центре масс твердого тела, на которой $|\mathbf{r}|=r$ ($\mathbf{r}$ – радиус-вектор произвольной точки).

Если предположить, что величина $r^2(v\omega_r+|\mathbf{a}\times\mathbf{r}/|\mathbf{r}||)\to 0$ при $r\to\infty$, то интеграл по поверхности S_0 обращается в нуль и

$$\frac{dW}{dt}=-2V_{\text{т}}\frac{d\Omega_{\text{т}}}{dt} \tag{6}$$

В частности, если область жидкости, в которой $\omega\neq 0$, занимает конечный объем, то условие на бесконечности автоматически выполняется, а следовательно, имеет место соотношение (6). Уравнение (6) может быть проинтегрировано по времени

$$W(t)=W(t_0)-2V_{\text{т}}[\Omega_{\text{т}}(t)-\Omega_{\text{т}}(t_0)] \tag{7}$$

Если движение жидкости и тела начинается из состояния покоя или прямолинейного равномерного движения, то

$$W(t)=-2V_{\text{т}}\Omega_{\text{т}}(t) \tag{8}$$

Полученные в настоящей работе кинематические соотношения, являющиеся результатом применения формулы К. Труселлла [1] к движению твердого тела в жидкости с заданной внешней границей, характеризуют изменение поведения вектора суммарной завихренности в жидкости и показывают, что оно определяется параметрами вращательного движения твердого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Truesdell C.* On the Total Vorticity of Motion of a Continuous Medium.– Phys. Rev., 1948, v. 73, № 5, p. 510–512.
2. *Truesdell C.* Vorticity Averages.– Canadian J. Mathem., 1951, v. III, № 1, p. 69–86.
3. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, с. 76.
4. *Poincare H.* Theorie des Tourbillons. Paris, 1893. 343 p.

Ленинград

Поступила в редакцию 27.VII.1982

УДК 532.5.013:536.25

О КОНВЕКТИВНЫХ СТРУЯХ, СВЯЗАННЫХ С ЛОКАЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ ПРИМЕСИ В УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

ИНГЕЛЬ Л. Х.

Найден класс автомодельных решений для стационарных конвективных струй (осесимметричных и плоских, ламинарных и турбулентных) в устойчиво стратифицированной среде, связанных с локальными источниками невесомой тепловыделяющей примеси. Использовано приближение пограничного слоя. Характерным для такой конвекции является «режим с нейтральной плавучестью», когда рост плавучести, связанный с тепловыделением, компенсируется ее уменьшением, связанным с подъемом в менее плотные слои среды.

Пусть в покоящейся устойчиво стратифицированной среде действует стационарный точечный или линейный (вытянутый вдоль одной из горизонтальных осей) источник невесомой тепловыделяющей примеси. Приложением такой задачи является, в частности, искусственная конвекция, стимулируемая посредством примеси (угольной пыли), поглощающей солнечное излучение (см., например, [1] и библиографию к этой работе). Тепловыделение, очевидно, приводит к существованию конвективной восходящей струи. Предполагая стационарность последней, приведем описывающую ее систему уравнений гидродинамики, переноса тепла и примеси

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{x^s}\frac{\partial}{\partial x}\left(Kx^s\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\beta\theta \tag{1}$$

$$\frac{\partial(ux^s)}{\partial x}+\frac{\partial(wx^s)}{\partial z}=0 \tag{2}$$

$$u\frac{\partial\theta}{\partial x}+w\frac{\partial\theta}{\partial z}=-\gamma w+\frac{1}{x^s}\frac{\partial}{\partial x}\left(Kx^s\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+\varkappa\mu \tag{3}$$

$$u\frac{\partial\mu}{\partial x}+w\frac{\partial\mu}{\partial z}=\frac{1}{x^s}\frac{\partial}{\partial x}\left(Kx^s\frac{\partial\mu}{\partial x}\right) \tag{4}$$

Здесь ось z направлена вертикально вверх; x – горизонтальная координата (в случае точечного источника задача осесимметрична, $s=1$, x – радиальная координата, $0\leqslant x<\infty$; в случае линейного источника $s=0$, $-\infty<x<\infty$), u, w – составляющие скорости вдоль осей x и z соответственно; θ – отклонение температуры от ее равновесного значения, μ – парциальная плотность (предполагается, что связанный с примесью источник тепла пропорционален μ) $\gamma=\text{const}>0$ – вертикальный градиент температуры среды, β – параметр плавучести; $\varkappa=\text{const}$ – параметр, характеризующий интенсивность тепловыделения. Предполагается равенство коэффициентов обмена K для тепла, примеси и количества движения. Использованы приближения Буссинеска и пограничного слоя [2–4].

Пусть источник примеси находится в точке $x=0$, $z=0$. Будем предполагать, что в этой точке одновременно может находиться и стационарный источник вертикального количества движения. Граничные условия будут [2, 4]

$$u=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial x}=0\qquad(x=0);\qquad w=\theta=\mu=0\qquad(x=\infty) \tag{5}$$

$$2\pi^s\int\limits_0^\infty \mu w x^s\,dx=M \tag{6}$$

Здесь (6) – условие сохранения потока примеси, M – интенсивность источника. Пусть интенсивность источника количества движения равна P. При специальном соотношении между M и P: $P=\rho\varkappa M/\gamma$, где ρ – плотность среды, поставленная задача сильно упрощается.

Будем искать решение в виде

$$w=\varkappa\mu/\gamma,\quad \theta=0 \tag{7}$$

Подставив (7) в систему уравнений (1)–(4), получим систему двух уравнений: (2) и

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{x^s}\frac{\partial}{\partial x}\left(Kx^s\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{8}$$

Условия (5), (6) принимают вид

$$2\frac{\gamma\pi^s}{\varkappa}\int\limits_0^\infty w^2x^s\,dx=M\qquad\text{или}\qquad 2\pi^s\int\limits_0^\infty w^2x^s\,dx=\frac{P}{\rho} \tag{9}$$

$$u=\frac{\partial w}{\partial x}=0\qquad(x=0);\qquad w=0\qquad(x=\infty) \tag{10}$$

Система (2), (8)–(10) представляет собой хорошо исследованную задачу о струе точечного (линейного) источника импульса в нейтрально стратифицированной среде [2].

Пусть, например, $K=\text{const}$, $s=1$ (осесимметричная ламинарная струя). Решение будет

$$w=\frac{24Kz}{\pi R^2}\left(1+\frac{3x^2}{\pi R^2}\right)^{-2},\qquad \mu=\frac{3M}{8\pi Kz}\left(1+\frac{3x^2}{\pi R^2}\right)^{-2} \tag{11}$$

$$u=\frac{12Kx}{\pi R^2}\,\frac{1-3x^2/\pi R^2}{(1+3x^2/\pi R^2)^2},\qquad \theta=0;\qquad R=8Kz\sqrt{\frac{\gamma}{\varkappa M}}$$

Здесь величина R имеет смысл радиуса струи. Это решение переходит в соответствующее решение [2], если устремить к нулю мощность источника примеси и стратификацию среды так, что $\varkappa M/\gamma\to\text{const}\neq0$. Аналогично можно указать решения для случаев плоской ламинарной и турбулентных струй.

Смысл этих решений представляется вполне понятным. Объем воздуха, содержащий тепловыделяющую примесь, всплывает. Скорость всплывания в найденном решении такова, что рост плавучести за счет тепловыделения в точности компенсируется уменьшением плавучести за счет подъема в менее плотные слои окружающей среды. Поэтому плавучесть всюду равна нулю и задача сводится к чисто динамической.

Решения такого типа были найдены также в задачах о подъеме, связанных с тепловыделяющей примесью термиков [1] и турбулентных струй, причем приближенные решения – для гораздо более общего класса граничных условий. В частности, интенсивность источника количества движения P может отличаться от $\rho\varkappa M/\gamma$. например быть равной нулю. Можно предположить, что соотношения (7) приближенно выполняются в весьма широком классе задач конвекции под действием тепловыделяющей примеси в устойчиво стратифицированной среде.

Обсудим условия применимости решения (11). Для применимости приближения пограничного слоя необходимо, чтобы струя была тонкой: $R \ll z$ или $M \gg 64\gamma K^2/\varkappa$.

Если тепловыделение связано с поглощением излучения, то еще одно ограничение накладывает предположение об оптической тонкости струи, которое фактически используется, когда тепловыделение принимается пропорциональным концентрации примеси. В благоприятной ситуации (излучение падает под достаточно большим углом к оси струи) соответствующее условие применимости имеет вид

$$2\varkappa c_p \rho \int_0^\infty \mu(x)\, dx \ll I \qquad (12)$$

где c_p – теплоемкость среды, I – плотность потока падающего излучения. Из (12) следует $M \ll I^2/(c_p^2 \rho^2 \varkappa \gamma)$. Полученные условия не исключают друг друга, если

$$K \ll I/(8 c_p \rho \gamma) \qquad (13)$$

Отметим, что все эти условия не зависят от z, а (13) – и от $\varkappa$. Пусть, например, $K=1$ м²/с, $\gamma=5\cdot10^{-3}$ град/м, $I=600$ Дж/м²с, $M=10^{-3}$ кг/с, $\varkappa=5\cdot10^3$ град м³/кг с [1], $c_p=10^3$ Дж/кг град, $\rho=1$ кг/м³. При этом все условия выполняются; вертикальная скорость на оси струи на высоте 300 м составит ~0,4 м/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ингель Л. Х.* Динамика сухого термика, инициируемого активной примесью.– Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана, 1981, т. 17, № 2, с. 138–145.
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя, М.: Наука, 1974. 711 с.
3. *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
4. *Гутман Л. Н.* Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. Л.: Гидрометеоиздат, 1969. 295 с.

Обнинск

Поступила в редакцию
28.VII.1982

УДК 532.51.013.4

ТЕЙЛОРОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ИЗЭНТРОПИЧЕСКОГО СЛОЯ, ОГРАНИЧЕННОГО ИЗОБАРИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ

ИНОГАМОВ Н. А.

Исследуется задача об устойчивости гидростатического равновесия слоя газа, ограниченного плоскими границами в однородном поле тяжести. Аналогичная задача рассматривалась в [1]. В [1] получена только коротковолновая поправка к несжимаемому случаю, т. е. расчет проведен в приближении малых λ/L, и рассчитаны два первых члена разложения инкремента по параметру λ/L, где λ – длина волны, L – толщина слоя. В настоящей работе для случая изобарических границ инкремент тейлоровской неустойчивости найден при произвольном отношении λ/L. Расчет проведен для случая, когда слой сверху граничит не обязательно с пустотой. Исправлена допущенная в [1] ошибка при отборе решения на границе с пустотой. Доказано, что в случае изэнтропического слоя тейлоровская мода является единственной неустойчивой модой.

Рассматривается задача о малых возмущениях гидростатического равновесия плоского слоя газа. В гидростатическом равновесии вес газа компенсируется разностью давлений на нижней и верхней границах слоя. Пусть энтропия однородно распределена внутри слоя и плотность газа, внешнего по отношению к слою, пренебрежимо мала по сравнению с плотностью газа внутри слоя. Тогда допустимо считать, что граница является изобарой. В изэнтропическом случае внутренние энтропийные и вихревые моды находятся в безразличном равновесии, поэтому рассмотрим только изэнтропические, потенциальные возмущения. Изэнтропические, потенциальные движения газа в поле тяжести подчиняются уравнениям Бернулли и неразрывности, которые в переменных энтальпия – потенциал имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} + H - gy = \Pi(t) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + c^2 \Delta \Phi + (\nabla H \nabla \Phi) = 0, \qquad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right). \qquad (2)$$