ности, интенсивность источника количества движения P может отличаться от $\rho\varkappa M/\gamma$, например быть равной нулю. Можно предположить, что соотношения (7) приближенно выполняются в весьма широком классе задач конвекции под действием тепловыделяющей примеси в устойчиво стратифицированной среде.

Обсудим условия применимости решения (11). Для применимости приближения пограничного слоя необходимо, чтобы струя была тонкой: $R \ll z$ или $M \gg 64\gamma K^2/\varkappa$.

Если тепловыделение связано с поглощением излучения, то еще одно ограничение накладывает предположение об оптической тонкости струи, которое фактически используется, когда тепловыделение принимается пропорциональным концентрации примеси. В благоприятной ситуации (излучение падает под достаточно большим углом к оси струи) соответствующее условие применимости имеет вид

$$2\varkappa c_p\rho \int_0^\infty \mu(x)\,dx \ll I \qquad (12)$$

где c_p – теплоемкость среды, I – плотность потока падающего излучения. Из (12) следует $M \ll I^2/(c_p^2\rho^2\varkappa\gamma)$. Полученные условия не исключают друг друга, если

$$K \ll I/(8c_p\rho\gamma) \qquad (13)$$

Отметим, что все эти условия не зависят от z, а (13) – и от $\varkappa$. Пусть, например, $K=1$ м^2/с, $\gamma=5\cdot10^{-3}$ град/м, $I=600$ Дж/м^{2}с, $M=10^{-3}$ кг/с, $\varkappa=5\cdot10^3$ град м^3/кг с [1], $c_p=10^3$ Дж/кг град, $\rho=1$ кг/м^3. При этом все условия выполняются; вертикальная скорость на оси струи на высоте 300 м составит $\sim$0,4 м/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ингель Л. Х.* Динамика сухого термика, инициируемого активной примесью.– Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана, 1981, т. 17, № 2, с. 138–145.
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя, М.: Наука, 1974. 711 с.
3. *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
4. *Гутман Л. Н.* Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. Л.: Гидрометеоиздат, 1969. 295 с.

Обнинск

Поступила в редакцию
28.VII.1982

УДК 532.51.013.4

ТЕЙЛОРОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ИЗЭНТРОПИЧЕСКОГО СЛОЯ, ОГРАНИЧЕННОГО ИЗОБАРИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ

ИНОГАМОВ Н. А.

Исследуется задача об устойчивости гидростатического равновесия слоя газа, ограниченного плоскими границами в однородном поле тяжести. Аналогичная задача рассматривалась в [1]. В [1] получена только коротковолновая поправка к несжимаемому случаю, т. е. расчет проведен в приближении малых λ/L, и рассчитаны два первых члена разложения инкремента по параметру λ/L, где λ – длина волны, L – толщина слоя. В настоящей работе для случая изобарических границ инкремент тейлоровской неустойчивости найден при произвольном отношении λ/L. Расчет проведен для случая, когда слой сверху граничит не обязательно с пустотой. Исправлена допущенная в [1] ошибка при отборе решения на границе с пустотой. Доказано, что в случае изэнтропического слоя тейлоровская мода является единственной неустойчивой модой.

Рассматривается задача о малых возмущениях гидростатического равновесия плоского слоя газа. В гидростатическом равновесии вес газа компенсируется разностью давлений на нижней и верхней границах слоя. Пусть энтропия однородно распределена внутри слоя и плотность газа, внешнего по отношению к слою, пренебрежимо мала по сравнению с плотностью газа внутри слоя. Тогда допустимо считать, что граница является изобарой. В изэнтропическом случае внутренние энтропийные и вихревые моды находятся в безразличном равновесии, поэтому рассмотрим только изэнтропические, потенциальные возмущения. Изэнтропические, потенциальные движения газа в поле тяжести подчиняются уравнениям Бернулли и неразрывности, которые в переменных энтальпия – потенциал имеют вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{(\nabla\Phi)^2}{2}+H-gy=\Pi(t) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+c^2\Delta\Phi+(\nabla H\nabla\Phi)=0,\qquad c^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right). \qquad (2)$$

Здесь и далее обозначено: Φ – потенциал, $\mathbf{v}=\nabla\Phi$, H – энтальпия, ось y направлена вдоль вектора ускорения свободного падения $\mathbf{g}$, $\Pi(t)$ – произвольная функция времени, которую в дальнейшем будем опускать. В случае идеального газа имеем $H=Nc^2/2$, где $N=2/(\varkappa-1)$ – число степеней свободы молекулы газа, $\varkappa$ – показатель адиабаты (рассмотрим случай не обязательно целых значений N).

На границе газа с областью постоянного давления должны выполняться условия непроницаемости границы и непрерывности давления

$$-\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\bigg|_\eta-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\bigg|_\eta=0 \tag{3}$$

$$H|_\eta=\frac{N+2}{2}s^{N/(N+2)}p^{2/(N+2)} \tag{4}$$

где $y=\eta(x, t)$ – граница слоя, $f|_\eta=f(x, y, t)|_\eta=f(x, \eta, t)$, постоянная s является однозначной функцией от энтропии, p – давление на границе.

Рассмотрим гидростатическое равновесие. Значения переменных, относящихся к равновесию, будем помечать индексом нуль. В гидростатическом равновесии имеем: $H_0=gy$, $\Phi_0=\mathrm{const}$. Газ заполняет слой, ограниченный плоскостями $y=L_1$ и L_2, причем $L_1\geqslant 0$, $L_2>L_1$. Малые возмущения гидростатического равновесия удовлетворяют следующим линеаризованным уравнениям:

$$\gamma\varphi+h=0 \tag{5}$$

$$\gamma h+c_0^2(\varphi''-k^2\varphi)+g\varphi'=0,\qquad \varphi'=\frac{d\varphi}{dy}$$
$$\Phi=\Phi_0+\varphi(y)e^{\gamma t-ikx},\quad H=H_0+h(y)e^{\gamma t-ikx} \tag{6}$$

Исключим h из системы (5), (6)

$$y\varphi''+\frac{N}{2}\varphi'-\left(\frac{N\gamma^2}{2g}+k^2y\right)\varphi=0 \tag{7}$$

Замена $y=z/(2k)$, $\varphi=\exp(-z/2)f(z)$ приводит (7) к уравнению

$$zf''+\left(\frac{N}{2}-z\right)f'-\alpha f=0,\qquad f'=\frac{df}{dz},\qquad \alpha=\frac{N(\gamma^2+gk)}{4gk} \tag{8}$$

Нетрудно проверить, что общее решение уравнения (8) при любых значениях параметров α, N $(0<N<+\infty)$ можно представить в виде комбинации регулярного в нуле и особого в нуле линейно независимых решений

$$f=aF\left(\alpha,\frac{N}{2},z\right)+bT(\alpha,N,z) \tag{9}$$

Здесь a, b – произвольные постоянные, F и T – соответственно регулярная в нуле и особая в нуле функции. Функция F равна вырожденной гипергеометрической функции. Функция T при $N\neq 2m$, $m=1, 2,\ldots$ равна $R_1z^{1-N/2}$, где R_1 – регулярная в нуле функция, $R_1(0)=1$. При четных значениях N функция T равна $R_2z^{1-N/2}+R_3\ln z$, где R_2, R_3 – регулярные в нуле функции, разложение которых в ряд Тейлора в нуле начинается с постоянной.

Рассмотрим граничные условия на границах с областью постоянного давления. Представим возмущение границы в виде $\eta_j=L_j+\varepsilon_je^{\gamma t-ikx}$, где индекс $j=1$ на верхней границе и $j=2$ на нижней. Линеаризуем граничные условия (3), (4)

$$\gamma\varepsilon_j=\frac{d\varphi(L_j)}{dy},\qquad g\varepsilon_j-\gamma\varphi(L_j)=0 \tag{10}$$

Исключая из (10) амплитуды ε_1 и ε_2, получим

$$\gamma^2\varphi(L_j)-g\frac{d\varphi(L_j)}{dy}=0\quad (j=1, 2) \tag{11}$$

Подставляя (9) в (11), приходим к дисперсионному соотношению

$$(\alpha-\beta)\alpha(\Phi_1W_2-\Phi_2W_1)=0 \tag{12}$$

$$2\beta=N,\qquad W_j=\frac{\alpha}{\beta}T_j-\frac{dT_j}{dz},\qquad T_j=T(\alpha,N,z_j)$$

$$\Phi_j=F(\alpha+1,\beta+2,z_j),\qquad z_j=2kL_j,\qquad \alpha=\frac{\beta(\gamma^2+kg)}{2kg}$$

При выводе (12) использована формула

$$\frac{\alpha}{\beta}F_j-\frac{dF_j}{\partial z}=\frac{\alpha}{\beta^2}\frac{\alpha-\beta}{\beta+1}z\Phi_j$$

Случай, когда давление на верхней границе равно нулю, требует отдельного рассмотрения. В этом случае требуется рассмотреть граничное условие при значении $z_1=0$. В окрестности нуля, согласно (9), y-компонента скорости возмущенного течения представляет собой линейную комбинацию аналитического в нуле и особого решений. Причем особое решение при любых $N>0$ расходится в нуле. Потребуем ограниченности скорости в нуле, отбросим особое решение. Тогда возмущения потенциала внутри слоя имеют вид

$$\varphi=ae^{-ky}F(\alpha,\beta,2ky) \tag{13}$$

Отметим, что отбор решения в [1] проведен с ошибкой, а именно при $0<N<2$ отбрасывалось первое слагаемое в (9); в соответствующем исправлении нуждаются и дисперсионные соотношения, полученные в [1]. Подставим (13) в граничное условие (11) на нижней границе. В результате получаем дисперсионное соотношение: $\beta dF_2/dz-\alpha F_2=0$, $F_2=F(\alpha,\beta,z_2)$, которое преобразуем к виду

$$(\alpha-\beta)\alpha F(\alpha+1,\beta+2,z_2)=0 \tag{14}$$

Соотношение (14) можно получить предельным переходом $z_1\to0$ из соотношения (12).

Исследуем корни $\alpha=\alpha_m$ (β,z_1,z_2) характеристического уравнения (12). Первые две ветви имеют вид $\alpha_1=\beta$ и $\alpha_2\equiv0$. Соответственно

$$(\gamma^2)_1=kg,\quad (\gamma^2)_2=-kg \tag{15}$$

Из дальнейшего исследования следует, что неустойчивая мода (15) оказывается единственной неустойчивой модой. На остальных ветвях имеем $\alpha_m<0$, $m=3,4,\ldots$ Эти ветви соответствуют устойчивым гравитационно-акустическим колебаниям

$$(\gamma^2)_m=gk\left(\frac{2\alpha_m}{\beta}-1\right)<0$$

Докажем, что имеется только одна неустойчивая мода. Произведем в уравнении (8) и граничных условиях (11) замену (16), в результате чего приходим к следующей задаче:

$$f=\exp\left(\int g\,dz\right) \tag{16}$$

$$\frac{dg}{dz}=g(1-g)+\frac{\alpha-\beta g}{z},\qquad g(z_1)=g(z_2)=\frac{\alpha}{\beta} \tag{17}$$

Уравнение (17) имеет седловую особую точку с координатами, равными $(\alpha/\beta,\,0)$. Одной сепаратрисой является ось g. Другая сепаратриса дается формулой

$$g=g_s(z)=\frac{\alpha F(\alpha+1,\beta+1,z)}{\beta F(\alpha,\beta,z)}$$

В случае, когда $z_1=0$, необходимо рассмотреть граничное условие в нуле. Как было показано выше, граничное условие в нуле требует аналитичности функции f в нуле. Соответствующее условие для функции $g(z)$ состоит в том, что она должна быть сепаратрисой особой точки.

Таким образом, задача заключается в следующем. При $z_1>0$ требуется разыскать такие значения α, при которых интегральная кривая соединяет точки A_1 и A_2 с координатами $(\alpha/\beta,\,z_1)$ и $(\alpha/\beta,\,z_2)$ соответственно. При $z_1=0$ значения α должны быть такими, чтобы сепаратриса седловой особой точки проходила через точку A_2.

Имеется три характерных интервала: $\alpha<0$; $0<\alpha<\beta$ и интервал $\alpha>\beta$. При $\alpha=\beta$ и $\alpha=0$ имеются решения, удовлетворяющие поставленным граничным условиям. Решение при $\alpha=\beta$ имеет вид $g=g(z)\equiv1$; при $\alpha=0$ имеем решение $g\equiv0$.

Рассмотрим интервал $\alpha<0$. Фиксируем значения z_1 и z_2. Выпустим из точки A_1 интегральную кривую $g=G(\alpha,\beta,z_1,z)$. При возрастании z функция G монотонно убывает, причем существует конечное значение $z=z_k$, такое, что при $z\to z_k-0$ имеем $G\to-\infty$. Функция f обращается в нуль при $z=z_k$. При $z>z_k$ продолжением кривой G является интегральная кривая, для которой при $z\to z_k+0$ выполняется $g\to+\infty$. Эту интегральную кривую тоже обозначим буквой G. При малых $|\alpha|$ имеем $z_k>z_2$, поэтому кривая G проходит ниже точки A_2. Будем увеличивать $|\alpha|$. При некотором α

имеем $z_k=z_2$. При дальнейшем увеличении $|\alpha|$ найдется значение $\alpha=\alpha_3(\beta, z_1, z_2)$, такое, что кривая G соединит точки A_1 и A_2. При этом $f(z)$ имеет один нуль внутри отрезка $[z_1; z_2]$. Далее найдется следующее, большее по модулю значение $\alpha=\alpha_4(\beta, z_1, z_2)$, при котором внутри отрезка лежат уже два нуля функции $f(z)$. Продолжая этот процесс, находим спектр устойчивых гравитационно-акустических колебаний.

Рассмотрим теперь интервал $0<\alpha<\beta$. Оказывается, что при этих значениях α функция G монотонно возрастает и при $z\to+\infty$ имеем $G\to 1$. Следовательно, на этом интервале нет значений α, удовлетворяющих поставленным условиям.

Рассмотрим $\alpha>\beta$. Функция G монотонно убывает при возрастании z и при $z\to+\infty$ стремится к 1. Следовательно, кривая G при любых $\alpha>\beta$ проходит ниже точки A_2. Таким образом, доказано, что существует только одна неустойчивая мода (15).

В заключение автор выражает признательность С. И. Анисимову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Plesset M. S., Hsieh D. Y.* General analysis of the stability of superposed fluids.— Phys. Fluids, 1964, v. 7, № 8, p. 1099–1113.

Москва

Поступила в редакцию 27.VII.1982

УДК 532.516:533.6.011.8

О ГАЗОКИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ

ЧЕКАЛОВ В. В.

Основным уравнением гидродинамической теории смазки является уравнение Рейнольдса [1]. Это уравнение описывает движение капельной жидкости в зазоре между смазываемыми поверхностями.

Развитие современной техники газовой смазки выдвигает задачу создания теории газовых подшипников с ультратонкими зазорами, равными, либо меньшими средней длины свободного пробега молекул газа λ [2]. При этом число Кнудсена K может принимать произвольные значения. В частности, в устройствах высокой плотности записи информации ЭВМ зазор между записывающей головкой и носителем информации достигает долей микрометра [3]. Поверхности имеют высокую степень точности обработки. По данным работы [4], микрорельеф обработки реальной записывающей головки менее 0,01 мкм, что на порядок меньше длины свободного пробега молекул. В период запуска и остановки обычных газовых подшипников минимальный зазор также сравним с длиной свободного пробега [2].

Для описания газовой смазки с зазорами, соответствующими малым числам Кнудсена, применяют модифицированное уравнение Рейнольдса, полученное использованием граничных условий скольжения в уравнениях гидродинамики [3–6]. Экспериментальные данные показывают, что существуют условия, при которых это уравнение неприменимо. По данным работы [3], расхождение между экспериментом и теорией составляет от 20 до 40% при изменении числа Кнудсена от 0,1 до 0,173. В области умеренных и больших чисел Кнудсена полностью отсутствуют предпосылки для использования модифицированного уравнения Рейнольдса.

Представляется целесообразным использовать методы кинетической теории газов для построения теории газовых подшипников с ультратонкими зазорами. В работах [5, 7] рассмотрено представление функции, аппроксимирующей функцию распределения в моментном методе динамики разреженного газа, применительно к задачам газовой смазки. Это представление использовано в [5, 8, 9] при рассмотрении некоторых задач газовой смазки.

В настоящей работе получено уравнение газокинетической теории смазки в предположении несжимаемости газа, основывающееся на решении уравнения Больцмана моментным методом со специальной аппроксимирующей функцией. В пределе малого числа Кнудсена, рассчитанного по минимальному зазору, уравнение переходит в известное уравнение Рейнольдса. Рассмотрена задача Рейнольдса о смазочном слое газа между двумя близкими плоскостями. В пределе малого числа Кнудсена получено совпадение с известным решением гидродинамической теории. Проведено сравнение с решением, полученным гидродинамическим методом с граничными условиями скольжения при пренебрежении сжимаемостью газа.

1. Рассмотрим изотермическую задачу об относительном движении двух поверхностей со скоростями $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, пространство между которыми заполнено газом. Полагаем V_1, $V_2\ll 4g$. Здесь $4g=\sqrt{2kT/\pi m}$ – средняя тепловая скорость молекул газа, k – постоянная Больцмана, T – температура газа. Зазор между поверхностями много меньше характерного линейного размера каждой поверхности.

Введем декартову систему координат xyz. Вектор $\mathbf{V}_1$ лежит в плоскости yz. Начало координат поместим на поверхности, движущейся со скоростью $\mathbf{V}_1$. Плоскость xy совпадает с касательной плоскостью к этой поверхности. Поверхность задаем