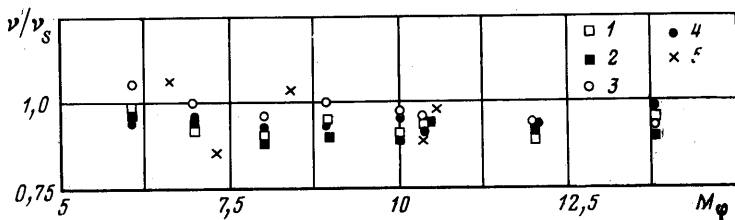


так и в ступенчатом канале, при наличии камеры Эйфеля и без нее удовлетворительно согласуются с расчетной кривой $v_s(M_\phi)$, где v_s — коэффициент восстановления полного давления в прямом скачке уплотнения при $M=M_\phi$. Можно заметить, что экспериментальные точки в большинстве случаев располагаются несколько ниже расчетной кривой. Для оценки величины расхождения на фиг. 5 представлена зависимость $v/v_s=f(M_\phi)$. Видно, что величина v/v_s практически не зависит от M_ϕ . В рассмотренном диапазоне чисел M_ϕ отклонение от расчета лежит в пределах 5%, т. е. средние экспериментальные значения коэффициента восстановления полного



Фиг. 5

давления составляет около 0,95 от расчетных величин. Эта небольшая разница обусловлена, вероятно, силами трения на стенках канала.

Из данных работы [2] следует, что правило, сформулированное в [1], удовлетворительно выполняется уже при $M_\phi \approx 3,7$ ($M_n=3$).

Приведенные данные можно рассматривать в целом как убедительное доказательство справедливости теории, изложенной в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Межиров И. И. О потерях полного давления в гиперзвуковой аэродинамической трубе. — Инж. ж., 1965, т. 5, № 2, с. 243–248.
2. Межиров И. И., Чистов Ю. И. Исследование восстановления полного давления в потоке за гиперзвуковыми соплами. — Уч. зап. ЦАГИ, 1984, т. 12, № 2, с. 110–113.
3. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976. 888 с.
4. Лыжин О. В., Межиров И. И. Об осреднении полного давления неравномерного газового потока. — Уч. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 3, с. 60–65.
5. Гродзовский Г. Л. Осреднение параметров течения при испытании элементов турбомашин. — Уч. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 3, с. 51–59.

Москва

Поступила в редакцию
6.VII.1982

УДК 532.546

О СВЯЗИ ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТОВ ТЕНЗОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ И ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОРИСТЫХ СРЕД

КРЕЧЕТОВА Т. Н., РОММ Е. С.

Зависимость фильтрационных свойств горных пород от условий их нагружения является одним из наименее изученных вопросов в общей проблеме связи физических свойств пористых систем и действующими на эти системы нагрузками. Выполненные к настоящему времени экспериментальные [1] и теоретические [2, 3] исследования касаются главным образом зависимости коэффициента проницаемости пород-коллекторов нефти и газа от испытываемого этими породами всестороннего (гидростатического) сжатия. В данной работе установлена связь между параметрами неравномерного разноосного нагружения породы и тензором ее проницаемости.

1. Рассмотрим модель пористой среды, обладающую определенными геометрическими и упругими свойствами. Будем полагать, что поровое пространство модели состоит из пустот двух типов: щелевидных каналов (трещин) и гидродинамически связанных с ними сферических полостей, радиус которых много больше раскрытия трещин. Пусть далее трещины в модели группируются в системы с параметрами, зависящими в общем случае от ориентировки системы в пространстве, которая определяется единичным вектором нормали к плоскости трещины. Системой будем называть совокупность равностоящих друг от друга трещин с одинаковыми значениями раскрытия. Если поровый объем модели заполнен жидкостью, внутри которой существует градиент давления V_p , то истинная скорость движения жидкости в трещинах

любой системы будет определяться выражением [4]

$$\mathbf{u} = -\frac{b_0^2}{12\mu} (\nabla p \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \quad (1.1)$$

где \mathbf{u} — истинная скорость, μ — вязкость жидкости, \mathbf{r} — единичный вектор, направленный вдоль проекции вектора ∇p на плоскость трещины, b_0 — раскрытие трещины при отсутствии нагрузок.

Учитывая, что $(\nabla p \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} = \nabla p - (\mathbf{nn}) \nabla p$, (1.1) запишем в виде

$$\mathbf{u} = -\frac{b_0^2}{12\mu} [I - (\mathbf{nn})] \nabla p$$

где I — единичный тензор второго ранга, (\mathbf{nn}) — векторная диада (симметричный тензор второго ранга).

Тогда выражение для дифференциала скорости фильтрации, обусловленной системами трещин, определяющие нормали которых содержатся в бесконечно малом элементе телесного угла, будет иметь вид

$$d\mathbf{v}_0 = -\frac{D(\omega)N}{48\pi\mu} [I - (\mathbf{nn})] \nabla p d\omega, \quad D(\omega) = \frac{b_0^3}{b_0 + L} \quad (1.2)$$

где N — общее число систем трещин в модели, L — расстояние между трещинами в системе. Следует подчеркнуть, что в общем случае анизотропной модели величина $D(\omega)$ также является функцией ориентировки системы в пространстве.

Используем предположение об однородном распределении напряжений в модели, т. е. будем считать, что напряжения во всех точках модели одинаковы. Предположим далее, что при воздействии нагрузок изменение порового пространства модели происходит только в результате деформации трещин. При этом их раскрытие изменяется лишь за счет нормальной к плоскости трещины составляющей напряжения, т. е. должно быть справедливым соотношение

$$b = b_0 \left(1 + \frac{b_0 + L}{b_0} \varepsilon_n \right) \quad (1.3)$$

где ε_n — нормальная к плоскости трещины составляющая деформации, b — раскрытие трещины, измененное в результате действия нагрузки.

Учитывая, что общая пористость модели в отсутствие нагрузок m_0 определяется выражением

$$m_0 = \frac{Nb_0}{(1-\alpha)(b_0 + L)}$$

где α — доля порового объема модели, обусловленного сферическими полостями, из (1.3) получим

$$b = b_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{\beta m_0} \right), \quad \beta = \frac{1-\alpha}{N} \quad (1.4)$$

Таким образом, согласно (1.2)–(1.4), выражение для дифференциала скорости фильтрации в модели, которая испытывает воздействие трех различных взаимноперпендикулярных сжимающих усилий, можно написать в виде

$$d\mathbf{v} = -\frac{ND(\omega)G(\omega)}{48\pi\mu} [I - (\mathbf{nn})] \nabla p d\omega \quad (1.5)$$

$$G(\omega) = \frac{(1 + \varepsilon_n / \beta m_0)^3}{1 + \varepsilon_n}, \quad \varepsilon_n = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i n_i^2 \quad (1.6)$$

где ε_i — главные значения тензора деформаций, n_i — направляющие косинусы единичного вектора \mathbf{n} ($i=1, 2, 3$).

Для определения суммарной скорости фильтрации, обусловленной всеми имеющимися в модели системами трещин, следует проинтегрировать формулу (1.5) по полному телесному углу

$$\mathbf{v} = -\frac{N}{24\pi\mu} \int \int D(\omega) G(\omega) [1 - n_i^2] \nabla p d\omega$$

Анализ этого выражения показывает, что проницаемость модели представляет собой симметричный тензор второго ранга, главные компоненты которого опреде-

ляются формулами

$$K_i = \frac{N}{24\pi} \iint_{\omega} D(\omega) G(\omega) (1-n_i^2) d\omega \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.7)$$

Без ограничения общности рассуждений будем полагать, что до приложения нагрузок модель была изотропной относительно проницаемости. Тогда $D(\omega) = D_0$ и формулы (1.7) можно переписать в виде

$$K_i = \frac{ND_0}{24\pi} \iint_{\omega} G(\omega) (1-n_i^2) d\omega \quad (i=1, 2, 3)$$

В ненагруженном состоянии деформации отсутствуют ($\varepsilon_n = 0$) и легко показать, что $K_1 = K_2 = K_3 = K = ND_0/18$.

Введем в рассмотрение величину относительной проницаемости модели $K_i^\circ = K_i/K$. Для компонентов тензора относительной проницаемости найдем

$$K_i^\circ = \frac{3}{4\pi} \iint_{\omega} G(\omega) (1-n_i^2) d\omega \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.8)$$

Если модель испытывает всестороннее равномерное сжатие, то $\varepsilon_n = \varepsilon/3$ (ε — объемная деформация) и

$$K_i^\circ = K = \frac{3(1+\varepsilon/3\beta m_0)^3}{3+\varepsilon} \quad (1.9)$$

что совпадает с формулой, полученной в [3].

2. Используем выведенные соотношения для исследования связи упругих и фильтрационных свойств пород-коллекторов нефти и газа. Результаты многочисленных экспериментов свидетельствуют о том, что коэффициент Пуассона горных пород почти не зависит от нагрузок, тогда как известный закон Гука в этих условиях справедлив лишь при бесконечно малых изменениях напряжений и деформаций, так как модуль Юнга горной породы является функцией испытываемого этой породой нагружения. Согласно имеющимся экспериментальным данным [1], эту функцию можно представить в следующем виде:

$$E(\sigma_i) = A(1 - e^{-B\sigma_i}) + C \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

где $E(\sigma_i)$ — модуль Юнга, σ_i — напряжение, действующее вдоль оси x_i , $A+C$ и C — максимальное и минимальное значения модуля Юнга соответственно, B — некоторая постоянная. Здесь и далее под напряжением следует понимать так называемое «эффективное напряжение» [2], равное разности внешней нагрузки и внутрипорового давления.

Будем считать, что рассматриваемая среда изотропна относительно упругих свойств, и при действии разноосного неравномерного нагружения связь между малыми изменениями деформаций и напряжений может быть выражена законом Гука в дифференциальной форме

$$d\varepsilon_i = \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} \frac{d\sigma_k}{E(\sigma_k)} \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\theta_{ik} = \begin{cases} -1 & (i=k) \\ \nu & (i \neq k), \end{cases}$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Интегрируя эти выражения с учетом (2.1), получим

$$\varepsilon_i = \frac{1}{A+C} \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} \left[\sigma_k + \frac{1}{B} \ln \frac{E(\sigma_k)}{C} \right] \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.2)$$

Как показано в [3], для не слишком больших напряжений ($\sigma_k < 100$ МПа) формулу (2.1) можно упростить

$$E(\sigma_i) = C + AB\sigma_i$$

и соотношения (2.2) принимают вид

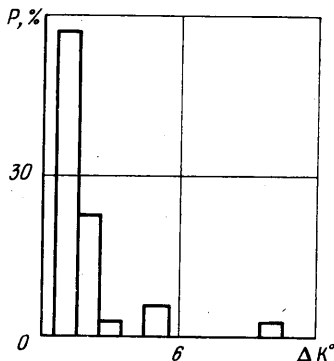
$$\varepsilon_i = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} \ln \left(1 + \frac{g}{C} \sigma_k \right), \quad g = AB \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.3)$$

В случае равномерного сжатия

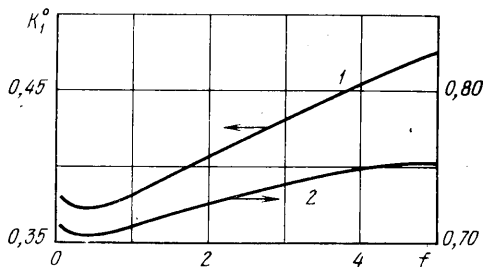
$$\varepsilon = -\frac{3(1-2\nu)}{g} \ln \left(1 + \frac{g\sigma}{C} \right) \quad (2.4)$$

Таким образом, формулы (1.6), (1.8) и (2.2)–(2.4) устанавливают вполне определенную связь между главными компонентами тензоров напряжений и проницаемости для рассматриваемой нелинейно-упругой трещинно-капиллярной модели пористой среды, соответствующей породам-коллекторам нефти и газа.

3. В работе [3] был изучен частный случай изменения основных физических свойств горных пород-коллекторов нефти и газа, находящихся под действием равномерного всестороннего сжатия. Для проверки справедливости соотношений (1.9) и (2.4) были использованы экспериментальные данные, полученные по 35 образцам песчаников с самыми различными характеристиками [1]. Сама проверка состояла в том, что для каждого образца с помощью ЭВМ подбирались такие величины упругих



Фиг. 1



Фиг. 2

постоянных C , g и структурного коэффициента β , которые минимизируют сумму квадратов разностей между вычисленными и экспериментальными значениями исследуемых параметров при всех ступенях нагружения. Затем, пользуясь найденными значениями констант, можно вычислить значения параметров для любой ступени нагружения. Распределение P погрешностей определенных таким образом значений проницаемости ΔK° , вычисленных по формулам (1.9) и (2.4) для всех 35 образцов коллекции, представлены на гистограмме (фиг. 1). Эти данные свидетельствуют о непротиворечивости рассматриваемой модели результатам экспериментов.

Воспользуемся формулами (1.6), (1.8) и (2.3) для расчета изменения осевой проницаемости цилиндрического образца в зависимости от соотношения осевого σ_1 и бокового $\sigma_2 + \sigma_3$ напряжений при условии $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = \text{const}$. Для удобства вычислений перейдем в формулах (1.6) и (1.8) к углам ϑ и φ цилиндрической системы координат. Совместив далее координатную ось x_1 с осью образца, найдем

$$K_1^\circ = \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} G(\omega) (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) \sin \vartheta d\vartheta \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \varepsilon_2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \varepsilon_3 \cos^2 \vartheta$$

Вычисления по формулам (3.1) и (2.3) были проведены для двух произвольно выбранных образцов изученной коллекции [1]. Значения ν и σ для обоих образцов были приняты одинаковыми и равными 0,1 и 40 МПа соответственно. Величины C , g и β были определены способом, описанным в [3]: для образца № 1 — $C=1977$ МПа, $g=1012$, $\beta=0,0333$; для образца № 2 — $C=1568$ МПа, $g=1033$, $\beta=0,154$. Результаты расчетов представлены на фиг. 2.

Следует подчеркнуть, что теоретически найденные величины проницаемости при $f=1$ ($f=\sigma_1/\sigma_2$) соответствуют случаю гидростатического сжатия и практически совпадают с экспериментальными данными. Графики на фиг. 2 показывают, что при изменении величины f от 1 до 5 осевая проницаемость для первого образца увеличивается на 23% и для второго на 6%, тогда как значительные увеличения боковых нагрузок ведут лишь к сравнительно небольшому (не более 3%) уменьшению осевой проницаемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баяк Е. И., Кузьминкова Г. Е., Лебедев Т. С. и др. Справочник по физическим свойствам минералов и горных пород при высоких термодинамических параметрах. М.: Недра, 1978, с. 144–172.

2. Добрынин В. М. Деформации и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа. М.: Недра, 1970, с. 120–129.
3. Кречетова Т. Н., Ромм Е. С. Об использовании нелинейно-упругой трещинно-капиллярной модели пористой среды для изучения влияния давления на физические свойства пород-коллекторов нефти и газа. — В кн.: Вопросы нелинейной геофизики. М., 1981, с. 86–97.
4. Ромм Е. С., Позиненко Б. В. О проницаемости анизотропных трещиноватых пород. — Инж. ж., 1963, т. 3, № 2, с. 381–386.

Ленинград

Поступила в редакцию
3.III.1982

УДК 532.593

ДИФРАКЦИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛН НА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННОЙ СИСТЕМЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ

БЕЛЯЕВ В. А., СЕЛЕЗОВ И. Т., ЯКОВЛЕВ В. В.

В связи с освоением нефтяных и газовых месторождений континентального шельфа в последнее время значительно повысился интерес к исследованию взаимодействия поверхностных гравитационных волн с препятствиями больших поперечных размеров, когда преобладают дифракционные эффекты и можно пренебречь эффектами вязкости. В случае системы препятствий происходит существенное усложнение волнового поля, обусловленного взаимодействием дифрагированных волн от каждого из препятствий. Эти исследования в настоящее время представлены малым числом работ [1–5]. В то же время следует отметить, что теория дифракции волн различной природы (электромагнитных, акустических, упругих) в многосвязных областях получила достаточно развитие [6–8].

В данной работе на основе линейной теории волн малой амплитуды построено решение задачи дифракции поверхностных гравитационных волн на системе произвольно расположенных вертикальных круговых цилиндров. Получены аналитические выражения для определения волновых сил и опрокидывающих моментов, действующих на каждый цилиндр системы. В качестве примера рассмотрена система препятствий, состоящая из двух рядов по три цилиндра в каждом ряду. Показано, что при определенных соотношениях между диаметром цилиндров, расстоянием между ними, углом подхода волны и ее длиной максимальные значения гидродинамических сил, действующих на цилиндры системы с учетом взаимодействия дифрагированных полей, могут быть значительно больше, чем без его учета.

1. Пусть на систему произвольно расположенных вертикальных круговых цилиндров радиуса a_s , погруженных в идеальную жидкость конечной глубины d , набегает плоские регулярные волны в направлении единичного вектора n , образующего угол α с положительным направлением оси x .

Жидкость предполагается идеальной, несжимаемой, движение — безвихревым. Потенциал скоростей $\Phi(x_s, y_s, z_s, t)$ определяется из уравнения Лапласа, при следующих граничных условиях на дне, поверхности цилиндра и свободной поверхности жидкости

$$\frac{1}{r_s} \frac{\partial}{\partial r_s} \left(r_s \frac{\partial \Phi}{\partial r_s} \right) + \frac{1}{r_s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_s^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_s^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$z_s=0: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z_s} = 0; \quad r_s=a_s: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r_s} = 0; \quad z_s=d: \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z_s} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь r_s, φ_s, z_s — полярная система координат, связанная с s -цилиндром. Потенциал скоростей представим в виде

$$\Phi = ig \frac{H \operatorname{ch} kz}{2\omega \operatorname{ch} kd} \{e^{ik(nR)} + \Phi^{(1)}\} e^{-i\omega t}; \quad \omega^2 = kg \operatorname{th} kd \quad (1.3)$$

где функция $\Phi^{(1)}$ характеризует поле рассеянных волн, R — радиус-вектор рассматриваемой точки, k — волновое число, ω — частота колебаний.

Подставляя выражение (1.3) в уравнение Лапласа (1.1), находим, что функция рассеяния $\Phi^{(1)}$ определяется из уравнения Гельмгольца со следующими условиями на бесконечности

$$\frac{1}{r_s} \frac{\partial}{\partial r_s} \left(r_s \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r_s} \right) + \frac{1}{r_s^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \varphi_s^2} + k^2 \Phi^{(1)} = 0 \quad (1.4)$$