

УДК 533.696.5+533.6.013.128

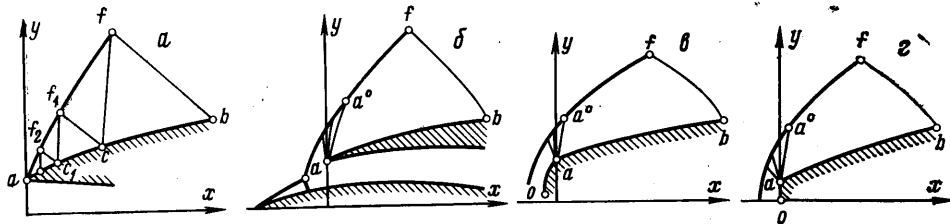
**ГОЛОВНЫЕ ЧАСТИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С ПРОТОКОМ, БЛИЗКИЕ  
К ТЕЛАМ МИНИМАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ**

**КРАЙКО А. Н., ШЕЛОМОВСКИЙ В. В.**

Рассматривается задача о построении внешней образующей («обечайки») тела вращения с протоком, которая при сверхзвуковом обтекании с присоединенной ударной волной реализует для фиксированных размеров волновое сопротивление, близкое к минимальному. Используются полные уравнения течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. Процесс построения завершается численным решением задач Коши и Гурса методом характеристик. Условия оптимальности получаются при помощи метода неопределенного контрольного контура [1], причем одно из них не удовлетворяется, что делает развитый подход приближенным. Тем не менее получающиеся при этом гладкие неоптимальные образующие дают в сравнении с прямолинейными почти такой же выигрыш (по коэффициенту волнового сопротивления до 12%), как и оптимальные контуры с изломом, построенные с помощью точного и существенно более сложного метода [2]. В то же время выигрыш по отношению к образующим, оптимальным в приближении формулы Ньютона, существенно меньше (от нескольких десятых до 1 процента). Установлено, что формула [3, 4] для сопротивления оптимальных тел с протоком, полученная в рамках линейной теории, в рассматриваемой задаче в отличие от задачи об оптимальной кормовой части дает не только количественно, но и качественно неверные результаты.

1. Пусть требуется построить обечайку  $ab$  головной части тела вращения с протоком (фиг. 1,  $a$ ), которая при заданных максимально допустимой длине  $X$ , ординатах начальной и конечной точек  $y_a$  и  $y_b$  и фиксированном равномерном сверхзвуковом набегающем потоке реализует минимум волнового сопротивления  $\chi$ . Ограничимся пока режимами обтекания с присоединенной к передней кромке ударной волной. Совместим плоскость  $x=0$  цилиндрической системы координат с плоскостью кромки. За линейный масштаб возьмем ординату точки  $b$ . Тогда  $x_a=0$ ,  $y_a=Y$ ,  $x_b \leq X$  и  $y_b=1$ , где  $Y \leq 1$ , как и  $X$ , — заданная константа. Если не оговорено особо, то индексы  $a, \dots$  приписываются параметрам в точках  $a, \dots$ .

В общем случае при точном решении сформулированной задачи искомые оптимальные образующие оказываются негладкими [1]. Более того, как правило, они должны иметь бесконечно много изломов, обтекаемых с образованием ударных волн и пучков волн разрежения. Данное обстоятельство крайне усложняет сколь угодно точное построение оптимальных контуров, хотя в некоторых случаях число изломов конечно, а иногда оптимальные образующие гладкие. Решения, отвечающие последней возможности, построены в [5, 6]. Найденные в [5, 6] контуры являются аналогом прямолинейных образующих, которые в подобных же особых ситуациях реализуются для головных частей плоских тел [1, 7, 8].



Фиг. 1

В [9, 2] сначала для профиля, а затем для тела с протоком рассчитывались оптимальные конфигурации с наибольшим изломом, обтекаемые с образованием пучка волны разрежения. В построенных примерах наибольшие изломы составляли несколько градусов, а следующие не обнаруживались из-за погрешностей вычислений. В плоской задаче оптимальные образующие с изломом были лишь на доли процента (по  $\chi$ ) лучше прямолинейных. Последнее естественно, поскольку для плоских тел прямолинейные обводы удовлетворяют почти всем (см. ниже) условиям оптимальности. Для осесимметричных тел это не так. Поэтому в сравнении с прямолинейными образующими оптимальные контуры из [2] дают заметный выигрыш. Однако, как отмечено в [1], главный вклад здесь обусловлен не влиянием излома, а выпуклостью гладких участков  $ab$ .

Сказанное выше, сложность численной реализации метода работы [2], отсутствие подобного алгоритма для обечаек с главным изломом, обтекаемым со скачком, а также соображения о влиянии вязкости, большей технологичности гладких контуров и т. п. оправдывают применение для построения гладких почти оптимальных конфигураций приближенного подхода, намеченного в [1] и реализованного ниже. Этот подход дает обечайки, которые, будучи аналогом прямолинейных образующих плоской задачи и совпадая в особых случаях [5, 6] с гладкими оптимальными контурами тел с протоком, практически не уступают оптимальным образующим с изломами. При их построении удовлетворяются не все условия оптимальности, а лишь те, которые можно выполнить без введения изломов. Малость членов, остающихся после этого в выражении для  $\delta\chi$  — вариации  $\chi$ , ведет к близости  $\chi$  построенных обечаек к соответствующим оптимальным значениям. Сравнение  $\chi$  почти оптимальных контуров и рассчитанных методом характеристик значений  $\chi$  обечаек, найденных с использованием формулы Ньютона, дает оценку качества последних.

2. Для решения обратимся к методу неопределенного контрольного контура. Взяв в плоскости  $\psi y$ , где  $\psi$  — функция тока, в качестве контрольного контура ломаную из отрезков ударной волны  $af$  и пока неизвестной кривой  $fb$ , будем иметь [4]

$$\chi = \int_a^b py \, dy = \frac{1}{k} \int_a^f \left( \frac{p_\infty}{\rho_\infty u_\infty} + u_\infty \right) d\psi + \int_f^b \left( py y' + \frac{u}{k} \right) d\psi \quad (2.1)$$

$$d\psi = ky\rho(udy - vdx) \quad (2.2)$$

Здесь  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\psi$  — функция тока,  $u$  и  $v$  —  $x$ - и  $y$ -компоненты вектора скорости,  $k$  — нормирующий множитель, штрих означает полную производную по  $\psi$  вдоль  $af$  или  $fb$ , индекс  $\infty$  присписан параметрам набегающего потока. В (2.1) при переходе от  $ab$  к  $af$  и  $fb$  использован закон сохранения потока  $x$ -компоненты количества движения и учтено, что на  $af$  в силу (2.2)  $dy = (ky\rho_\infty u_\infty)^{-1} d\psi$ .

Пусть  $\sigma$  — угол наклона скачка к оси  $x$ , а  $\Sigma = \text{ctg } \sigma$ . Тогда, согласно (2.2),  $x$  как функция  $\psi$  удовлетворяет уравнениям

$$L^\circ = x' - \Sigma(ky\rho_\infty u_\infty)^{-1} = 0, \quad (x, y) \in af \quad (2.3)$$

$$L = x' - uy'v^{-1} + (ky\rho v)^{-1} = 0, \quad (x, y) \in fb$$

Учтем их обычным образом, составив вспомогательный функционал

$$I = \chi + \int_a^f \mu^\circ L^\circ d\psi + \int_f^b \mu L d\psi$$

с неопределенными множителями Лагранжа  $\mu^\circ = \mu^\circ(\psi)$  и  $\mu = \mu(\psi)$ . Задание образующей  $ab$ , точки  $f$  на возникающей при ее обтекании ударной волне и пока произвольной кривой  $fb$  в плоскости  $\psi y$ , т. е.  $y = y(\psi)$  и  $y' = y'(\psi)$  на  $fb$  определяет форму волны, а следовательно,  $\Sigma = \Sigma(\psi)$  на  $af$  и  $x = x(\psi)$  и параметры на  $fb$ . В силу (2.3) для любого отрезка  $fb$  и ограниченных  $\mu^\circ$  и  $\mu$  вариации  $\chi$  и  $I$  совпадают. Учтя это и выполнив, согласно [1], варьирование при неизменных  $\mu^\circ(\psi)$ ,  $\mu(\psi)$ ,  $y_f$ ,  $y = y(\psi)$  на  $fb$ ,  $x_a$ ,  $y_a$  и  $y_b$ ,

получим

$$\delta\chi = (\mu^\circ - \mu)_j \delta x_{sj} + \mu_b \delta x_b - \int_a^b [\mu^\circ \delta x + \mu^\circ (k y \rho_\infty u_\infty)^{-1} \delta \Sigma] d\psi + \\ + \int_f^b (-\mu' \delta x + U \delta u + U_1 \delta v + W \delta \Sigma) d\psi \quad (2.4)$$

где  $U$ ,  $U_1$  и  $W$  — функции  $y$ ,  $y'$ ,  $\Sigma$ ,  $\mu$ ,  $\mu^\circ$  и параметров потока. Выберем  $\mu^\circ$ ,  $\mu$  и  $fb$  так, чтобы в (2.4) обратились в нули коэффициенты при  $\delta x$  на  $af$  и при  $\delta x$  и  $\delta v$  на  $fb$ . Отсюда найдем, что  $\mu^\circ$  и  $\mu$  — константы, и получим уравнение для  $fb$ . Вместе с выражением для  $\delta\chi$  оно имеет вид

$$y' = dy/d\psi = \mu (a^2 - v^2) [k y \rho a^2 (\mu u - y \rho v^3)]^{-1} \quad (2.5)$$

$$\delta\chi = (\mu^\circ - \mu) \delta x_j + \mu \delta x_b + \int_f^b (U \delta u + U_2 \delta \Sigma) d\psi \quad (2.6)$$

$$U = \mu \frac{(\mu \sqrt{M^2 - 1} - y \rho v^2) (\mu \sqrt{M^2 - 1} + y \rho v^2)}{k y \rho a (\mu u - y \rho v^3)}$$

$$k U_2 = \frac{\mu^\circ}{y_\infty \rho_\infty u_\infty} + \frac{\mu T(\varphi_\Sigma)_\infty}{y \rho v a^2} \left( \frac{\mu u - y \rho v a^2}{\mu u - y \rho v^3} - \frac{a^2}{\rho h_\rho} \right)$$

Здесь индексы у  $\mu^\circ$  и  $\mu$  опущены в силу их постоянства; параметры без индексов берутся на  $fb$ , а  $y_\infty$  и  $(\varphi_\Sigma)_\infty$  — на  $af$  при том же  $\psi$ ;  $T$  — температура;  $a$  — скорость звука;  $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ ;  $M = V/a$ ;  $h(p, \rho)$  — удельная энтальпия;  $h_\rho = (\partial h / \partial \rho)_p$ ;  $\varphi$  — удельная энтропия газа (при фиксированном набегающем потоке — функция  $\Sigma$ ) и  $\varphi_\Sigma = d\varphi/d\Sigma$ . Согласно [1],  $(\varphi_\Sigma)_\infty = v(u - u_\infty)/T$ , где величины без индекса — параметры за скачком (известные функции  $\Sigma$ ).

Условия, используемые далее для построения гладких контуров, близких к оптимальным, получим из рассмотрения коэффициентов при  $\delta u$ ,  $\delta \Sigma$  и  $\delta x_b$  в (2.6). Прежде всего, приравняв нулю  $U$  и вспомнив (2.5), найдем, что  $fb$  — отрезок  $c^-$ -характеристики, где кроме уравнений

$$y' = \frac{u - v \sqrt{M^2 - 1}}{k y \rho V^2}, \quad x' = \frac{u \sqrt{M^2 - 1} - v}{k y \rho V^2} \quad (2.7)$$

$$\left( \frac{u}{v} \right)' + \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho v^2} p' - \frac{1}{k y^2 \rho v} = 0$$

выполняющихся на всех  $c^-$ -характеристиках (первые два из них, естественно, согласуются с (2.3)), должно выполняться условие

$$-\mu = y \rho v^2 / \sqrt{M^2 - 1} \quad (2.8)$$

В точной постановке, допускающей любые изломы оптимальной образующей, равенство (2.8), справедливое почти на всей характеристике  $fb$ , есть точное условие оптимальности концевой участка  $ab$ . Если (фиг. 1,  $a$ )  $cf$  — характеристика первого семейства, то, согласно [1, 2, 9], правый внутренний излом лежит вблизи  $c$ . Отсюда и из того, что во всех реальных случаях даже наибольший излом не превышает нескольких градусов, видно, что в точной постановке (2.8) может нарушаться на  $fb$  лишь в малой окрестности точки  $f$ . В особых случаях [5, 6], когда оптимальный контур гладкий, (2.8) выполняется на всей характеристике  $fb$ .

Положив далее  $U_2 = 0$  и учтя (2.8) и приведенное выше выражение для

Ф<sub>2</sub>, придем к соотношению

$$\frac{\mu^0 y \rho v^2}{\mu(y \rho u)_\infty} + \frac{T v_s (u_s - u_\infty)}{T_s V^2} [(1 + \Omega M^2) v + u \sqrt{M^2 - 1}] = 0 \quad (2.9)$$

$$y_\infty(\psi) = \sqrt{2\psi / (k \rho_\infty u_\infty)}$$

Здесь  $\Omega = -a^2 / (\rho h_s)$ , а параметры на  $fb$ , не имеющие индексов, и за скачком (с индексом  $s$ ) берутся при одинаковых  $\psi$ . Различие формул для  $y_\infty$  из (2.9) и из [1] связано с выбором начала отсчета  $\psi$ : в [1]  $\psi = 0$  на  $ab$ , а в (2.9)  $\psi = 0$  на оси  $x$ . Преобразовав оставшиеся в выражении для  $\delta\chi$  слагаемые с помощью (2.8), (2.9) и формулы для Ф<sub>2</sub>, получим

$$\delta\chi = \Lambda_f \delta x_f - (y \rho v^2 / \sqrt{M^2 - 1})_b \delta x_b \quad (2.10)$$

$$\Lambda_f = \frac{y_f v_f}{\sqrt{M_f^2 - 1}} \left\{ \rho v + \frac{\rho_\infty u_\infty (u - u_\infty)}{V^2} [(1 + \Omega M^2) v + u \sqrt{M^2 - 1}] \right\}_f$$

где параметры с индексом  $f$  берутся справа от скачка.

Коэффициент при  $\delta x_b$ , будучи в силу (2.8) постоянным на всей замыкающей характеристике  $fb$ , обращается в нуль только для цилиндрической обечайки ( $y = y_a = y_b = Y = 1$ ) с головным скачком, выродившимся в характеристику. При  $Y \neq 1$  он отрицателен и, следовательно, минимум  $\chi$  достигается при максимально допустимой длине ( $x_b = X$ ). Данный вывод является точным.

Оставив на время слагаемое, пропорциональное  $\delta x_f$ , покажем, что полученные условия, в принципе, позволяют найти гладкий контур, соединяющий точку  $a$  с  $x_a = 0$ ,  $y_a = Y$  и точку  $b$  с  $x_b = X$ ,  $y_b = 1$ . Справедливость данного утверждения следует из описания процедуры его построения и приводимых затем примеров.

Пусть  $\alpha_\infty$  — угол Маха ( $\sin \alpha = 1/M$ ), а  $\sigma_* = \sigma_*(M_\infty)$  — угол наклона скачка, за которым  $M = 1$ . Возьмем в плоскости  $xu$  произвольную точку  $f$  с координатами  $x_f$  и  $y_f$ . За счет подбора нормирующего множителя  $k$  в согласии с (2.9) положим в ней  $\psi_f = 1$ . Выберем далее некоторое  $\sigma_f$ , такое, что  $\alpha_\infty < \sigma_f < \sigma_*$ , и, найдя по  $\sigma_f$  из известных условий на ударной волне все параметры за ней, определим по ним из равенств (2.8) и (2.9), записанных в  $f$ , константу  $\mu$  и отношение  $\mu^0/\mu$ .

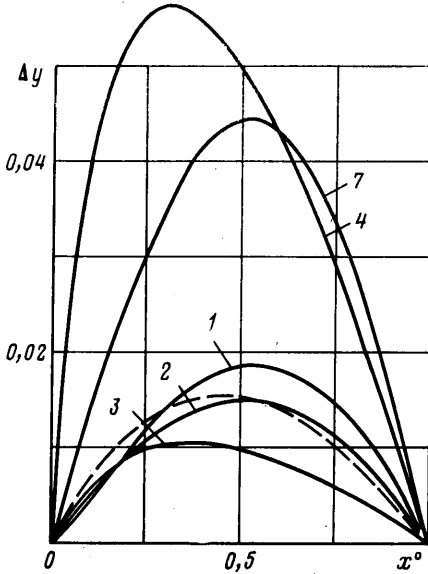
Последующее построение скачка и замыкающей характеристик в сторону уменьшения  $\psi$  ведется в процессе интегрирования (2.7) и уравнения  $L^2 = 0$  из (2.3). В последнем во избежание недоразумений  $x'$  и  $y$  следует приписать индекс  $\infty$ . При этом наряду с перечисленными дифференциальными уравнениями и условиями сохранения потоков массы, двух компонент количества движения и полной энтальпии на скачке используются конечные связи (2.8) и (2.9) с найденными ранее константами  $k$ ,  $\mu$  и  $\mu^0/\mu$ . В процессе расчета, который заведомо можно вести до  $\sigma = \sigma_*$ , при каждом  $\psi < 1$  находятся отношения  $\xi = (x - x_\infty)/y$  и  $\eta = y_\infty/y$ .

Равенство числа неизвестных числу конечных и дифференциальных уравнений, привлекаемых для решения, выполнение этих уравнений в  $f$  и отображения непрерывности доказывают разрешимость рассматриваемой задачи для некоторых  $\xi > 0$  и  $\eta < 1$  (в точке  $f$   $\xi = 0$ ,  $\eta = 1$ ). За счет двух произволов в выборе  $\sigma_f$  и  $\psi < 1$  можно, вообще говоря, добиться (при любых фиксированных  $x_f$ ,  $y_f$  и  $\psi_f = 1$ ) выполнения двух условий:  $\xi = X$  и  $\eta = Y$  при  $\sigma(\psi) < \sigma_*$ , а затем, воспользовавшись инвариантностью уравнений осесимметричного течения относительно сдвига по  $x$  и одинакового изменения масштабов по  $x$  и  $y$ , удовлетворить равенства:  $x_a = x_\infty = 0$ ,  $y_a = y_\infty = Y$ ,  $x_b = x = X$  и  $y_b = y = 1$ . Одновременно из (2.1) через интегралы по  $af$  и  $fb$  еще до построения  $ab$  находится  $\chi$ . Подчеркнем, что, как и в задачах оптимального профилирования сопел или кормовых частей [1, 6], на этом этапе в отличие от точного подхода [2] ни разу не рассчитывается течение в  $afb$ .

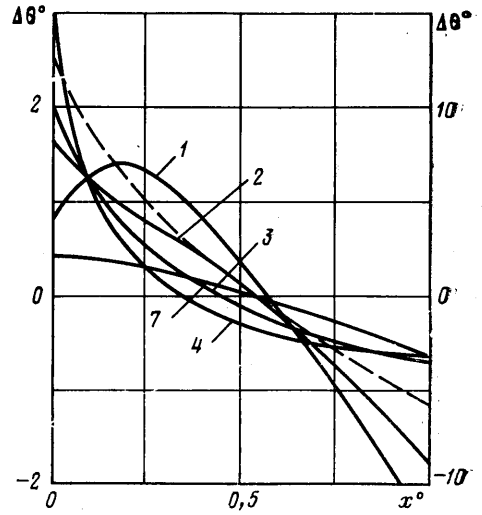
Уравнение течения интегрируются один раз после того, как найдены скачок  $af$  и замыкающая характеристика  $fb$  с заданными координатами точек  $a$  и  $b$  искомого контура. Сам контур строится в результате численного решения (например, методом характеристик) двух задач: задачи Коши в  $afc$  с данными на  $af$  и задачи Гурса в  $cfb$  с данными на  $fb$  и  $cf$ . Характеристика  $cf$  для второй задачи находится из решения первой. Если обе задачи удастся решить, т. е. нигде над линией тока  $ab$  не возникает дозвуковых зон и пересечений  $c^+$ -характеристик, «идущих к  $ab$ », то в результате получается гладкий контур, удовлетворяющий найденным выше условиям.

Как подтверждают дальнейшие примеры, описанная процедура работает в широком диапазоне параметров  $X$ ,  $Y$  и  $M_\infty$ . В то же время ясно, что если, фиксируя  $M_\infty$  и  $Y$ , уменьшать  $X$ , то найдется такое  $X=X_*(M_\infty, Y)$ , начиная с которого сверхзвуковое обтекание невозможно. В описанной последовательности действий это проявится в отсуствии решения с  $\xi=X$  и  $\eta=Y$  при  $\sigma < \sigma_*$  на  $af$ . Естественно, что для негладких оптимальных контуров минимальные  $X$ , при которых поток еще остается сверхзвуковым, будут (в силу малости реальных изломов) близки к  $X_*$ .

Для  $X$ , слегка меньших чем  $X_*$ , в качестве возможного расширения обсуждаемых решений целесообразно изучить контуры, обтекаемые также с присоединенной волной, но с дозвуковым потоком вблизи кромки. Если они существуют, причем дозвуковая зона не мешает проведению характеристики  $fb$ , то их форма



Фиг. 2



Фиг. 3

будет по-прежнему определяться равенствами (2.8) и (2.9), а  $x_b=X$ . Хотя выяснение условий реализации таких решений есть предмет специального исследования, очевидно, что при фиксированных  $Y$  и  $M_\infty$  и еще меньших  $X$  обтекание с присоединенным скачком рано или поздно станет невозможным. Не исключено, что здесь, как и в рамках закона сопротивления Ньютона [10], оптимальное тело с протоком начинается с торца  $x=0$ .

При построении оптимальных или почти оптимальных контуров, обтекаемых с отошедшим скачком, следует помнить, что здесь поток у внешней обечайки зависит от течения в протоке. Кстати, в рассматриваемой приближенной постановке нет отличного от «иглы» ( $y=0$ ) почти оптимального тела без протока, которое обтекалось бы с присоединенным скачком. Это видно из условия (2.9), первое слагаемое которого при  $Y/X > 0$  и  $Y^{-1} = y/y_\infty$ , стремящимся к бесконечности, также стремится к бесконечности, а второе конечно. Для оптимальных тел без протока тот же вывод верен и в точной постановке.

3. Так как в (2.4) и (2.10) член с  $\delta x_j$  знакоопределен, а прочие отсутствуют, то в  $\delta x_j$  остается только  $(\mu - \mu^0) \delta x_j = \Lambda_j \delta x_j$ . В силу законов сохранения на ударных волнах  $\Lambda_j$  — функция  $M_\infty$  и  $\sigma_j$ . При этом, как и всюду, для совершенного газа считается фиксированным показатель адиабаты  $\kappa$ , а для газа с произвольными термодинамическими свойствами — все термодинамические параметры набегающего потока и константы в уравнениях состояния. Как видно из (2.10), при всех  $M_\infty$  для любого газа  $\Lambda_j = 0$ , если  $\sigma_j = \alpha_\infty$ . Кроме такого «тривиального» корня уравнение  $\Lambda_j(\sigma_j, M_\infty) = 0$  обычно имеет корни с  $\sigma_j > \alpha_\infty$ . В зависимости от  $M_\infty$  для совершенного газа число корней вместе с тривиальным изменяется от одного до четырех.

[1, 5, 6]. Им и отвечают особые оптимальные решения без изломов [5, 6], причем для них  $\mu^0 = \mu$  и, следовательно, в (2.9)  $\mu^0/\mu = 1$ .

Хотя в общем случае  $\Lambda_j \neq 0$ , однако коэффициент  $\Lambda^0$  при  $\delta x_j = \delta x_j / y_b$  в формуле для отнесенной к  $\rho_\infty u_\infty^2 y_b^2$  вариации  $\chi$  почти всегда мал. Из-за малости  $\Lambda^0 = \Lambda_j / (\rho_\infty u_\infty^2 y_b^2)$  даже значительные относительные вариации  $\delta x_j$ , обусловленные варьированием контура  $ab$ , не могут заметно изменить его сопротивления. Поэтому гладкие контуры, названные «почти оптимальными», как правило, имеют  $\chi$ , лишь слегка превышающие  $\chi$  оптимальных образующих с изломом.

Подчеркнем, что, несмотря на это, они не являются оптимальными в «классе гладких контуров». Действительно, выделение такого класса требует включения в формулировку задачи дополнительного ограничения:  $r \geq \varepsilon$  на  $r$ -модуль радиуса кривизны образующей ( $\varepsilon$  — заданная константа). При любом  $\varepsilon > 0$  оптимальный контур наряду с участками двустороннего экстремума, где  $r > \varepsilon$ , в общем случае содержит участки краевого экстремума  $r = \varepsilon$ . Последние заменяют здесь изломы оптимального контура, построенного для  $\varepsilon = 0$ . Если  $\chi_\varepsilon$  — величина  $\chi$  оптимального гладкого контура с  $r \geq \varepsilon$ , то  $\chi_\varepsilon > \chi_0$ , но  $\chi_\varepsilon \rightarrow \chi_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Таким образом, с уменьшением  $\varepsilon$  рано или поздно  $\chi_\varepsilon$  станет меньше  $\chi$  соответствующего гладкого контура п. 2. Конечно, теперь преимущество оптимальной образующей над почти оптимальной будет еще менее заметным.

Таблица 1

№	$u_\infty$	X	Y	$c_{x0}$	$c_x^0$	$c_{xs}$	$c_{xN}$	$\Delta \Lambda^0 \cdot 10^4$
1	2,125	2,29	0,211	0,227	0,226	0,246	0,228	0,6
2	2,125	2,08	0,331	0,205	0,205	0,215	0,207	1,0
3	2,125	1,84	0,438	0,183	0,183	0,188	0,184	1,3
4	2,125	1,74	0,482	0,172	0,172	0,176	0,173	1,4
5	2,125	1,62	0,525	0,162	0,162	0,164	0,162	1,5
6	2,125	0,88	0,560	0,349	0,349	0,357	0,350	6,8
7	2,2	2,05	0,227	0,251	0,251	0,275	0,252	1,2
8	2,2	1,83	0,364	0,222	0,222	0,232	0,223	2,0
9	2,2	1,58	0,478	0,193	0,193	0,198	0,194	2,6
10	2,3	1,80	0,256	0,277	0,278	0,306	0,280	2,8
11	2,3	1,71	0,321	0,262	0,269	0,281	0,272	3,5
12	2,3	1,60	0,380	0,245	0,248	0,259	0,250	4,2
13	2,4	1,61	0,283	0,296	0,300	0,330	0,302	5,8
14	2,4	1,24	0,355	0,369	0,379	0,409	0,381	11

Вариация  $\delta x_j$  связана с вариациями самого контура весьма сложным образом через изменение формы скачка и замыкающей характеристики, которые в свою очередь определяются через вариации  $ab$  течением в  $afb$ . «Общий метод множителей Лагранжа [1] дает выражение для  $\delta \chi$  гладких контуров п. 2 через вариации  $ab$ . Поступая, как в [1], в рамках этого метода, найдем, что в выражении для  $\delta \chi$  для указанных контуров при  $\delta x_b = 0$  остаются только вариации абсцисс точек  $s_k$ , расположение которых поясняет фиг. 1, а ( $c_0 = c$ ;  $f_0 = f$ ;  $c_0 f_1, \dots$  и  $c_1 f_1, \dots$  — отрезки  $c^-$  и  $c^+$ -характеристик), т. е.

$$\delta \chi (\rho_\infty u_\infty^2 y_b^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_k \delta x_{s_k} \quad (3.1)$$

где  $\lambda_j$  пропорциональны  $\Lambda_{fj}$  из (2.10).

Согласно (3.1), из-за малости  $\Lambda_{fj}$  варьирование  $ab$  в каждой следующей точке  $s_k$  вносит в  $\delta \chi$  вклад, примерно в  $\Lambda_{fk}$  раз меньший, чем варьирование в  $s_{k-1}$ . Отсюда и из малости всех  $\Lambda_{fk}$  следует близость по  $\chi$  оптимального и почти оптимального контуров, а также практическое отсутствие у оптимальных контуров изломов в точках, отличных от  $s$ .

4. В рамках развитого подхода с использованием метода характеристик проводились расчеты большого числа почти оптимальных контуров и сопоставления с контурами, построенными другими способами. Обтекание последних находилось из решения так называемой прямой задачи. Контроль точности включал счет с разным

числом точек, проверку интегральных законов сохранения массы и  $x$ -компоненты количества движения для замкнутого контура  $afba$  и сравнение с данными [6] для гладких оптимальных образующих. В соответствии с этим погрешность определения коэффициента волнового сопротивления

$$c_x = \frac{4\chi - 2\rho_\infty(yb^2 - ya^2)}{\rho_\infty u_\infty^2 yb^2} \quad (4.1)$$

лежит в пределах 0,1%.

Результаты сравнения с негладкими оптимальными контурами из [2] собраны в табл. 1, где  $u_\infty$  отнесена к критической скорости (везде далее  $\kappa=1,4$ );  $c_{x0}$ ,  $c_x^\circ$  и  $c_{xs}$  — значения  $c_x$  соответственно для оптимальных образующих из [2], для гладких контуров п. 2 и для прямолинейных обечаек. Кроме того, даны  $c_x$  тел с протоком, оптимальных в приближении формулы Ньютона ( $c_{xN}$ ) и коэффициенты  $4\Lambda^\circ$  в выражении  $\delta c_x^\circ = 4\Lambda^\circ (\delta x_f / yb)$  для вариации почти оптимального контура.

Таблица 2

№	$u_\infty$	$X$	$Y$	$c_x^\circ$	$c_{xs}$	$c_{xN}$	$c_{xI}$
1	1,45	2,00	0,50	0,2122	0,2135	0,2126	0,256
2	1,70	2,00	0,50	0,1758	0,1777	0,1759	0,249
3	2,40	2,00	0,50	0,1008	0,1033	0,1013	-0,032
4	2,20	2,02	0,20	0,2684	0,2969	0,2693	-0,147
5	2,20	2,38	0,16	0,2214	0,2419	0,2234	-0,159
6	1,63	2,86	0,29	0,1829	0,1917	0,1837	0,244
7	1,42	3,42	0,34	0,1419	0,1493	0,1433	0,159

Ньютоновские контуры, согласно [1, 10], строились по формулам

$$x = x(q) = C \left( \frac{3}{4} q^4 + q^2 - \ln q \right) \Big|_{q_a}^q, \quad y = y(q) = C(1+q^2)^2/q \quad (4.2)$$

в которых  $q = dx/dy$  — параметр ( $q_a \leq q \leq q_b$ ), а константа  $C$  и значения  $q_a$  и  $q_b$  определялись условиями:  $x(q_b) = x$ ,  $y(q_a) = Y$  и  $y(q_b) = 1$ . Формулы (4.2) справедливы, пока  $q_a \geq 1$ . В противном случае ньютоновский контур содержит торец [1, 10].

Для всех построенных контуров  $c_x$  вычислялось также по формуле, полученной для оптимальных тел с протоком в линейном приближении в [3, 4]

$$c_{xI} = \frac{4(1-Y^2)^2}{[X + (1+Y)\beta]^2 - 4\beta^2} \quad (\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}) \quad (4.3)$$

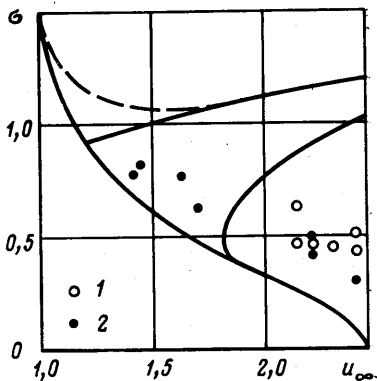
Заметим, что в [1] аналогичная формула для кормовой части записана неверно. Во всех примерах табл. 1 вычисленные по (4.3)  $c_{xI}$  оказались отрицательными. Это объясняется тем, что в [3, 4] головной скачок заменяется невозмущенной характеристикой, которая в отличие от скачка при  $M_\infty \gg 1$  нередко располагается под образующей  $ab$ . Напомним, что для кормовых частей аналог (4.3) дает удивительно хорошие результаты для любых  $M_\infty$ . Последнее связано с тем, что в общем случае оптимальная кормовая часть состоит из участка  $ab$ , обтекаемого сверхзвуковым потоком, и торца, где  $x=X$ , а  $p=p^+ \geq 0$ . При этом  $y_b$  не задается, а определяется так называемым «условием Буземана» и даже при нулевом «донном» давлении ( $p^+=0$ ) таково, что касательная к  $ab$  составляет с осью  $x$  достаточно малые углы.

При рассмотрении табл. 1 следует иметь в виду, что в [2] при несколько отличном от (4.1) определении волнового сопротивления даны три значащие цифры, из-за чего ошибка в  $c_{x0}$  может достигать 0,3%. Кроме того, для двух контуров из [2] значения  $c_{x0}$  оказались неверными и были уточнены. Для примеров № 1–9  $\Delta c_{x0}^\circ \equiv (c_x^\circ - c_{x0})/c_{x0}$  равно нулю в пределах точности определения  $c_x^\circ$ , т. е. 0,1%, при  $\Delta c_{xs} \equiv (c_{xs} - c_x^\circ)/c_x^\circ$ , достигающих 10%. В примере № 10  $\Delta c_{x0}^\circ$  лежит в пределах точности представления  $c_{x0}$  в [2], т. е. 0,3%. Наибольшие  $\Delta c_{x0}^\circ$  наблюдаются в четырех последних примерах, которым, кстати, отвечают наибольшие  $\Lambda^\circ$ . Однако и здесь преимущество почти оптимальных контуров над прямолинейными очевидно, так как  $\Delta c_{x0}^\circ$  составляет от  $1/8$  до  $1/3$  от  $\Delta c_{xs}^\circ$ . В то же время ньютоновские образующие лишь слегка уступают почти оптимальным:  $\Delta c_{xN}^\circ \equiv (c_{xN} - c_x^\circ)/c_x^\circ \leq 0,012$ .

Отмеченные выше закономерности наблюдаются и тогда, когда  $u_\infty$ ,  $X$  и  $Y$  далеки от рассматривавшихся в [2] и, в частности, таковы, что в точной постановке оптимальный контур имеет изломы, обтекаемые с образованием скачков уплотнения (такие контуры в [2] не строились). Это подтверждает табл. 2, во всех примерах которой ньютоновские контуры, будучи заметно лучше прямолинейных, близки к почти оптимальным. Представление о форме последних дают фигуры 2 и 3, где  $x^\circ = x/X$ , цифры у кривых — номера почти оптимальных контуров из табл. 2,  $\Delta y$  и

$\Delta\theta$  — отличие ординат и углов наклона рассматриваемого и прямолинейного контуров с теми же  $X$  и  $Y$ , штрихами нанесены  $\Delta u$  и  $\Delta\theta$  ньютоновской образующей для  $X=2$  и  $Y=0,5$ . На фиг. 3 правая шкала относится к контурам № 4 и 7.

В плоскости  $(u_\infty, \sigma_f)$  построенным почти оптимальным обечайкам отвечают точки 1 (табл. 1) и 2 (табл. 2) на фиг. 4. Там же нанесена граница сверхзвуковых режимов (штриховая линия)  $\sigma_f = \sigma_*(u_\infty)$  и сплошные кривые, дающие корни уравнения  $\Lambda_f(\sigma_f, u_\infty) = 0$ , причем нижняя из них соответствует скачку, выродившемуся в характеристику ( $\sigma_f = \alpha_\infty$ ). Для  $\sigma_f$  и  $u_\infty$  со сплошных кривых почти оптимальные образующие становятся оптимальными. Во всех рассматривавшихся примерах полное решение задачи профилирования почти оптимальной обечайки для заданных  $u_\infty$ ,  $X$  и  $Y$  занимало несколько минут на ЭВМ ЕС-1033.



Фиг. 4

В заключение отметим, что развитый подход легко переносится на случаи, изображенные на фиг. 1, б и в. В первом строится обечайка воздухозаборника, обтекаемого с образованием «выбитого» скачка, во втором — участок  $ab'$  головной части тела с протоком или без протока, которое при заданном контуре  $oa$  слева от  $a$  обтекается с отошедшей ударной волной. Если  $aa^\circ$  —  $c^+$ -характеристика, то (2.9) используется при построении только участка  $a^\circ f$  головного скачка. Получающиеся во втором случае почти оптимальные контуры  $ab$  могут стыковаться с  $oa$  гладко, так и с образованием излома. Реализация той или иной возможности связана с дополнительными деталями постановки задачи. Так, если положение точки  $a$  определяется условием минимума сопротивления всей образующей  $oab$ , то при отсутствии ограничений на ее кривизну излом будет получаться даже при допущении свободного перемещения  $a$  по  $oa$ . Сказанное поясняет фигура 1, г, на которой искомая конфигурация включает начальный торец, размер которого заранее неизвестен. В частных случаях, отвечающих сплошным кривым фиг. 4, почти оптимальные образующие  $ab$  в задачах, изображенных на фиг. 1, в и г, совпадают с гладкими оптимальными контурами, рассмотренными в [11, 12].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
2. Шипилин А. В. Вариационные задачи газовой динамики с присоединенными ударными волнами. — В кн.: Сб. теоретических работ по гидромеханике. М.: ВЦ АН СССР, 1970, с. 54–106.
3. Никольский А. А. О телах вращения с протоком, обладающих наименьшим внешним волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке. — В кн.: Сб. теоретических работ по аэродинамике. — М.: Оборонгиз, 1957, с. 56–63.
4. Никольский А. А. Теоретические исследования по механике жидкости и газа. — Тр. ЦАГИ, 1981, вып. 2122. 285 с.
5. Шмыглевский Ю. Д. Об одном классе тел вращения с минимальным волновым сопротивлением. — ПММ, 1960, т. 24, вып. 5, с. 923–926.
6. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. М., ВЦ АН СССР, 1963. 142 с.
7. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
8. Шмыглевский Ю. Д. О сверхзвуковых профилях, имеющих минимальное сопротивление. — ПММ, 1958, т. 22, вып. 2, с. 269–273.
9. Шипилин А. В. Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 4, с. 9–18.
10. Крайко А. Н. Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
11. Guderley K. G., Armitage J. V., Valentine E. M. Nose and inlet shapes of minimum drag in supersonic flow. — IAS Pap., 1962, p. 116. 20 p.
12. Борисов В. М. Об оптимальной форме тел в сверхзвуковом потоке. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 4, с. 788–793.

Москва

Поступила в редакцию  
9.XII.1982