

2. Добрынин В. М. Деформации и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа. М.: Недра, 1970, с. 120–129.
3. Кречетова Т. Н., Ромм Е. С. Об использовании нелинейно-упругой трещинно-капиллярной модели пористой среды для изучения влияния давления на физические свойства пород-коллекторов нефти и газа. — В кн.: Вопросы нелинейной геофизики. М., 1981, с. 86–97.
4. Ромм Е. С., Позиненко Б. В. О проницаемости анизотропных трещиноватых пород. — Инж. ж., 1963, т. 3, № 2, с. 381–386.

Ленинград

Поступила в редакцию
3.III.1982

УДК 532.593

ДИФРАКЦИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛН НА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННОЙ СИСТЕМЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ

БЕЛЯЕВ В. А., СЕЛЕЗОВ И. Т., ЯКОВЛЕВ В. В.

В связи с освоением нефтяных и газовых месторождений континентального шельфа в последнее время значительно повысился интерес к исследованию взаимодействия поверхностных гравитационных волн с препятствиями больших поперечных размеров, когда преобладают дифракционные эффекты и можно пренебречь эффектами вязкости. В случае системы препятствий происходит существенное усложнение волнового поля, обусловленного взаимодействием дифрагированных волн от каждого из препятствий. Эти исследования в настоящее время представлены малым числом работ [1–5]. В то же время следует отметить, что теория дифракции волн различной природы (электромагнитных, акустических, упругих) в многосвязных областях получила достаточно развитие [6–8].

В данной работе на основе линейной теории волн малой амплитуды построено решение задачи дифракции поверхностных гравитационных волн на системе произвольно расположенных вертикальных круговых цилиндров. Получены аналитические выражения для определения волновых сил и опрокидывающих моментов, действующих на каждый цилиндр системы. В качестве примера рассмотрена система препятствий, состоящая из двух рядов по три цилиндра в каждом ряду. Показано, что при определенных соотношениях между диаметром цилиндров, расстоянием между ними, углом подхода волны и ее длиной максимальные значения гидродинамических сил, действующих на цилиндры системы с учетом взаимодействия дифрагированных полей, могут быть значительно больше, чем без его учета.

1. Пусть на систему произвольно расположенных вертикальных круговых цилиндров радиуса a_s , погруженных в идеальную жидкость конечной глубины d , набегает плоские регулярные волны в направлении единичного вектора n , образующего угол α с положительным направлением оси x .

Жидкость предполагается идеальной, несжимаемой, движение — безвихревым. Потенциал скоростей $\Phi(x_s, y_s, z_s, t)$ определяется из уравнения Лапласа, при следующих граничных условиях на дне, поверхности цилиндра и свободной поверхности жидкости

$$\frac{1}{r_s} \frac{\partial}{\partial r_s} \left(r_s \frac{\partial \Phi}{\partial r_s} \right) + \frac{1}{r_s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_s^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_s^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$z_s=0: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z_s} = 0; \quad r_s=a_s: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r_s} = 0; \quad z_s=d: \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z_s} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь r_s, φ_s, z_s — полярная система координат, связанная с s -цилиндром. Потенциал скоростей представим в виде

$$\Phi = ig \frac{H \operatorname{ch} kz}{2\omega \operatorname{ch} kd} \{e^{ik(nR)} + \Phi^{(1)}\} e^{-i\omega t}; \quad \omega^2 = kg \operatorname{th} kd \quad (1.3)$$

где функция $\Phi^{(1)}$ характеризует поле рассеянных волн, R — радиус-вектор рассматриваемой точки, k — волновое число, ω — частота колебаний.

Подставляя выражение (1.3) в уравнение Лапласа (1.1), находим, что функция рассеяния $\Phi^{(1)}$ определяется из уравнения Гельмгольца со следующими условиями на бесконечности

$$\frac{1}{r_s} \frac{\partial}{\partial r_s} \left(r_s \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r_s} \right) + \frac{1}{r_s^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \varphi_s^2} + k^2 \Phi^{(1)} = 0 \quad (1.4)$$

$$\lim_{r_s \rightarrow \infty} \bar{\gamma} r_s \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r_s} - ik \Phi^{(1)} \right) = 0; \quad \lim_{r_s \rightarrow \infty} \Phi^{(1)} = 0 \quad (1.5)$$

Функцию рассеяния $\Phi_s^{(1)}$ для односвязной области, удовлетворяющую (1.4), запишем в виде [7]

$$\Phi_s^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \{ C_n^{(s)} H_n^{(1)}(kr_s) \cos n\varphi_s + B_n^{(s)} H_n^{(1)}(kr_s) \sin n\varphi_s \} \quad (1.6)$$

Исходя из принципа суперпозиции, полное решение для функции рассеяния $\Phi^{(1)}$ представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} = & \sum_{n=0}^{\infty} \{ C_n^{(s)} H_n^{(1)}(kr_s) \cos n\varphi_s + B_n^{(s)} H_n^{(1)}(kr_s) \sin n\varphi_s + \\ & + \left(\sum_{q=1}^{s-1} + \sum_{q=s+1}^N \right) [C_n^{(q)} H_n^{(1)}(kr_q) \cos n\varphi_q + B_n^{(q)} H_n^{(1)}(kr_q) \sin n\varphi_q] \} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $H_n^{(1)}$ — функция Ханкеля 1-го рода, а $C_n^{(s)}$ и $B_n^{(s)}$ — неизвестные постоянные.

Разложим набегающую волну в s -й системе координат в ряд по цилиндрическим функциям [7]

$$e^{ik(nR)} = e^{ikr_{0s} \cos(\varphi_{0s} - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kr_s) \cos n(\varphi_s - \alpha) \quad (1.8)$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$, $n \geq 1$, $2, \dots, i = \sqrt{-1}$, J_n — функция Бесселя.

Потенциал скоростей полного диффрактированного поля с учетом (1.7) и (1.8) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Phi = & ig \frac{H}{2\omega} \frac{\text{ch } kz}{\text{ch } kd} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{ikr_{0s} \cos(\varphi_{0s} - \alpha)} \varepsilon_n i^n J_n(kr_s) \cos n(\varphi_s - \alpha) + \right. \\ & + C_n^{(s)} H_n^{(1)}(kr_s) \cos n\varphi_s + B_n^{(s)} H_n^{(1)}(kr_s) \sin n\varphi_s + \\ & \left. + \left(\sum_{q=1}^{s-1} + \sum_{q=s+1}^N \right) [C_n^{(q)} H_n^{(1)}(kr_q) \cos n\varphi_q + B_n^{(q)} H_n^{(1)}(kr_q) \sin n\varphi_q] \right\} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для удовлетворения граничным условиям на каждой из несвязных поверхностей составленное таким образом решение (1.9) подставим во второе уравнение условия (1.2) и, применяя теорему сложения для цилиндрических функций, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных $C_n^{(s)}$ и $B_n^{(s)}$

$$\begin{aligned} C_n^{(s)} + \left(\sum_{q=1}^{s-1} + \sum_{q=s+1}^N \right) \sum_{m=0}^{\infty} [\gamma_{mn}^{(s,q)} C_m^{(q)} + \delta_{mn}^{(s,q)} B_m^{(q)}] &= K_n^{(s)} \\ B_n^{(s)} + \left(\sum_{q=1}^{s-1} + \sum_{q=s+1}^N \right) \sum_{m=0}^{\infty} [\alpha_{mn}^{(s,q)} B_m^{(q)} + \beta_{mn}^{(s,q)} C_m^{(q)}] &= E_n^{(s)} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$(\gamma, \alpha)_{mn}^{(s,q)} = D_n^{(s)} \{ H_{m-n}^{(1)}(kr_{sq}) \cos(m-n)\varphi_{sq} \pm (-1)^n \delta_n H_{m+n}^{(1)}(kr_{sq}) \cos(m+n)\varphi_{sq} \}$$

$$(\delta, \beta)_{mn}^{(s,q)} = D_n^{(s)} \{ H_{m-n}^{(1)}(kr_{sq}) \sin(m-n)\varphi_{sq} \pm (-1)^n \delta_n H_{m+n}^{(1)}(kr_{sq}) \sin(m+n)\varphi_{sq} \}$$

$$K_n^{(s)} = A_n^{(s)} \cos n\alpha; \quad E_n^{(s)} = A_n^{(s)} \sin n\alpha$$

$$D_n^{(s)} = \frac{J_n'(ka_s)}{H_n^{(1)'}(ka_s)}; \quad \delta_0 = 0; \quad \delta_n = 1; \quad n \geq 1, 2, \dots$$

$$A_n^{(s)} = - \frac{e^{ikr_{os} \cos(\varphi_{os} - \alpha)} \varepsilon_n i^n J_n'(ka_s)}{H_n^{(1)'}(ka_s)}$$

Здесь верхний индекс соответствует $\gamma_{(mn)}^{(sq)}$ и δ_{mn}^{sq} , а нижний — $\alpha_{mn}^{(s,q)}$ и $\beta_{mn}^{(s,q)}$.

Регуляризация системы уравнений (1.10) может быть выполнена путем подстановки [7, 8]. В результате приходим к системе уравнений с определителем нормального типа, которая может быть решена методом редукции или методом последовательных приближений.

Гидродинамическое давление, оказываемое полным волновым полем на каждый цилиндр системы, запишем в виде $r_s = a_s$: $P_s = \rho \partial \Phi / \partial t$.

Гидродинамические силы и опрокидывающие моменты, действующие на каждый цилиндр системы, выражаются через давление следующим образом:

$$F_s = \iint_{(x)} p_s u \, dx; \quad M_s = \iint_{(x)} p_s (r_s \times u) \, dx \quad (1.11)$$

где u — нормаль к внешней поверхности цилиндров, r — радиус-вектор точки, относительно которой вычисляется момент, dx — элемент площади.

Проекции волновых сил и опрокидывающих моментов, действующих на каждый цилиндр системы, в развернутом виде принимают следующий вид:

$$F_x^{(s,q)*} = \frac{F_x^{(s)}}{\rho g a_s^2 H} = \frac{\pi \operatorname{th} kd}{2ka_s} L_m^{(s,q)}, \quad F_y^{(s,q)*} = \frac{F_y^{(s)}}{\rho g a_s^2 H} = \frac{\pi \operatorname{th} kd}{2ka_s} Q_m^{(s,q)}$$

$$M_x^{(s,q)*} = \frac{M_x^{(s)}}{\rho g a_s^3 H} = \frac{\pi (kd \operatorname{th} kd + \operatorname{sech} kd - 1)}{2k^2 a_s^2} Q_m^{(s,q)}$$

$$M_y^{(s,q)*} = \frac{M_y^{(s)}}{\rho g a_s^3 H} = \frac{\pi (kd \operatorname{th} kd + \operatorname{sech} kd - 1)}{2k^2 a_s^2} L_m^{(s,q)} \quad (1.12)$$

$$L_m^{(s,q)} = e^{ikr_{os} \cos(\varphi_{os} - \alpha)} 2i I_1(ka_s) \cos \alpha + C_1^{(s)} H_1^{(1)}(ka_s) + \sum_{q=1, q \neq s}^N I_1(ka_s) \sum_{m=0}^{\infty} (a_{m-1} - a_{m+1})$$

$$a_l = [B_m^{(q)} \sin l\varphi_{sq} + C_m^{(q)} \cos l\varphi_{sq}] H_l^{(1)}(kr_{sq})$$

$$Q_m^{(s,q)} = e^{ikr_{os} \cos(\varphi_{os} - \alpha)} 2i I_1(ka_s) \sin \alpha + B_1^{(s)} H_1^{(1)}(ka_s) + \sum_{q=1, q \neq s}^N I_1(ka_s) \sum_{m=0}^{\infty} (b_{m-1} + b_{m+1})$$

$$b_l = [B_m^{(q)} \cos l\varphi_{sq} - C_m^{(q)} \sin l\varphi_{sq}] H_l^{(1)}(kr_{sq})$$

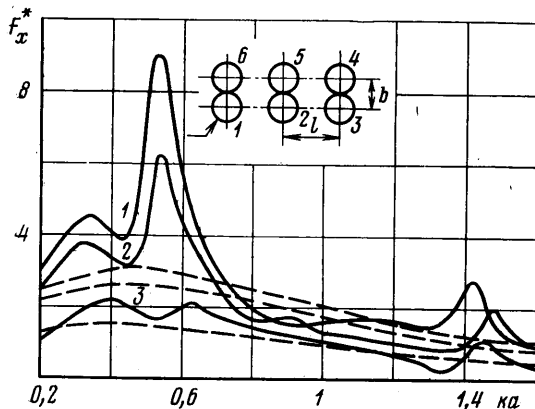
Таким образом получено выражение для проекций гидродинамических сил и опрокидывающих моментов, действующих на каждый цилиндр системы, через потенциал скоростей полного дифрагированного поля, обусловленного взаимодействием отраженных волн от каждого из цилиндров.

2. В качестве примера была составлена вычислительная программа для расчета волновых сил и опрокидывающих моментов, действующих на каждый цилиндр системы, состоящей из двух рядов по три одинаковых цилиндра радиуса $r_s = a$ в каждом ряду.

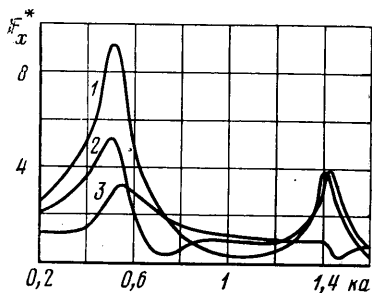
Отыскание приближенных значений неизвестных коэффициентов сводится к ре-

тение системы $12(M+1)$ уравнений с $12(M+1)$ неизвестными, которая получается из системы (1.10) после усечения ее до M -го порядка ($n, m=M=[2ka+2]$).

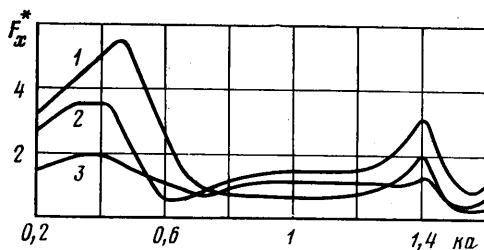
На фиг. 1–3 в безразмерном виде построены графики распределения абсолютных значений проекций волновых сил F_x^* , действующих на первые три цилиндра системы в направлении оси x , в зависимости от волнового числа $ka=0,2-1,8$ при расстоянии между рядами $b/a=2$, расстоянии между цилиндрами $l/a=4$, для глубины жидкости $d/a=5$, для углов подхода волн к системе цилиндров $\alpha=0, \pi/6, \pi/3$ (кривые 1–3). Из проведенных расчетов и представленных графиков (фиг. 1–3) следует, что в рассматриваемом диапазоне изменения волновых чисел ka существует две области возникновения локальных резонансов. Например, при $ka \approx 0,52$ проекции волновых сил F_x^* достигают своих максимальных значений, кроме того, они возрастают с уменьшением угла подхода волн. На приведенных графиках штриховые линии обозначают численные значения проекций волновых сил F_x , вычисленных для одиночного цилиндра без учета взаимодействия отраженных волн.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Из сравнения кривых следует, что в точках локальных резонансов значения волновых сил значительно превышают аналогичные значения проекций волновых сил, действующих на одиночный цилиндр. Например, для $\alpha=0$ при $ka \approx 0,52$ значения F_x^* в 3 раза превышают аналогичные значения F_x . Следует отметить, что при данном расположении цилиндров существует область изменения ka , где F_x^* по величине меньше, чем F_x . Отсюда следует, что при некоторых соотношениях между ka и расстояниями между цилиндрами l учет взаимодействия дифрагированных полей приводит к уменьшению волновых сил F_x^* по сравнению с F_x . Аналогичные выводы могут быть сделаны для четвертого, пятого и шестого цилиндров.

При фронтальном подходе волн к системе цилиндров $\alpha=\pi/2$ ввиду симметрии дифрагированной картины относительно оси y , $F_{x,1}^*=F_{x,3}^*$; $F_{x,1}^*=F_{x,5}^*$; $F_{x,2}^*=F_{x,5}^*=0$

и проекции волновых сил, действующих в направлении оси x , обусловлены только наличием отраженных волн. Следует также отметить, что увеличение числа цилиндров в системе (два, четыре и шесть цилиндров) приводит к увеличению амплитуд локальных резонансов, а также к фазовому сдвигу вершин в сторону уменьшения волновых чисел ka .

Анализ полученных количественных и качественных результатов свидетельствует о наличии существенных особенностей при взаимодействии поверхностных гравитационных волн с системами препятствий цилиндрической формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллев В. А. Дифракция поверхностных гравитационных волн на произвольно расположенной системе вертикальных препятствий.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 2, с. 28–33.
2. Селезов И. Т., Яковлев В. В. Дифракция волн на симметричных неоднородностях. Киев: Наук. думка, 1978. 146 с.
3. Chakrabarti S. K. Wave forces on multiple vertical cylinders.— J. Waterway Port Coast. and Ocean Div.— Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1978, v. 104, № 2, p. 147–161.
4. Massel S. R. Interaction of water waves with cylinder barrier.— J. Waterways. Harbors and Coast. Eng. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1976, v. 102, № 2, p. 165–187.
5. Spring B. H., Monkmeyer P. L. Interaction of plane waves with vertical cylinders.— Int. Coastal Eng. Conf. 14-th Proc. Copenhagen, 1974, v. 3, N. Y., Publ. by ASCE, 1975, p. 1828–1847.
6. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978 307 с.
7. Йвамов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 583 с.
8. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики, Л.: Судостроение, 1972. 348 с.

Киев

Поступила в редакцию
4.V.1982

УДК 532.593.5

ОБ ОТРАЖЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ДОННЫМ УСТУПОМ

ВИТЮК В. Ф.

Проблеме распространения волн в бассейне с вертикальным уступом дна посвящено много работ. Одними из первых в этой области являются работы [1–3]. Библиографию работ можно найти, например, в [4, 5]. В этих работах в мелководной зоне бассейна используется теория длинных волн, а в глубоководной — либо теория длинных волн, либо теория волн малой амплитуды. В настоящей работе использована теория волн малой амплитуды как в мелководной, так и глубоководной зонах бассейна.

Изучено распространение поверхностных волн в бассейне с вертикальным уступом дна. Использован метод сопряжения решений на горизонтальной границе, являющейся продолжением дна мелководной зоны бассейна, и метод факторизации. Показано, что отражение волн зависит от длины набегающих волн и перепада глубин зон бассейна.

Пусть по свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости справа налево перемещаются волны, встречая донный уступ. В этом случае возникающее движение жидкости описывается потенциалом скорости $F(x, y, t)$, который удовлетворяет в области, занятой жидкостью, уравнению

$$\Delta F(x, y, t) = 0$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad y=1, \quad 0 < x < \infty$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad y=h, \quad -\infty < x < 0, \quad y=0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad x=0, \quad 0 < y < h$$

Функция $F(x, y, t)$ на бесконечности ограничена.

Здесь всюду введены безразмерные величины по формулам (звездочки в изложении опущены)

$$(x^*, y^*, h^*) = \frac{1}{H} (x, y, h), \quad t^* = t \sqrt{\frac{g}{H}}, \quad F^* = \frac{F}{H\sqrt{gH}}$$

где H, h — глубины жидкости справа и слева от уступа соответственно ($h < H$), t — время, g — ускорение силы тяжести.

В принятых обозначениях потенциал скорости набегающих волн представляется выражением

$$F^i(x, y, t) = \text{ch } C_0 y \text{ Re} \{ \exp[-i(C_0 x + \omega t)] \}$$

где C_0 — положительный корень уравнения $C_0 \text{ sh } C_0 - \omega^2 \text{ ch } C_0 = 0$, ω — безразмерная частота колебаний жидкости.