

УДК 532.517.2

**ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЯМИ
ЭКЦЕНТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ**

ДРЕКОВ В. Н., МАЗУР В. Ю., РОДИОНОВ Е. Ю.

Решение задачи о ламинарном течении жидкости в несимметричном кольцевом зазоре проводилось ранее приближенно с трудно оценимой степенью погрешности.

В данной работе приводится точное решение задачи. Получено распределение скоростей потока, определена средняя скорость, найдено точное выражение и вычислены значения коэффициента, определяющего величину расхода.

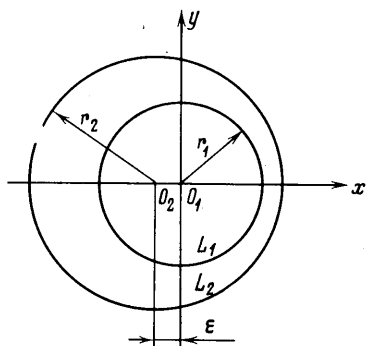
Предлагается приближенная формула для указанного коэффициента, асимптотически верная при малых эксцентриситетах. Приводится сравнение результатов расчета с экспериментальными данными.

1. Рассмотрим установившееся ламинарное течение жидкости между поверхностями двух круговых цилиндров с радиусами r_1 и r_2 . Пусть плоскость xy перпендикулярна образующим цилиндров, ось x совпадает с линией, соединяющей центры окружностей L_1 и L_2 , начало координат совпадает с центром первой окружности (фиг. 1).

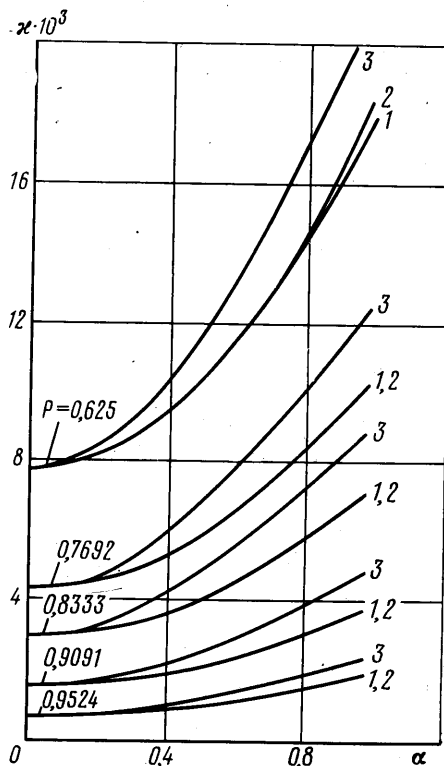
Скорость потока $u(x, y)$ определяется решением уравнения Пуассона в области D , ограниченной окружностями L_1 и L_2 , удовлетворяющим нулевым граничным условиям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho g l}{\mu}$$

$$u=0 \quad ((x, y) \in L_1 \cup L_2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь I — гидравлический уклон, μ — динамической коэффициент вязкости.

Функцию $u(x, y)$ представим в виде

$$u = \frac{\rho g I}{4\mu} [f(x, y) - (x^2 + y^2)] \quad (1.1)$$

где $f(x, y)$ определяется решением уравнения Лапласа, удовлетворяющим граничным условиям

$$f(x, y) = r_1^2 \quad ((x, y) \in L_1), \quad f(x, y) = r_2^2 - \varepsilon^2 - 2x\varepsilon \quad ((x, y) \in L_2) \quad (1.2)$$

где ε — эксцентриситет (расстояние между центрами окружностей).

Далее полагаем

$$f(x, y) = \text{Im} \{ iC_1 \ln z_1 + iC_2 - 2\varepsilon [F(z_1) + iC_3] \} \quad (1.3)$$

$$z_1 = \frac{r_1 - \beta z}{z - \beta r_1}, \quad \beta = \frac{r_2^2 - r_1^2 - \varepsilon^2 + \sqrt{(r_2^2 - r_1^2 - \varepsilon^2)^2 - 4r_1^2 \varepsilon^2}}{2r_1 \varepsilon} \quad (1.4)$$

где C_1, C_2, C_3 — вещественные постоянные.

Дробно-линейное преобразование (1.4) конформно отображает область D на круговое кольцо

$$1 \leq |z_1| \leq n, \quad n = \frac{r_2^2 + r_1^2 - \varepsilon^2 + \sqrt{(r_2^2 + r_1^2 - \varepsilon^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2}}{2r_1 r_2}$$

Задача сводится к отысканию аналитической функции $F(z_1)$ в кольце, которая удовлетворяет условиям

$$\text{Im } F = 0 \quad (|z_1| = 1)$$

$$\text{Im } F = \text{Re } z = r_1 \text{Re} \frac{1 + \beta z_1}{\beta + z_1} \quad (|z_1| = n)$$

Условия (1.2) удовлетворяются, если

$$C_1 \ln n + C_2 = r_2^2 - \varepsilon^2; \quad C_2 - 2\varepsilon C_3 = r_1^2 \quad (1.5)$$

Используя методику работы [2], с учетом (1.5) находим

$$C_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2 - \varepsilon^2 - 2\varepsilon r_1 / \beta}{\ln n}, \quad C_2 = r_1^2 + 2\varepsilon \frac{r_1}{\beta} \quad (1.6)$$

$$C_3 = \frac{r_1}{\beta}, \quad F = \frac{r_1}{\beta} (\beta^2 - 1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{n}{\beta} \right)^k \frac{\sin k \zeta}{\text{sh } k h}, \quad \zeta = -i \ln z_1, \quad h = \ln n$$

Окончательно из (1.1) с учетом (1.3) и (1.6) в полярных координатах r, φ в плоскости z имеем

$$u = \frac{\rho g I}{4\mu} \left[\frac{r_2^2 - r_1^2 - \varepsilon^2 - 2\varepsilon r_1 / \beta}{\ln n} \ln r + \frac{2\varepsilon r_1}{\beta} (\beta^2 - 1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{n}{\beta} \right)^k \frac{r^k - r^{-k}}{n^k - n^{-k}} \cos k\varphi + r_1^2 - (x^2 + y^2) \right] \quad (1.7)$$

Ряд в (1.7) сходится при любых значениях исходных параметров r_1, r_2 и ε , удовлетворяющих условиям $r_1/r_2 < 1, \varepsilon/(r_2 - r_1) < 1$.

2. Расход жидкости через живое сечение равен

$$Q = \iint_D u dx dy$$

Осуществим замену переменных, используя (1.4)

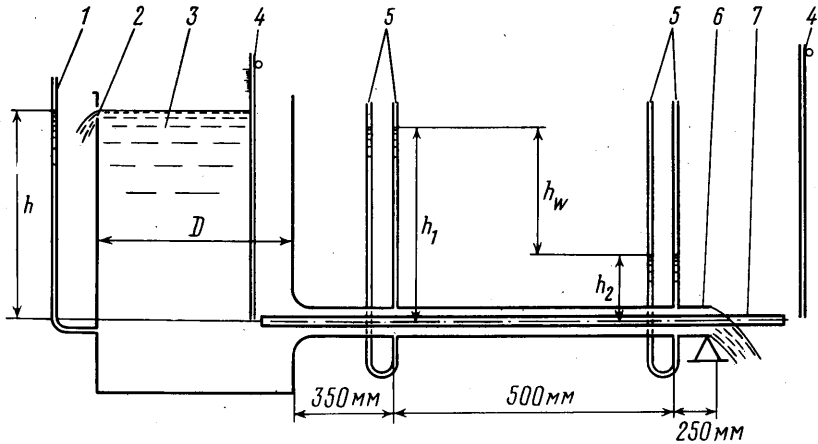
$$x = \operatorname{Re} z = \frac{\beta(1+x_1^2+y_1^2) + (1+\beta^2)x_1}{(\beta+x_1)^2+y_1^2} \cdot r_1$$

$$y = \operatorname{Im} z = \frac{(\beta^2-1)y_1}{(\beta+x_1)^2+y_1^2} \cdot r_1 \quad (2.1)$$

Имея в виду, что $\partial x/\partial x_1 = \partial y/\partial y_1$, $\partial x/\partial y_1 = -\partial y/\partial x_1$, получаем

$$Q = \iint_{D_1} u(x_1, y_1) \left[\left(\frac{\partial x}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \right)^2 \right] dx_1 dy_1$$

Здесь D_1 — круговое кольцо в плоскости z_1 .



Фиг. 3

Отсюда, используя соотношение (2.1) и переходя к полярным координатам r , φ , имеем

$$Q = r_1^2 (\beta^2 - 1)^2 \int_0^{2\pi} \int_1^n \frac{u r dr d\varphi}{(r^2 + 2\beta r \cos \varphi + \beta^2)^2}$$

Подставляя сюда выражение для $u(r, \varphi)$ (1.7) и выполняя интегрирование, получим окончательный результат

$$Q = \frac{\rho g I \pi}{4\mu} \left\{ r_1^2 (r_2^2 - r_1^2 - \varepsilon^2 - 2\varepsilon r_1/\beta) \gamma \left[n^2 \gamma - \frac{n^2 - 1}{2 \ln n} \right] - \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{2} - \varepsilon^2 r_2^2 + \frac{2\varepsilon r_1^3 \gamma^2}{\beta} [n^4 \gamma - (\beta^2 - n^2)(n^2 - 1)R] \right\} \quad (2.2)$$

$$\gamma = \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 - n^2}$$

Здесь R — сумма ряда

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kn^{2k}}{\beta^{2k}(n^{2k} - 1)} \quad (2.3)$$

Этот ряд сходится довольно быстро, так как $\beta > 1$. Оценку погрешности, допускаемой при замене ряда (2.3) его частичной суммой

$$R_m = \sum_{k=1}^m \frac{kn^{2k}}{\beta^{2k}(n^{2k} - 1)}$$

можно вести по первому отброшенному члену. Легко показать, что

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{kn^{2k}}{\beta^{2k}(n^{2k}-1)} < \frac{(m+1)n^{2(m+1)}}{\beta^{2(m+1)}(n^{2(m+1)}-1)} \frac{\beta^2}{\beta^2-1} \left(1 + \frac{1}{(m+1)(\beta^2-1)}\right)$$

$$\beta^2 \left(1 + \frac{1}{(m+1)(\beta^2-1)}\right) / (\beta^2-1)^{-1} < 5 \quad \left(m > 1; \frac{r_1}{r_2} \leq 0,95; \frac{\varepsilon}{r_2-r_1} \leq 0,97\right)$$

Таким образом, при всех практически интересных значениях отношений r_1/r_2 , $\varepsilon/(r_2-r_1)$ можно считать ошибку не превосходящей первый отброшенный член, умноженный на 5.

N	α	h_1 , см	h_2 , см	I	Q , см ² /с	$\kappa_e \cdot 10^3$	$\kappa \cdot 10^3$
1	0	23,2	12,8	0,208	56,05	6,68	6,77
2	0,167	23,1	12,7	0,208	59,25	7,06	7,05
3	0,333	23,1	12,7	0,208	67,83	8,08	7,87
4	0,500	23,0	12,8	0,204	78,28	9,51	9,26
5	0,647	22,9	12,8	0,202	93,06	11,44	11,20
6	0,833	22,9	12,9	0,200	103,97	12,89	13,68

Формулу (2.2) удобно представить в виде

$$Q = \frac{\rho g I \pi}{4\mu} \omega^2 \kappa$$

где $\omega = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ — площадь кольца, а κ — безразмерный коэффициент, зависящий от $p = r_1/r_2$, $\alpha = \varepsilon/(r_2 - r_1)$

$$\kappa(p, \alpha) = -\frac{1}{2\pi^2} - \frac{\alpha^2}{\pi^2(1+p)^2} + \frac{\alpha p^3(\beta^2-1)^2}{\pi^2\beta(1-p^2)(1+p)(\beta^2-n^2)} \times$$

$$\times \left[\frac{n^2(\beta^2-1)(\beta^2+n^2)}{(\beta^2-n^2)^2} - (n^2-1) \left(\frac{1}{2 \ln n} + 2R \right) \right] \quad (2.4)$$

$$\beta = (1+p - \alpha^2(1-p) + \sqrt{(1+p - \alpha^2(1-p))^2 - 4\alpha^2 p^2}) / 2\alpha p$$

$$n = (1+p^2 - \alpha^2(1-p)^2 + \sqrt{(1+p^2 - \alpha^2(1-p)^2) - 4p^2}) / 2p$$

При малых эксцентриситетах ($\alpha \ll 1$) из (2.4) следует асимптотическая формула

$$\kappa(p, \alpha) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1+p^2}{1-p^2} + \frac{1}{\ln p} \right) -$$

$$- \frac{\alpha^2}{\pi^2(1+p)^2} \left(\frac{2p^2}{1-p^2} + \frac{1-p^2+2(1+p^2)\ln p}{2 \ln p} \right) + O(\alpha^4) \quad (2.5)$$

Здесь первый член соответствует известному решению задачи для концентрического кольцевого зазора. Второй член, вносящий поправку на эксцентricность, имеет второй порядок малости относительно α , так что малые нарушения концентричности довольно слабо влияют на расход.

Точное выражение (2.4) для $\kappa(p, \alpha)$, асимптотическая формула (2.5) и приближенная формула В. Н. Щелкачева [1] были протабулированы на ЭВМ для ряда значений p и α . Результаты расчетов представлены на фиг. 2. Графики соответствуют: 1 — точной формуле (2.4), 2 — асимптотической формуле (2.5), 3 — формуле В. Н. Щелкачева. Оказалось, что приближенная формула (2.5) дает достаточно точные результаты не только при малых α . Наибольшая относительная погрешность в рассмотренном диапазоне значений $p=0,50-0,95$ и $\alpha=0-0,97$ составила 4%, а в подавляющем большинстве случаев, в частности при $p=0,75-0,95$, она не

превышает десятых долей процента для всех значений α . В то же время точность известной ранее формулы В. Н. Щелкачева [1] оказалась во многих случаях недостаточной (относительная ошибка составляет десятки процентов).

Более тщательный анализ показал, что формула В. Н. Щелкачева при малых значениях α расходится с формулой (2.5) уже в членах порядка α^2 , т. е. содержит ошибку уже в первой поправке на эксцентриситет, чем и объясняется ее низкая точность.

В таблице приведены результаты расчетов по асимптотической формуле (2.5) при $p=2/3$ и данные экспериментов κ_e .

Опыты проводились в диапазоне изменения чисел $Re=Q/2\pi(r_1+r_2)v=5-10$ на экспериментальной установке, схема которой приведена на фиг. 3.

Установка состоит из бака 3, к которому жестко присоединена горизонтально расположенная труба 6 радиуса $r_2=1,8$ см. Внутренняя труба 7 радиуса $r_1=1,2$ см при помощи специальных тяг 4 перемещалась на фиксированные расстояния в вертикальной плоскости. Постоянство напора во время опыта осуществлялось при помощи горизонтального щелевого отверстия 2 и контролировалось пьезометрической трубкой 1. Потери напора h_w определялись при помощи пьезометрических трубок 5. Эксперименты проводились с веретенным маслом при температуре $t=21$ С. Вязкость масла составляла $\nu=0,61$ см²/с.

Между данными расчетов и экспериментов наблюдается удовлетворительное соответствие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кульмач П. П. Гидроаэромеханика. Л.: 1972. 695 с.
2. Мазур В. Ю. Движение кругового цилиндра вблизи вертикальной стенки. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 3, с. 75–79.

Одесса

Поступила в редакцию
28.X.1982