5. *Burgdorfer A.* The influence of the molecular mean free path of the performance of hydrodynamic gas lubricated bearings.— Trans. ASME. ser. D, 1959, v. 81, № 1, p. 94—100.
6. *Mitsuya Y., Kaneko R.* Molecular mean free path effects in gas lubricated slider bearings.– Bull. JSME, 1981, v. 24, № 187, p. 236–242.
7. *Чекалов В. В.* Способ построения аппроксимирующей функции в граничных задачах динамики разреженного газа. М., 1980. 21 с. (Деп. в ВИНИТИ 7 мая 1980 г., № 1803–80. Деп.)
8. *Смирнов Л. П., Чекалов В. В.* О движении сферы к плоскости в газе с учетом разреженности прослойки. М., 1979, 16 с. (Деп. в ВИНИТИ 16 окт. 1979 г. № 3572–79 Деп.)
9. *Чекалов В. В.* Об учете разреженности газа в цилиндрическом подшипнике. М., 1979. 12 с. (Деп. в ВИНИТИ 16 мая 1979 г. № 2612–79 Деп.).
10. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
11. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
12. *Бэтчелор Д.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973, 758 с.

Переславль

Поступила в редакцию
27.IX.1982

УДК 532.517.6.011

К ВОПРОСУ О КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТОНКОМ СЛОЕ МЕЖДУ ДВУМЯ СООСНЫМИ, СОВМЕСТНО ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

ЧЕСНОКОВ В. М.

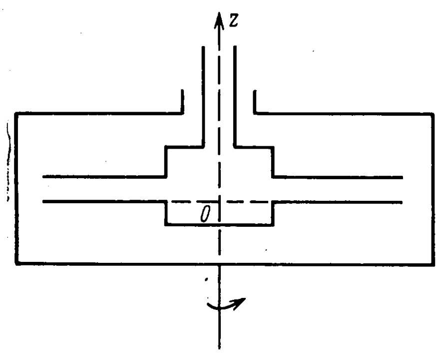
Рассмотрена задача о движении несжимаемой вязкой жидкости в щелевом пространстве между двумя соосными дисками, совместно вращающимися с постоянной угловой скоростью, в предположении, что давление изменяется с течением времени по гармоническому закону. При решении задачи были использованы уравнения нестационарного движения несжимаемой вязкой жидкости в тонком слое.

Получено, что поле скоростей в этом случае представляет наложение на стационарное поле затухающих колебаний с циклической частотой, равной удвоенной угловой скорости вращения дисков, и вынужденных колебаний с циклической частотой, равной циклической частоте колебаний поля давления.

Выяснено, что амплитуда вынужденных колебаний поля скоростей существенно зависит от отношения циклической частоты колебаний поля давления к угловой скорости вращения дисков.

Установлено, что имеется некоторое значение данного отношения, при котором амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения (явление резонанса).

Показано, что даже при крайне незначительных амплитудах колебания давления амплитуда колебания относительной скорости при резонансе может достигать величины, сравнимой со средней скоростью основного потока.



Фиг. 1

Стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости между соосными вращающимися с постоянной угловой скоростью дисками или конусами изучалось многими авторами, например [1—4]. Изучение таких течений представляет интерес в связи с разнообразными техническими приложениями, например применительно к проектированию многодисковых насосов, турбин, компрессоров, тарельчатых сепараторов.

Наряду с этим представляет также интерес изучение нестационарных течений периодического характера, возникающих в вышеупомянутых устройствах в силу неравномерности подачи жидкости, колебаний давления и т. п. Целью предлагаемого исследования является выяснение влияния малых периодических изменений давления на поле скоростей.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение жидкости между вращающимися дисками, используя схему, приведенную на фиг. 1. Эта схема приближенно моделирует одно межтарелочное пространство сепаратора для случаев центральной и периферийной подачи жидкости в межтарелочное пространство. Принимая во внимание, что в тарельчатых сепараторах $h/R \ll 1$ (фиг. 1), запишем безразмерные уравнения несжимаемости и относительного, осесимметричного, изотермического течения вязкой жидкости в тонком цилиндрическом слое

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + 2v_\varphi \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - 2v_r, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1.3}$$

$$r_1 = Rr, \qquad z_1 = \frac{h}{\lambda} z, \qquad t_1 = \frac{1}{\omega} t, \qquad v_{r1} = Vv_r$$

$$v_{\varphi 1} = Vv_\varphi, \qquad v_{z1} = \frac{Vh}{\lambda R} v_z$$

$$p_1 - \frac{\rho\omega^2 r_1^2}{2} = \frac{\rho Q_{01}\omega}{2\pi h} p, \qquad V = \frac{Q_{01}}{2\pi hR}, \qquad \lambda = h\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$$

Здесь v_r, v_φ, v_z – соответственно радиальная, окружная и осевая составляющие безразмерной относительной скорости жидкости, p – безразмерное модифицированное давление, r, z, t – безразмерные цилиндрические координаты и время, R – радиус дисков, ν – кинематический коэффициент вязкости, ω – угловая скорость вращения дисков, Q_{01} – средний за период расход жидкости, h – величина зазора между дисками, ρ – плотность жидкости, размерные переменные обозначены индексом 1.

Систему уравнений (1.1) – (1.3) будем интегрировать при следующих граничных и начальных условиях:

$$z=0, \ \lambda; \quad v_r = v_\varphi = v_z = 0 \tag{1.4}$$

$$r = r_0; \qquad p = p_0 + A\cos\gamma t, \qquad \gamma = \frac{\omega_1}{\omega} \tag{1.5}$$

$$t=0: \quad а)\ v_r = v_\varphi = 0, \quad б)\ v_r = v_r^\circ, \quad v_\varphi = v_\varphi^\circ \tag{1.6}$$

В (1.5) и (1.6) p_0 – среднее безразмерное модифицированное давление на входе жидкости в пространство между дисками, A – амплитуда колебания безразмерного давления на входе, ω_1 – циклическая частота колебаний давления, v_r° и v_φ° – соответственно радиальная и окружная составляющие безразмерной относительной скорости при стационарном течении жидкости. Кроме того, считаем заданным средний за период безразмерный расход жидкости Q_0.

2. Определение поля скоростей и давления. Из системы (1.1) — (1.3) можно показать

$$p = \Phi(r, t), \qquad v_r = \frac{f_1(z, t)}{r}, \qquad v_\varphi = \frac{f_2(z, t)}{r} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^4 f_2}{\partial z^4} - 2\frac{\partial^3 f_2}{\partial z^2\,\partial t} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} + 4f_2 = 2r\frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{2.2}$$

$$f_1(z, t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial t} \tag{2.3}$$

Поскольку левая часть (2.2) не зависит от r, а правая часть не зависит от z, то каждая из них должна быть равна одной и той же функции, зависящей от t. На этом основании получим два уравнения для определения функций $f_2(z, t)$ и $\Phi(r, t)$

$$\frac{\partial^4 f_2}{\partial z^4} - 2\frac{\partial^3 f_2}{\partial z^2\,\partial t} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} + 4f_2 = 2\psi(t) \tag{2.4}$$

$$r\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \psi(t) \tag{2.5}$$

Интегрируя (2.5) и используя (2.1) и граничное условие (1.5), найдем функцию $\psi(t)$ и давление в виде

$$\psi(t) = \frac{p_0 + A\cos\gamma t}{\ln Cr_0} \tag{2.6}$$

$$p=(p_0+A\cos\gamma t)\frac{\ln Cr}{\ln Cr_0} \tag{2.7}$$

Неоднородное уравнение (2.4) сведем к однородному при помощи подстановки

$$f_2(z,t)=g(z,t)+\frac{p_0}{2\ln Cr_0}-\frac{2A}{\ln Cr_0(\gamma^2-4)}\cos\gamma t \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial^4 g}{\partial z^4}-2\frac{\partial^3 g}{\partial z^2\,\partial t}+\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}+4g=0 \tag{2.9}$$

Ищем три независимых частных решения уравнения (2.9) в виде

$$g_1(z)=H(z),\qquad g_2(z,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)\sin\frac{k\pi}{\lambda}z,\qquad g_3(z,t)=Z(z)e^{-i\gamma t} \tag{2.10}$$

Возможность представления частного решения линейного уравнения в частных производных четвертого порядка в виде тригонометрических рядов была высказана в ряде работ, изложенных в [5].

Подставляя (2.10) в (2.9), получим для определения функций $\varphi_k(t)$, $Z(z)$ и $H(z)$ обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\varphi_k''+\frac{2k^2\pi^2}{\lambda^2}\varphi_k'+\left(4+\frac{k^4\pi^4}{\lambda^4}\right)\varphi_k=0 \tag{2.11}$$

$$Z^{(\mathrm{IV})}+2i\gamma Z''-(\gamma^2-4)Z=0 \tag{2.12}$$

$$H^{(\mathrm{IV})}+4H=0 \tag{2.13}$$

Решая уравнения (2.11) – (2.13) и подставляя сумму полученных решений в (2.8) и (2.3), получим после удовлетворения граничных условий (1.4) для функций $f_1(z,t)$ и $f_2(z,t)$ следующие выражения:

$$\begin{aligned}f_1(z,t)={}&\frac{p_0}{2\ln Cr_0}\eta_1{}^\circ(\lambda,z)+\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\lambda^2}t\right)(C_{2k}\cos 2t-C_{1k}\sin 2t)\sin\frac{k\pi}{\lambda}z+\\&+\frac{A}{2(4-\gamma^2)\ln Cr_0}\{[\pm(2+\gamma)\eta_1(\gamma,\lambda,z)+(2-\gamma)\eta_1{}^*(\gamma,\lambda,z)]\cos\gamma t-\\&-[(2+\gamma)\eta_2(\gamma,\lambda,z)-(2-\gamma)\eta_2{}^*(\gamma,\lambda,z)-2\gamma]\sin\gamma t\}\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}f_2(z,t)={}&\frac{p_0}{2\ln Cr_0}[1-\eta_2{}^\circ(\lambda,z)]+\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{\lambda^2}t\right)(C_{1k}\cos 2t+C_{2k}\sin 2t)\sin\frac{k\pi}{\lambda}z+\\&+\frac{A}{2(4-\gamma^2)\ln Cr_0}\{[4-(2+\gamma)\eta_2(\gamma,\lambda,z)-(2-\gamma)\eta_2{}^*(\gamma,\lambda,z)]\cos\gamma t+\\&+[\mp(2+\gamma)\eta_1(\gamma,\lambda,z)+(2-\gamma)\eta_1{}^*(\gamma,\lambda,z)]\sin\gamma t\}\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\eta_1{}^\circ(\lambda,z)=\frac{\sin z\,\mathrm{sh}(z-\lambda)+\mathrm{sh}\,z\sin(z-\lambda)}{\mathrm{ch}\,\lambda+\cos\lambda} \tag{2.16}$$

$$\eta_1(\gamma,\lambda,z)=\eta_1{}^\circ(\lambda_1,z_1),\qquad \eta_1{}^*(\gamma,\lambda,z)=\eta_1{}^\circ(\lambda_2,z_2) \tag{2.17}$$

$$\left.\begin{aligned}&\eta_2{}^\circ(\lambda,z)=\frac{1}{2}\frac{d^2\eta_1{}^\circ(\lambda,z)}{dz^2},\qquad \eta_2(\gamma,\lambda,z)=\frac{1}{2}\frac{d^2\eta_1(\gamma,\lambda,z)}{dz_1{}^2}\\&\eta_2{}^*(\gamma,\lambda,z)=\frac{1}{2}\frac{d^2\eta_1{}^*(\gamma,\lambda,z)}{dz_2{}^2},\qquad z_1=z\sqrt{\pm\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)}\\&z_2=z\sqrt{1+\frac{\gamma}{2}},\quad \lambda_1=\lambda\sqrt{\pm\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)},\quad \lambda_2=\lambda\sqrt{1+\frac{\gamma}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Верхний знак в формулах (2.14), (2.15), (2.18) соответствует случаю $\gamma<2$, а нижний – случаю $\gamma>2$.

Постоянные C_{1k} и C_{2k} в (2.14) и (2.15) могут быть найдены из начальных условий (1.6), а постоянная $\ln C$ – из условия постоянства среднего за период расхода жидкости при установившемся течении жидкости

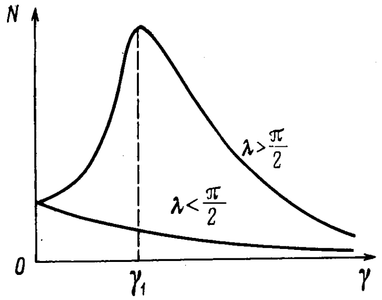
$$Q_0=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\int_0^{\lambda}2\pi v_r\,dz\,dt \qquad (2.19)$$

где $Q_0>0$, если осредненный поток направлен от оси вращения, и $Q_0<0$, если к оси вращения.

С учетом (2.1) и (2.14) из (2.19) найдем

$$\ln C=-\ln r_0-\frac{\pi p_0}{Q_0}\frac{\operatorname{sh}\lambda-\sin\lambda}{\operatorname{ch}\lambda+\cos\lambda} \qquad (2.20)$$

Первые слагаемые в (2.14) и (2.15) характеризуют стационарную часть поля скоростей (основной поток). Вторые слагаемые в (2.14) и (2.15) характеризуют собственные затухающие колебания поля скоростей с круговой частотой 2ω. Последние



Фиг. 2

слагаемые (2.14) и (2.15) характеризуют незатухающие (вынужденные) колебания поля скоростей с круговой частотой, равной ω_1.

На графике (фиг. 2) представлена качественная картина изменения коэффициента $N=E(\gamma,\ \lambda)/E(0,\ \lambda)$ ($E(\gamma,\ \lambda)$ – амплитуда колебаний средней по h радиальной компоненты безразмерной относительной скорости) при изменении величины γ и различных значениях параметра λ.

Значение $\gamma=\gamma_1$ соответствует случаю резонанса. Например, при $\lambda=7{,}5$, что характерно для процесса тонкослойного сепарирования, резонансное значение $\gamma\approx2$. В этом случае амплитуда колебаний средней по h радиальной компоненты относительной скорости достигает 35% от средней по h радиальной скорости основного потока при амплитуде колебаний давления в 1% от среднего модифицированного давления на входе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boyd K. E., Rice W.* Laminar inward flow of incompressible fluid between rotating disks, with full peripheral admission.– Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, v. 35, № 2, p. 229–237. (Рус. перев.: Бойд, Райс. Ламинарное течение между вращающимися дисками при подводе несжимаемой жидкости с периферии.– Тр. Амер. о-ва инж.-механ. Прикл. механ., 1968, т. 35, № 2, с. 22–31).
2. *Matsch L., Rice W.* An asymptotic solution for laminar flow of an incompressible fluid between rotating disks.– Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, v. 35, № 1, p. 155–159. (Рус. перев.: Матч, Райс. Асимптотическое решение для ламинарного течения несжимаемой жидкости между вращающимися дисками.– Тр. Амер. о-ва инж.-механ. Прикл. механ., 1968, т. 35, № 3, с. 300–305.)
3. *Мисюра В. И.* Ламинарное течение несжимаемой жидкости между двумя вращающимися дисками.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 5, с. 178–183.
4. *Гольдин Е. М.* Гидродинамический поток между тарелками сепаратора.– Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 7, с. 80–88.
5. *Филоненко-Бородич М. М.* Теория упругости. М.– Л.: Гостехиздат, 1947. 300 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.IV.1982