МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1984

УДК 532.5.011

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ВЕКТОРА СУММАРНОЙ ЗАВИХРЕННОСТИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ В НЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ПРИ ДВИЖЕНИИ ЕЕ ВНУТРИ ТВЕРДОГО СОСУДА

БАСИН М. А.

Для движения произвольной сплошной среды с непрерывно дифференцируемыми кинематическими параметрами имеет место соотношение [1–3]

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \omega\, dV=\oint\limits_S [v(\omega n)-(\mathbf{a}\times\mathbf{n})]dS \tag{1}$$

Здесь V – жидкий объем, движущийся вместе со сплошной средой; S – граница объема; v – скорость движения точки сплошной среды; $\omega=\nabla\times v$ – вектор завихренности в заданной точке; a – ускорение движения точки сплошной среды; n – вектор единичной внешней нормали к поверхности S.

Используем формулу (1) для анализа изменения суммарного вектора завихренности жидкости, ограниченной жидкой поверхностью S_0, при движении в ней абсолютно твердого тела, имеющего неизменный объем $V_т$. При этом сама жидкость занимает объем $V=V_0-V_т$, где V_0 – объем, ограниченный поверхностью S_0. Применим соотношение (1) к объему V, имеющему границу S, состоящему из совокупности поверхностей S_0 и $S_т$ – поверхности, отделяющей жидкость от твердого тела, и к объему твердого тела. Предполагая, что на поверхности твердого тела во все время движения выполняется условие прилипания, т. е. непрерывности скорости и, следовательно, a и ω_n, и считая тело сплошным и абсолютно жестким, получим

$$\frac{dW}{dt}=\frac{d}{dt}\int\limits_V \omega\, dV=-2V_т\frac{d\Omega_т}{dt}+\oint\limits_{S_0}[v(\omega n)-\mathbf{a}\times\mathbf{n}]dS \tag{2}$$

где W – вектор суммарной завихренности [4], $\Omega_т=\omega/2$ – угловая скорость вращения тела.

Так как величины $\mathbf{a}$ и ω_n на поверхности S_0 однозначно определяются распределением скоростей по этой поверхности, то изменение во времени вектора суммарной завихренности в жидком объеме при движении внутри него твердого тела определяется объемом тела и его угловым ускорением, а также формой внешней границы объема жидкости и распределением скоростей вдоль нее.

Внося те или иные допущения о характере движения жидкости на границе S_0, получим несколько частных соотношений для изменения вектора суммарной завихренности жидкости в объеме V. Если тело движется внутри жидкости, заполняющей твердый сосуд, который в свою очередь движется в пространстве с угловым ускорением $d\Omega_0/dt$, то имеем

$$\frac{dW}{dt}=2\left[V_0\frac{d\Omega_0}{dt}-V_т\frac{d\Omega_т}{dt}\right] \tag{3}$$

Проинтегрируем (3) по времени:

$$W(t)=\mathbf{W}(t_0)-2[V_0\Omega_0(t_0)-V_т\Omega_т(t_0)]+2[V_0\Omega_0(t)-V_т\Omega_т(t)] \tag{4}$$

Если движение начинается из состояния покоя, то формула (4) принимает вид

$$W=2[V_0\Omega_0-V_т\Omega_т] \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что суммарная завихренность определяется только вращением тела или сосуда.

Предположим, что жидкость, в которой движется твердое тело, частично имеет неподвижные границы, а остальная ее часть имеет бесконечную протяженность. Тогда поверхность S_0 может быть представлена в виде совокупности твердых границ и части поверхности сферы радиуса r, стремящегося к бесконечности, с центром в центре масс твердого тела, на которой $|\mathbf{r}|=r$ ($\mathbf{r}$ – радиус-вектор произвольной точки).

Если предположить, что величина $r^2(v\omega_r+|\mathbf{a}\times\mathbf{r}/|\mathbf{r}||)\to 0$ при $r\to\infty$, то интеграл по поверхности S_0 обращается в нуль и

$$\frac{dW}{dt} = -2V_{\text{т}}\frac{d\Omega_{\text{т}}}{dt} \tag{6}$$

В частности, если область жидкости, в которой $\omega\neq 0$, занимает конечный объем, то условие на бесконечности автоматически выполняется, а следовательно, имеет место соотношение (6). Уравнение (6) может быть проинтегрировано по времени

$$W(t)=W(t_0)-2V_{\text{т}}[\Omega_{\text{т}}(t)-\Omega_{\text{т}}(t_0)] \tag{7}$$

Если движение жидкости и тела начинается из состояния покоя или прямолинейного равномерного движения, то

$$W(t)=-2V_{\text{т}}\Omega_{\text{т}}(t) \tag{8}$$

Полученные в настоящей работе кинематические соотношения, являющиеся результатом применения формулы К. Труседелла [1] к движению твердого тела в жидкости с заданной внешней границей, характеризуют изменение поведения вектора суммарной завихренности в жидкости и показывают, что оно определяется параметрами вращательного движения твердого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Truesdell C.* On the Total Vorticity of Motion of a Continuous Medium.– Phys. Rev., 1948, v. 73, № 5, p. 510–512.
2. *Truesdell C.* Vorticity Averages.– Canadian J. Mathem., 1951, v. III, № 1, p. 69–86.
3. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, с. 76.
4. *Poincare H.* Theorie des Tourbillons. Paris, 1893. 343 p.

Ленинград

Поступила в редакцию 27.VII.1982

УДК 532.5.013:536.25

О КОНВЕКТИВНЫХ СТРУЯХ, СВЯЗАННЫХ С ЛОКАЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕЙ ПРИМЕСИ В УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

ИНГЕЛЬ Л. Х.

Найден класс автомодельных решений для стационарных конвективных струй (осесимметричных и плоских, ламинарных и турбулентных) в устойчиво стратифицированной среде, связанных с локальными источниками невесомой тепловыделяющей примеси. Использовано приближение пограничного слоя. Характерным для такой конвекции является «режим с нейтральной плавучестью», когда рост плавучести, связанный с тепловыделением, компенсируется ее уменьшением, связанным с подъемом в менее плотные слои среды.

Пусть в покоящейся устойчиво стратифицированной среде действует стационарный точечный или линейный (вытянутый вдоль одной из горизонтальных осей) источник невесомой тепловыделяющей примеси. Приложением такой задачи является, в частности, искусственная конвекция, стимулируемая посредством примеси (угольной пыли), поглощающей солнечное излучение (см., например, [1] и библиографию к этой работе). Тепловыделение, очевидно, приводит к существованию конвективной восходящей струи. Предполагая стационарность последней, приведем описывающую ее систему уравнений гидродинамики, переноса тепла и примеси

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{x^s}\frac{\partial}{\partial x}\left(Kx^s\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\beta\theta \tag{1}$$

$$\frac{\partial(ux^s)}{\partial x}+\frac{\partial(wx^s)}{\partial z}=0 \tag{2}$$

$$u\frac{\partial\theta}{\partial x}+w\frac{\partial\theta}{\partial z}=-\gamma w+\frac{1}{x^s}\frac{\partial}{\partial x}\left(Kx^s\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+\varkappa\mu \tag{3}$$