(\alpha, h)$ определяется из функционального уравнения

$$\Phi_-(\alpha, h) + K(\alpha)\Phi_+(\alpha, h) = \frac{f(\alpha)}{\vartheta(\alpha)} \Psi(\alpha, h) \tag{7}$$

которое выполняется в полосе $-C_0'' < \tau < C_0''$, $-\infty < \sigma < \infty$.

Здесь $\Phi_+(\alpha, h)$ – функция, регулярная в полуплоскости $\tau > -C_0''$, а $\Phi_-(\alpha, h)$ – в полуплоскости $\tau < C_0''$. Ядро уравнения (7) имеет вид

$$K(\alpha) = \frac{(\alpha^2 - \omega^2\omega_1^2) \operatorname{sh} \alpha(1-h) - \alpha(\omega^2 - \omega_1^2) \operatorname{ch} \alpha(1-h)}{\vartheta(\alpha)} = \frac{\Delta(\alpha)}{\vartheta(\alpha)}$$

$K(\alpha)$ – функция, регулярная в рассматриваемой полосе.

Для определения $\Phi_+(\alpha, h)$ к (7) применяется метод Винера – Хопфа [7]. Факторизуется ядро $K(\alpha)$ [8]

$$K(\alpha) = \frac{K_-(\alpha)}{K_+(\alpha)}, \qquad K_-(\alpha) = \frac{1}{K_+(-\alpha)} = \sqrt{\chi}\, \frac{C_0 - \alpha}{r_0 - \alpha} \frac{r_0}{C_0} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (i\alpha/C_n)}{1 + (i\alpha/r_n)}$$

$$\chi = \omega_1^2(1-h) + 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}$$

Здесь $\pm r_0$, $\pm ir_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ – корни уравнения $\delta(r) = 0$.

Уравнение (7) умножается на $[K_-(\alpha)]^{-1}$

$$\frac{\Phi_+(\alpha, h)}{K_+(\alpha)} + \frac{\Phi_-(\alpha, h)}{K_-(\alpha)} = \frac{f(\alpha)\Psi(\alpha, h)}{\vartheta(\alpha) K_-(\alpha)} = \frac{R(\alpha)}{\vartheta(\alpha)}$$

После применения к правой части уравнения (7) теоремы разбиения оно переписывается в виде

$$\frac{\Phi_+(\alpha, h)}{K_+(\alpha)} - R_+(\alpha) = -\frac{\Phi_-(\alpha, h)}{K_-(\alpha)} + R_-(\alpha) \tag{8}$$

Здесь $R_+(\alpha)$ и $R_-(\alpha)$ – регулярные части функции $R(\alpha)/\vartheta(\alpha)$ соответственно в верхней $(\tau > -C_0'')$ и нижней $(\tau < C_0'')$ полуплоскостях.

Например,

$$R_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{R(\xi)\, d\xi}{\vartheta(\xi)(\xi - \alpha)} =$$

$$= -\frac{R(-r_0)}{r_0(r_0+\alpha)\delta'(-r_0)} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(-ir_n)}{r_n(ir_n+\alpha)\delta'(-ir_n)} \qquad (-C_0'' < d < \tau < C_0'')$$

Следующим шагом метода Винера – Хопфа является применение теоремы Лиувилля к уравнению (8). Для этого нужно знать поведение функций $\Phi_+(\alpha, h)$ и $\Phi_-(\alpha, h)$ при $\alpha \to \infty$, которое определяется неизвестным заранее поведением $\varphi_2(x, h)$ при $x \to +0$ и $x \to -0$. Поэтому в дальнейшем предполагается, что обе части уравнения (8) при $\alpha \to \infty$ представляются полиномом $P(\alpha)$, степень и коэффициенты которого подлежат определению.

Учитывая это, можно записать из (8), что

$$\Phi_+(\alpha, h) = [P(\alpha) + R_+(\alpha)] K_+(\alpha) = \psi(\alpha) K_+(\alpha) \tag{9}$$

Применение обратного преобразования Фурье к (6) с учетом (9) позволяет записать выражение для $\varphi_2(x, y)$: при $x<0$

$$\varphi_2(x, y)=\left\{-\frac{C_0 \operatorname{sh} C_0 h}{\vartheta(C_0)}\Psi(C_0, y)e^{-iC_0x}+\right.$$

$$\left.+i\frac{V(r_0)\Psi(r_0, y)}{r_0\delta'(r_0)}e^{-ir_0x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V(ir_n)\Psi(ir_n, y)}{r_n\delta'(ir_n)}e^{r_nx}\right\}$$

при $x>0$

$$\varphi_2(x, y)=B(-C_0, y)e^{iC_0x}+\sum_{n=1}^{\infty}B(-iC_n, y)e^{-C_nx}$$

$$B(\alpha, y)=\frac{\psi(\alpha)}{\omega_1^2 h}W(\alpha, y), \qquad W(\alpha, y)=-i\omega^4 h\frac{K_-(\alpha)}{\Delta'(\alpha)}\Psi(\alpha, y)$$

Из удовлетворения второго условия (3) получаются выражения для A_k ($k=0, 1, 2,\ldots$)

$$A_0=\frac{B(-C_0, h)}{\operatorname{ch} C_0 h}, \quad A_n=\frac{B(-iC_n, h)}{\cos C_n h} \quad (n=1, 2,\ldots) \tag{10}$$

Таким образом, выражения для $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ содержат неопределенные коэффициенты полинома $P(\alpha)=\sum_j P_j\alpha^j$ и осталось неудовлетворенным условие (1).

Подстановка в это условие выражения (4) для $\varphi_1(x, h)$ с учетом (10) и последующее разложение $\operatorname{ch} C_0 y$ и $\cos C_n y$ ($n=1, 2,\ldots$) в промежутке $0\leqslant y\leqslant h$ в ряды по $\cos[m\pi y/h]$ ($m=0, 1,\ldots$) позволяют утверждать, что $P(\alpha)$ представляет собой степенной ряд по α, а его коэффициенты P_j ($j=0, 1, 2,\ldots$) определяются из решения следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left[(-C_0)^j W_{0m}+\sum_{n=1}^{\infty}(-iC_n)^j W_{nm}\right]P_j=$$

$$=\frac{C_0 h \operatorname{sh} C_0 h}{C_0^2h^2-m^2\pi^2}-R_+(-C_0)W_{0m}-\sum_{n=1}^{\infty}R_+(-iC_n)W_{nm} \quad (m=0, 1, 2,\ldots) \tag{11}$$

$$W_{0m}=\frac{W(-C_0, h)}{C_0^2h^2+m^2\pi^2}, \qquad W_{nm}=-\frac{iW(-iC_n, h)}{C_n^2h^2-m^2\pi^2}\frac{C_n}{C_0}$$

Здесь коэффициенты P_j – комплексные числа, т. е. $P_j=X_j+iY_j$, где X_j и Y_j – вещественны и удовлетворяют двум бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, вытекающих из (11). Решение этих систем может быть получено методом последовательных приближений [9].

Первое слагаемое в $\varphi_2(x, y)$ при $x>0$, которое выражается через $\psi(\alpha)$ при $\alpha=-C_0$, является потенциалом отраженной волны, а $\psi(\alpha)$ определяется суммой выражений $P(\alpha)$ и $R_+(\alpha)$, каждое из которых представляет вклад в отражение волн, вносимый вертикальной стенкой уступа и дном мелководной зоны бассейна соответственно.

Согласно полученным формулам проводился расчет по выявлению вклада каждого из слагаемых, входящих в выражение для коэффициента отражения волн, которые представляют собой соответственно доли коэффициента отражения набегающих волн вертикальной стенкой уступа и дном мелководной зоны бассейна. Результаты расчета приведены ниже. В первом столбце указаны безразмерные длины набегающих волн (по отношению к бо́льшей из глубин бассейна), в первой строке – значения величины h/H, на пересечении строк и столбцов помещены соответствующие значения отношения амплитуд волн, отраженных вертикальной стенкой уступа и дном мелководной зоны:

	0,750	0,800	0,833	0,857	0,875
25,20	4,010	3,627	3,389	3,223	3,102
11,40	4,275	3,877	3,630	3,459	3,334
1,00	1,034	1,071	1,098	1,112	1,114
0,45	0,994	0,997	0,999	1,008	1,017

На основании этих данных можно заключить, что с увеличением длины набегающих волн отражение их вертикальной стенкой уступа уменьшается, а отражение волн дном мелководной зоны увеличивается при одновременном уменьшении глубины этой зоны (в рассмотренном случае – от 0,250 до 0,125 глубины H) и чем короче длина набегающих волн, тем больше вклады, вносимые в отражение волн вертикальной стенкой уступа и дном мелководной зоны, приближаются друг к другу (при изменении глубины мелководной зоны в тех же пределах).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* Преломление и отражение плоских волн в жидкости при переходе с одной глубины на другую.– Изв. АН СССР. ОТН, 1950, № 11, с. 1601–1614.
2. *Войт С. С.* Переход плоских волн через мелководную зону.– Тр. Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1959, т. 15, с. 34–42.
3. *Mysak L. A.* On the generation of double Kelvin waves.– J. Fluid Mech., 1969, v. 37, № 3, p. 417–434.
4. *Черкесов Л. В.* Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наук. думка, 1973. 247 с.
5. *Ле Блон П. X., Майсек Л. А.* Волны в океане. М.: Мир, 1981, ч. 1. 480 с.; ч. 2. 365 с.
6. *Витюк В. Ф.* Численно-аналитическое исследование распределения возмущений, вызванных набегающими волнами на толстый док.– В кн.: Вычислительная математика. Киев, 1975, с. 36–41.
7. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
8. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980. 463 с.
9. *Канторович Л. В., Крылов В. Н.* Приближенные методы высшего анализа. М.– Л.: Гостехиздат, 1949. 696 с.

Одесса

Поступила в редакцию
2.III.1982

УДК 533.6.011

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СИЛЬНОМ ИСПАРЕНИИ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

АБРАМОВ А. А.

Методом Монте-Карло получено численное решение задачи о сильном испарении одноатомного газа для модели молекул псевдомаксвелловских и твердых сфер. Проведено сравнение с результатами других авторов. Результаты хорошо согласуются с решением данной задачи, полученным на основе модельного кинетического уравнения БГК.

1. Целью данной работы является решение задачи о сильном испарении одноатомного газа на основе уравнения Больцмана. Вопросы, связанные с постановкой задачи, рассматривались в [1–8], поэтому приведем постановку математической задачи применительно к уравнению Больцмана.

Необходимо решить стационарное уравнение Больцмана (1.1) в полубесконечном пространстве над испаряющейся поверхностью с граничным условием на поверхности (1.2) и граничным условием на внешней границе слоя Кнудсена (1.3)

$$v_x\frac{df}{dx}=\int(f'f_1'-ff_1)gb\,db\,d\varepsilon\,d\mathbf{v}_1=J(f,f);\qquad g=|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}| \tag{1.1}$$

$$f(x=0,\ v_x>0)=(a_wn_{ev}+n_r)(h_w/\pi)^{3/2}\exp(-h_wv^2) \tag{1.2}$$

$$f(x\to\infty)=n_\infty(h_\infty/\pi)^{3/2}\exp\{-h_\infty[(v_x-u_\infty)^2+v_y^2+v_z^2]\} \tag{1.3}$$

Здесь f – функция распределения молекул; $\mathbf{v}$ – скорость молекулы; b – прицельное расстояние; ε – азимутальный угол; $h_w=m/2kT_w$, m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана, T_w – температура поверхности, n_{ev} – плотность насыщенного пара материала поверхности при температуре T_w, n_r – плотность отраженных молекул, a_w – коэффициент испарения [9]. Ось x направлена по нормали к поверхности в сторону газа.

Параметры поверхности n_{ev}, T_w, a_w считаются заданными. Необходимо найти гидродинамические параметры n_∞, T_∞, u_∞ на внешней границе слоя Кнудсена как функции расхода испаряющегося материала.

В такой постановке задача рассматривалась в ряде работ. Использовалось три подхода: 1) приближенное решение, основанное на некоторой аппроксимации функции распределения [1–4]; 2) численное решение задачи, когда интеграл столкновений $J(f, f)$ берется в форме БГК [5–7]; 3) численное решение уравнения Больцмана с помощью метода статистического моделирования Берда [10].