МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1984

УДК 533.6.011

О РОЛИ СЛОЯ КНУДСЕНА В ЗАДАЧЕ ОБ ИСПАРЕНИИ КАПЛИ

АСМОЛОВ Е. С., КОГАН М. Н.

Исследована роль слоя Кнудсена в задаче о слабом нестационарном испарении сферической капли в собственный пар. Показано, что использование классической формулы Герца – Кнудсена может приводить к существенным ошибкам, в частности при определении времени релаксации температуры капли к состоянию, соответствующему стационарному испарению.

Если испарение капли определяется поступлением тепла из газовой фазы, то испарение будет слабым, т. е. скорость испарения u пропорциональна тепловому потоку $q=-\lambda(\partial T/\partial r)=O(\varepsilon)$, где $\varepsilon\ll 1$ — число Кнудсена. Слабое нестационарное испарение сферической капли в собственный пар описывается уравнениями (изменением радиуса капли пренебрегаем)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho u r^2)}{\partial r}=0,\qquad u_w\sim h_w^{-1/2}O(\varepsilon),\qquad h_w=\frac{m}{2kT_w},\qquad r\geqslant r_w$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+O(\varepsilon^2),\qquad p=\rho RT,\qquad R=\frac{k}{m}\tag{1}$$

$$\frac{3}{2}\rho R\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2q)}{\partial r}-\frac{p}{r^2}\frac{\partial(r^2u)}{\partial r}+O(\varepsilon^2)$$

$$c'\rho'\frac{\partial T'}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda' r^2\frac{\partial T'}{\partial r}\right),\qquad r\leqslant r_w\tag{2}$$

Здесь величины без штрихов относятся к пару, со штрихами — к конденсированной фазе, индекс w — к поверхности капли, остальные обозначения стандартны.

Уравнения (1)–(2) должны быть дополнены начальными и граничными условиями. На бесконечности заданы p_∞, T_∞ и $u_\infty=0$. Условия на поверхности капли в общем случае представляют собой условие неразрывности потока энергии и зависимость скорости испарения от температуры поверхности, плотности пара и теплового потока из газа, а также условие для температуры пара над поверхностью. Первое из этих условий можно записать в виде (для простоты влиянием поверхностного натяжения на испарение пренебрегаем)

$$\left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right)_w+n_wu_wQ=\left(-\lambda'\frac{\partial T'}{\partial r}\right)_w\tag{3}$$

Здесь Q — теплота испарения, отнесенная к одной молекуле.

Выражения для скорости испарения и температуры пара над поверхностью получаются из следующих соображений. Вблизи поверхности раздела фаз всегда имеется слой пара толщиной порядка длины свободного пробега (слой Кнудсена), в котором уравнения газовой динамики не справедливы. Для установления связи между параметрами газа T_w и n_w «на поверхности» для газодинамической области и температурой поверхности T_w' необходимо решить уравнение Больцмана в кнудсеновском слое. Решение модельного кинетического уравнения, например, дает для скорости испарения $n_w u_w$ и скачка температуры $(T_w-T_w')/T_w'$ выражения [1]

$$n_w u_w=\frac{a}{1-0{,}535a}\left[\frac{n_{ew}-n_w}{2\sqrt{\pi}}h_w^{-1/2}-0{,}154\left(\frac{\lambda}{k}\frac{\partial \ln T}{\partial r}\right)_w\right] \tag{4}$$

$$(T_w-T_w')/T_w'=-0{,}44u_w h_w^{1/2}+\left(\frac{\lambda}{p}\frac{\partial T}{\partial r}\right)_w h_w^{1/2}$$

Здесь n_{ew} — плотность насыщенного пара при температуре T_w', a — коэффициент испарения.

В литературе часто используется также классическая формула Герца — Кнудсена [2, 3]

$$n_w u_w=\frac{a(n_{ew}-n_w)}{2\sqrt{\pi}}h_w^{-1/2},\qquad T_w=T_w' \tag{5}$$

и ее модификация [4]

$$n_w u_w=\frac{a}{1-0{,}5a}\,\frac{n_{ew}-n_w}{2\sqrt{\pi}}h_w^{-1/2},\qquad T_w=T_w' \tag{6}$$

Выражения (5) и (6) не имеют строгого обоснования. Первое из них получено в предположении, что падающие на поверхность молекулы имеют равновесное максвелловское распределение при температуре поверхности, второе — в предположении, что это максвелловское распределение соответствует газу, движущемуся со скоростью u_w (поправка на стефановский поток). Отметим, что с учетом $u_w \sim h_w^{-1/2}O(\varepsilon)$ из условия (4) (или (5), (6)) имеем $n_w-n_{ew}=O(\varepsilon)$ и $T_w-T_w'=O(\varepsilon)$ и, следовательно, $p_{ew}(T_w')-p_w=O(\varepsilon)$.

При стационарном испарении $T'(t,r)=\mathrm{const}$ и количество испаряющегося вещества определяется только теплом, поступающим из газа. Уравнения (1) — (3) для такой задачи принимают вид

$$4\pi\rho_0 u_0 r^2=M_0=\mathrm{const},\qquad p_0=p_\infty+O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{3}{2}\rho_0 R u_0\frac{dT_0}{dr}=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\lambda_0\frac{dT_0}{dr}\right)-\frac{p_0}{r^2}\frac{d(r^2u_0)}{dr} \tag{7}$$

$$(-\lambda_0 dT_0/dr)_w+n_{w0}u_{w0}Q=0,\qquad T_0'=T_{w0}'=\mathrm{const}$$

Здесь индекс ноль соответствует стационарному испарению.

Из сделанных выше оценок с учетом $p_w=p_\infty+O(\varepsilon^2)$ следует, что $T_{w0}=T^*+\delta_0$, $\delta_0=O(\varepsilon)$ и $T_{w0}'=T^*+\delta_0'$, $\delta_0'=O(\varepsilon)$, где температура T^* определяется соотношением $p_e(T^*)=p_\infty$. Таким образом, для нахождения расхода M_0 в главном приближении (с ошибкой $O(\varepsilon)$) достаточно решить систему (7), полагая $T_w=T^*$.

Поправки δ_0' и δ_0 могут быть найдены из условий (3) и (4) (или (5), (6))

$$\delta_0'=\alpha'\frac{M_0 h_w^{1/2}T^*}{4\pi r_w^2\rho_e(T^*)},\qquad \delta_0=\alpha\frac{M_0 h_w^{1/2}T^*}{4\pi r_w^2\rho_e(T^*)} \tag{8}$$

Входящие в выражения (8) параметры α' и α для граничных условий, записанных в форме (4), (5) или (6), будут соответственно равны

$$\alpha'=\left(\frac{1-0{,}535}{a}2\sqrt{\pi}+0{,}44\right)\frac{kT^*}{Q}-1+0{,}154\cdot 2\sqrt{\pi},\qquad \alpha=\alpha'-0{,}44+\frac{Q}{kT^*}$$

$$\alpha'=\alpha=2\sqrt{\pi}\,a^{-1},\qquad \alpha'=\alpha=2\sqrt{\pi}(1-0{,}5a)a^{-1}$$

При выводе соотношений (8) использовалась формула Клаузиуса —

Клапейрона [5]

$$dp_{ew}/dT_w'=Qn_e(T_w')/T_w'$$

в правой части которой отброшен малый член порядка отношения плотностей пара и конденсированной фазы.

Таким образом, в задаче о стационарном испарении конкретный вид выражений для скорости испарения и скачка температуры не имеет значения для нахождения решения в главном приближении и сказывается только на членах порядка $O(\varepsilon)$.

Иная ситуация возникает при рассмотрении нестационарного испарения. Из-за большой проводимости конденсированной фазы по сравнению с газом, поток тепла в ней может стать соизмеримым или даже бо́льшим потока тепла в газовой фазе. Если принять $\lambda/\lambda'=O(\varepsilon)$, то использование вместо (4) граничных условий [6, 7]

$$T_w(t)=T_w'(t)=T^* \tag{9}$$

может привести к существенным ошибкам.

В самом деле, пусть найдено решение задачи нестационарного испарения $n(r, T)$, $u(r, T)$, $T(r, t)$ и $T'(r, t)$ с граничными условиями (9). Тогда, подставляя полученное решение в (4), можно найти поправки к температуре поверхности капли и потоку тепла в ней

$$\Delta T_w'\sim T_w'u_wh_w^{1/2},\quad \Delta(\lambda'\partial T'/\partial r)_w\sim\lambda'T_w'u_wh_w^{1/2}r_w^{-1}$$

Затем из (3) найдем поправку к скорости испарения $\Delta u_w\sim\lambda'u_wh_w^{1/2}\times$ $\times(r_wn_wQ)^{-1}T_w'$. С учетом $\lambda\simeq klnh_w^{-1/2}$, где l — длина свободного пробега, $\Delta u_w\sim u_w\varepsilon(\lambda'/\lambda)(kT_w'/Q)\sim u_w$, т. е. ошибка, с которой определяются параметры задачи при использовании (9), всегда того же порядка, что и сами эти величины.

Строгое обоснование (9) может иметь только в другом предельном случае $\lambda'/\lambda=O(1)$, хотя и при таком соотношении проводимостей пара и конденсированной фазы использование (9) приводит к тому, что в начальный момент времени потоки тепла на поверхности и скорость испарения бесконечны. Это означает, что в начальный момент времени испарение нельзя считать слабым, т. е. скачок температур в слое Кнудсена имеет конечную величину. Кроме того, не выполняется гипотеза гомобаричности $p=p(t)$ и в уравнении импульса необходимо учитывать инерционный член.

Таким образом, в задачах нестационарного испарения при $\lambda/\lambda'=O(\varepsilon)$ необходимо совместно решить задачи движения пара и теплопередачи в капле с граничными условиями (4). Использование граничных условий в виде (5) или (6) может привести к неправильному результату. Для иллюстрации сказанного рассмотрим задачу о релаксации малого возмущения температуры капли к стационарному состоянию, считая, что в начальный момент времени распределение параметров в газе соответствует стационарному случаю, а температура капли отличается от T_0'. Будем рассматривать достаточно малые возмущения температуры T' так, что не только поле температур, но и поле скоростей оказывается слабо возмущенным

$$T'=T_0'(1+\tau'),\quad T=T_0(1+\tau),\quad u=u_0(1+\xi)$$

$$n=n_0(1+\nu),\quad q=q_0+\Delta q,\quad \tau,\nu,\xi\ll1$$

$$\tau',\tau_w,\nu_w\ll\varepsilon,\quad \tau_\infty=0,\quad \nu_\infty=0$$

$$t=0:\quad \tau=\nu=\xi=0,\quad \tau'\neq0$$

Чтобы получить решение уравнений (1)—(4) в обозримом виде, рассмотрим случай большой теплопроводности капли, так что ее температуру можно считать зависящей лишь от t. В этом случае поток тепла из капли определяется выражением $(-r_w c'\rho' T_0'/3)\partial\tau'/\partial t$. Сравнивая это выражение с конвективным потоком тепла $n_{0w}u_{0w}\xi_w Q$, можно оценить характерное время t^* задачи о релаксации температуры капли

$$t^* \sim \frac{c'\rho' T_0' r_w}{n_{0w}u_{0w}Q}\frac{\tau'}{\xi_w} \sim \frac{1}{\beta} h_w^{1/2} r_w, \quad \beta = \frac{kn_{0w}}{c'\rho'}\frac{Q}{kT_0'} \ll 1$$

Малость параметра β объясняется малым отношением плотностей газовой и конденсированной фаз. Будем тем не менее считать, что $\beta \gg \varepsilon$ (выполнение этого условия всегда можно обеспечить при не слишком низких температурах T_0', так как обычно $n_{0w} \sim \exp(-Q/kT_0')$).

Знание характерного времени задачи t^* позволяет оценить порядки величин в системе уравнений (1), переписав ее в виде

$$\frac{\partial\nu}{\partial t} + u_0 \frac{\partial(\xi+\nu)}{\partial r} = 0, \quad u_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{p_0}{\rho_0}\frac{\partial(\nu+\tau)}{\partial r} \tag{10}$$

$$\frac{3}{2}\rho_0 R\left(T_0 \frac{\partial\tau}{\partial t} + u_0\xi\frac{\partial T_0}{\partial r} + \nu u_0 \frac{\partial T_0}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \tau u_0 \frac{\partial T_0}{\partial r} + u_0 T_0 \frac{\partial \tau}{\partial r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \Delta q) -$$

$$-\frac{p_0}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_0 \xi) - \frac{p_0(\nu+\tau)}{r^2}\frac{\partial(r^2 u_0)}{\partial r}$$

Из первого уравнения системы (10) следует оценка

$$\nu \sim \varepsilon t^* h_w^{-1/2} r_w^{-1}\xi \sim \varepsilon\beta^{-1}\xi \ll \xi \tag{11}$$

Члены в левой и правой частях второго уравнения с учетом (11) имеют порядок соответственно $\varepsilon\beta h_w^{-1} r_w^{-1}\xi$ и $\varepsilon\beta^{-1}h_w^{-1}r_w^{-1}\xi$. Таким образом, членом в левой части можно пренебречь и уравнение сводится к равенству $\nu+\tau = O(\varepsilon\beta)$.

Первый член в правой части уравнения энергии содержит высшую производную по пространственной координате, и поэтому, несмотря на малость τ по сравнению с ξ, не может быть отброшен при любых r, так как в этом случае нельзя было бы удовлетворить граничным условиям (3), (4). Это означает, что у поверхности капли будет существовать тонкий слой с характерным масштабом $r_\tau \ll r_w$, где член с потоком тепла сравним с остальными членами в уравнении энергии

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Delta q) \sim \lambda_0 T_0 \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2} \sim n_0 k \varepsilon h_w^{-1/2} r_w T_0 \frac{\tau}{r_\tau^2} \sim \rho_0 R u_0 \xi \frac{\partial T_0}{\partial r} \sim$$

$$\sim \rho_0 R h_w^{-1/2} \varepsilon \xi \frac{T_0}{r_w}$$

С учетом оценки (11) имеем $r_\tau \sim (\varepsilon/\beta)^{1/2} r_w \ll r_w$. Соответственно возмущенное значение потока тепла в газе имеет порядок $\Delta q_w \sim \lambda_0 T_0 \tau r_\tau^{-1} \sim$ $\sim (\varepsilon/\beta)^{1/2} q_0 \xi \ll q_0 \xi$.

Граничные условия (3) и (4) (или (5), (6)) можно переписать в виде (члены с Δq_w из-за их малости отброшены)

$$n_{0w}u_{0w}\xi_w Q = -(c'\rho' r_w/3) T_0' \partial\tau'/\partial t \tag{12}$$

$$n_{0w}u_{0w}\xi_w = \frac{a}{(1-0{,}535a)2\sqrt{\pi}}\left(\tau' T_0' \frac{dn_{ew}}{dT_0'} - n_{0w}\nu_w\right) h_w^{-1/2} \tag{13}$$

$$\tau_w - \tau' = -0{,}44 u_{0w} h_w^{1/2} \xi_w$$

$$n_{0w}u_{0w}\xi_w=\frac{a}{2\sqrt{\pi}}\left(\tau'T_0'\frac{dn_{ew}}{dT_0'}-n_{0w}\nu_w\right)h_w^{-1/2},\quad \tau_w=\tau' \tag{14}$$

$$n_{0w}u_{0w}\xi_w=\frac{a}{2\sqrt{\pi}(1-0{,}5a)}\left(\tau'T_0'\frac{dn_{ew}}{dT_0'}-n_{0w}\nu_w\right)h_w^{-1/2},\quad \tau_w=\tau' \tag{15}$$

Исключая переменные ξ_w, ν_w, τ_w с учетом $\nu_w+\tau_w=0$, получим для τ' уравнение

$$\frac{\partial\tau'}{\partial t}+\gamma\frac{dp_{ew}}{dT_0'}h_w^{-1/2}\frac{Q}{c'\rho'r_wkT_0'}\tau'=0 \tag{16}$$

Параметр γ в уравнении (16) для граничных условий, записанных в виде (13), (14) или (15), будет соответственно равен

$$\gamma=3a[2\sqrt{\pi}(1-0{,}535a)+0{,}44a]^{-1}$$

$$\gamma=3a(2\sqrt{\pi})^{-1},\qquad \gamma=3a[(1-0{,}5a)2\sqrt{\pi}]^{-1}$$

Решением уравнения (16) будет, очевидно

$$\tau'=\tau'(t=0)\exp(-t/t^*)$$

$$t^*=\frac{c'\rho'r_wkT_0'h_w^{1/2}}{\gamma Q}\left(\frac{dp_{ew}}{dT_0'}\right)^{-1}=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{kT_0'}{Q}\right)^2\frac{c'}{R}\frac{\rho'}{\rho_{0w}}h_w^{1/2}r_w \tag{17}$$

Найденное время релаксации температуры капли зависит от величины параметра γ, который для рассмотренных случаев при $a=1$ будет иметь значения соответственно 1,437; 0,846; 1,693. Также различной будет величина изменения скорости испарения капли, отнесенная к возмущению ее температуры, ξ_w/τ'. С учетом соотношений (12) и (17) нетрудно получить $\xi_w/\tau'=\gamma(3u_{0w}h_w^{1/2})^{-1}Q/kT_0'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Макашев Н. К.* Испарение, конденсация и гетерогенные химические реакции при малых значениях числа Кнудсена.– Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 3, с. 49–62.
2. *Кнаке С., Странский И. Н.* Механизм испарения.– Усп. физ. н., 1959, т. 68, № 2, с. 261–305.
3. *Хирс Д., Паунд Г.* Испарение и конденсация. М.: Металлургия, 1966. 196 с.
4. *Кучеров Р. Я., Рикенглаз Л. Э.* О гидродинамических граничных условиях при испарении и конденсации.– ЖЭТФ, 1953, т. 37, № 7.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 584 с.
6. *Нигматулин Р. И., Рахматулина И. Х.* Нестационарный тепломассообмен около сферической частицы.– ПМТФ, 1977, № 4, с. 95–102.
7. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.X.1982