

УДК 532.72

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС К РЕАГИРУЮЩЕЙ ЧАСТИЦЕ В ПОТОКЕ ГАЗА В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

ПОЛЯНИН А. Д., РЯЗАНЦЕВ Ю. С.

Исследуется совместный тепломассоперенос к реагирующей частице любой формы, обтекаемой поступательным (и сдвиговым) потоком вязкого теплопроводного сжимаемого газа, коэффициенты теплопроводности и диффузии, а также удельная теплоемкость газа которого зависят от температуры. Для средних чисел Шервуда и Нуссельта получены первые два члена соответствующего асимптотического разложения по малому числу Рейнольдса. Подробно рассмотрен случай степенного закона изменения вязкости газа от температуры.

В работах [1-10] рассматривались линейные задачи о массо- и теплообмене частиц в поступательном [1-7] и сдвиговом [8-10] потоках несжимаемой жидкости при малых числах Пекле. Аналогичные нелинейные задачи в случае произвольной кинетики поверхностной химической реакции исследовались в [11-14]. В работе [15] рассматривалась нелинейная задача о совместном тепломассопереносе к сферической частице в потоке газа в случае степенного закона изменения вязкости от температуры. В [16] анализировался массо- и теплообмен капли или твердой частицы любой формы в поступательном и сдвиговом потоках несжимаемой жидкости в случае, когда коэффициент теплопроводности (диффузии) зависит от температуры (концентрации).

1. Постановка задачи. Рассмотрим стационарный тепломассообмен частицы (капли) с потоком вязкого теплопроводного сжимаемого газа. Считается, что относительная концентрация C_* и температура T_* вдали от частицы принимают постоянные значения C_∞ и T_∞ соответственно, а на поверхности частицы протекает в диффузионном режиме химическая реакция, сопровождающаяся тепловыделением с теплотой реакции H . Пренебрегая эффектами термо- и бародиффузии и опуская члены порядка квадрата числа Маха, запишем в безразмерных переменных соответствующую краевую задачу в виде

$$\text{Pe}_T c_p \rho (\mathbf{v} \cdot \text{grad } T) = \text{div} (\lambda \text{ grad } T) \quad (1.1)$$

$$\text{Pe}_c \rho (\mathbf{v} \cdot \text{grad } z) = \text{div} (\sigma \text{ grad } z) \quad (1.2)$$

$$r \rightarrow \infty, T \rightarrow 0, z \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

$$r = r_*(\theta, \varphi), \quad z = 1, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \gamma \sigma \frac{\partial z}{\partial n} \quad (1.4)$$

$$T = \frac{T_\infty - T_*}{T_\infty}, \quad z = \frac{C_\infty - C_*}{C_\infty}, \quad \rho = \frac{\rho_*}{\rho_\infty}, \quad \gamma = H \frac{\rho_\infty D_\infty C_\infty}{\lambda_*(T_\infty) T_\infty}$$

$$c_p = c_p(T) = \frac{c_{p*}(T_*)}{c_{p*}(T_\infty)}, \quad \lambda = \lambda(T) = \frac{\lambda_*(T_*)}{\lambda_*(T_\infty)}, \quad \sigma = \sigma(T) = \frac{\rho_* D_*}{\rho_\infty D_\infty}$$

$$\text{Pe}_T = \text{Re}_\infty \text{Pr}_\infty, \quad \text{Pe}_c = \text{Re}_\infty \text{Sc}_\infty \quad (\lambda(0) = \sigma(0) = 1)$$

$$\text{Re} = a U \rho_* \mu_*^{-1}, \quad \text{Pr} = \mu_* c_{p*} \lambda_*^{-1}, \quad \text{Sc} = \mu_* (\rho_* D_*)^{-1}$$

Здесь λ_* и D_* — коэффициенты теплопроводности и диффузии; c_{p*} , ρ_* ,

μ_* — удельная изобарная теплоемкость, плотность и вязкость газа; a и U — характерные размер частицы (для сферы — радиус) и скорость потока (для поступательного потока — скорость газа на бесконечности U_∞); $r = r_s(\theta, \varphi)$ — уравнение поверхности частицы S , записанное в сферической системе координат $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$, связанной с частицей (далее для удобства аргументы θ и φ у функции $r_s(\theta, \varphi)$ будут опускаться; $\partial/\partial n$ — производная по нормали к поверхности частицы S ; Pe_t и Pe_σ — тепловое и диффузионное числа Пекле; Re , Pr , Sc — числа Рейнольдса, Прандтля, Шмидта; индексы снизу $*$ и ∞ соответствуют значениям параметров в потоке газа и на бесконечности. При записи уравнений и граничных условий (1.1) — (1.2) предполагалось, что параметры c_{p*} , λ_* , $\rho_* D_*$, μ_* и число Шмидта Sc известным образом зависят от температуры T_* , а величины ν , ρ , T определяются путем решения полной задачи обтекания частицы вязким теплопроводным сжимаемым газом.

Цель работы состоит в определении средних чисел Нуссельта и Шервуда.

$$Nu(\lambda, Re_\infty) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} dS, \quad Sh(\sigma, Re_\infty) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(T) \frac{\partial z}{\partial n} dS \quad (1.5)$$

которые являются основными характеристиками интенсивности процесса тепломассопереноса к реагирующей частице.

Следует отметить, что формулировка задачи (1.1) — (1.4) соответствует случаю нетеплопроводной частицы; случай теплопроводной частицы описан в конце п. 5.

Для дальнейшего понадобится уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.6)$$

условие равенства нулю нормальной составляющей скорости газа на поверхности частицы ($\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности частицы S)

$$r = r_s, \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (1.7)$$

а также знание поведения вектора скорости $\mathbf{v}$ на бесконечности, которое для однородного поступательного потока определяется условием

$$r \rightarrow \infty, \quad v_i \rightarrow \delta_{ij} (U = U_\infty) \quad (1.8)$$

а для сдвигового имеет вид

$$r \rightarrow \infty, \quad v_i \rightarrow G_{ij} x_j \quad (1.9)$$

$$(G_{ij} = G_{ij}^* G^{-1}, \quad G = \max_{i,j} |G_{ij}^*|, \quad U = aG)$$

Здесь по повторяющимся индексам $i, j = 1, 2, 3$ ведется суммирование, v_i — компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$ в декартовой (x_i) системе координат, связанной с частицей, δ_{ij} — символ Кронекера, G_{ij} — безразмерные элементы матрицы коэффициентов сдвига ($G_{ii} = 0$).

Решение задачи (1.1) — (1.4) ищем методом сращиваемых асимптотических разложений по малому числу Рейнольдса

$$Re_\infty \rightarrow 0, \quad Pr = O(1), \quad Sc = O(1) \quad (1.10)$$

При этом оказывается, что для получения первых двух членов асимптотического разложения средних чисел Нуссельта и Шервуда (1.5) по параметру Re_∞ вполне достаточно информации о поле скоростей газа, содержащейся в (1.6) — (1.9) (см. также [2, 5, 9, 15, 16]).

Обычно предполагается [15, 17], что газ имеет постоянную теплоемкость и постоянные числа Прандтля $Pr = Pr_\infty$ и Шмидта $Sc = Sc_\infty$, и считается, что вязкость газа известным образом зависит от температуры. Эти предположения соответствуют следующим значениям параметров, входя-

щих в уравнения (1.1)–(1.4):

$$\lambda = \sigma = \mu = \mu(T), \quad c_p = 1 \quad (\mu(T) = \mu_*(T_*)/\mu_*(T_\infty)) \quad (1.11)$$

Далее при исследовании задачи (1.1)–(1.4) будет анализироваться наиболее общий случай, когда параметры λ , σ , c_p являются произвольными функциями безразмерной температуры T .

2. Метод решения задачи. Нулевые члены внутреннего разложения. Для удобства анализа аналогично [16] вместо температуры T введем новую вспомогательную функцию

$$\Phi = \Phi(T) = \int_0^T \lambda(\xi) d\xi \quad (\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = 1) \quad (2.1)$$

При этом исходная краевая задача (1.1)–(1.4) с учетом тождеств

$$c_p \rho (\mathbf{v} \cdot \text{grad } T) = \text{div}(\rho \mathbf{v} h) - h \text{div}(\rho \mathbf{v}), \quad h(T) = \int_0^T c_p(\xi) d\xi$$

$$\rho (\mathbf{v} \cdot \text{grad } z) = \text{div}(\rho \mathbf{v} z) - z \text{div}(\rho \mathbf{v})$$

и уравнения неразрывности (1.6) примет следующий вид

$$\text{Pe}_T \text{div}(\rho \mathbf{v} h) = \Delta \Phi; \quad \text{Pe}_c \text{div}(\rho \mathbf{v} z) = \text{div}(\sigma_\Phi \text{grad } z) \quad (2.2)$$

$$r = r_s, \quad z = 1, \quad \partial \Phi / \partial n = \gamma \sigma_\Phi \partial z / \partial n; \quad r \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow 0, \quad \Phi \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

$$h = h(\Phi) = h(T(\Phi)), \quad \sigma_\Phi = \sigma(T(\Phi))$$

Здесь зависимость $T = T(\Phi)$ определяется путем обращения функции (2.1) (в линейном случае $\lambda = 1$ имеем $\Phi = T$).

Решение задачи (2.2)–(2.3) ищем методом сращиваемых асимптотических разложений по малому числу Рейнольдса (1.10). При этом вся область течения разбивается на две подобласти: внутреннюю $\Omega_1 = \{r_s \leq r \leq O(\text{Re}_\infty^{-\nu})\}$ и внешнюю $\Omega_\infty = \{O(\text{Re}_\infty^{-\nu}) \leq r\}$ (здесь и далее значение $\nu = 1$ соответствует поступательному потоку, а $\nu = 1/2$ – сдвиговому). Решение в каждой из подобластей ищется соответственно в виде внутреннего

$$\Phi = \Phi_0 + \text{Pe}_T^\nu \Phi_1 + o(\text{Re}_\infty^{-\nu}), \quad z = z_0 + \text{Pe}_c^\nu z_1 + o(\text{Re}_\infty^{-\nu}); \quad r_s \leq r \leq O(\text{Re}_\infty^{-\nu}) \quad (2.4)$$

$$\Phi_i = \Phi_i(r, \theta, \varphi), \quad z_i = z_i(r, \theta, \varphi); \quad i = 0, 1$$

и внешнего разложений

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \text{Pe}_T^\nu \Phi^{(1)} + o(\text{Re}_\infty^{-\nu}), \quad z = z^{(0)} + \text{Pe}_c^\nu z^{(1)} + o(\text{Re}_\infty^{-\nu})$$

$$O(\text{Re}_\infty^{-\nu}) \leq r \quad (2.5)$$

$$\Phi^{(0)} = z^{(0)} = 0; \quad \Phi^{(1)} = \Phi^{(1)}(\xi_T, \theta, \varphi), \quad z^{(1)} = z^{(1)}(\xi_c, \theta, \varphi); \quad \xi_T = \text{Pe}_T^\nu r, \quad \xi_c = \text{Pe}_c^\nu r$$

Здесь и далее для удобства разложение ведется непосредственно по параметрам Pe_T и Pe_c , соответствующим «сжатым» координатам ξ_T и ξ_c .

При построении асимптотического решения во внутренней области Ω_1 используются граничные условия на поверхности частицы, а во внешней области Ω_∞ – граничные условия на бесконечности; возникающие при решении неизвестные постоянные определяются путем использования процедуры сращивания (см., например, [1–16]).

Введение новой переменной (2.1) приводит к тому, что во внутренней Ω_1 и внешней Ω_∞ областях одновременно все члены внутреннего (2.4) и внешнего (2.5) асимптотических разложений (исходно нелинейной краевой задачи (1.1)–(1.4)) будут удовлетворять линейным уравнениям.

Решение краевых задач для членов внутреннего разложения (2.4) удобно выражать через решение простейшей линейной вспомогательной

задачи для уравнения Лапласа

$$\Delta u=0; \quad r=r_s, \quad u=1; \quad r \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

которое известно для частиц различной формы (см. далее п. 5). В частности, для сферической частицы имеем $u=r^{-1}$.

За счет надлежащего выбора точки отсчета радиус-вектора $\mathbf{r}$ решение задачи (2.6) при $r \rightarrow \infty$ может быть записано в виде [2]

$$u = \text{Sh}(1, 0) r^{-1} + O(r^{-3}) \quad (2.7)$$

где $\text{Sh}(1, 0)$ — среднее число Шервуда, соответствующее массопереносу к частице в неподвижной несжимаемой жидкости в случае постоянного коэффициента диффузии (это соответствует значениям $\sigma=1$, $\text{Re}_c=0$ в уравнении (1.2) или решению задачи (2.6)).

Полагая в уравнениях и граничных условиях $\text{Re}_T = \text{Re}_c = 0$, получаем краевые задачи для нулевых членов внутреннего разложения

$$\Delta \Phi_0 = 0; \quad \text{div}(\sigma_\Phi(\Phi_0) \text{grad } z_0) = 0 \quad (2.8)$$

$$r=r_s, \quad z_0=1, \quad \partial \Phi_0 / \partial n = \gamma \sigma_\Phi(\Phi_0) \partial z_0 / \partial n; \quad r \rightarrow \infty, \quad z_0 \rightarrow 0, \quad \Phi_0 \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

Решение задачи (2.8), (2.9) ищем в виде

$$\Phi_0 = A u, \quad z_0 = B f(\Phi_0) \quad (2.10)$$

где функция $f=f(\Phi)$ определена формулой

$$f(\Phi) = \int_0^\Phi \frac{d\Phi}{\sigma_\Phi(\Phi)}, \quad \sigma_\Phi(\Phi) = \sigma(T(\Phi)) \quad (2.11)$$

Выражения (2.10), (2.11) в силу гармоничности функции u (2.6) являются решениями уравнений (2.8) для любых постоянных A и B ; при этом ввиду равенства (2.7) граничные условия на бесконечности (2.9) выполняются автоматически. Постоянные A и B находятся из граничных условий на поверхности частицы (2.9) с учетом аналогичного граничного условия (2.6) для u и определяются соотношениями

$$f(A) = \gamma, \quad B = \gamma^{-1} \quad (2.12)$$

где первое равенство (2.12) представляет собой уравнение для определения параметра A .

Средние числа Шервуда и Нуссельта (1.5), соответствующие нулевым членам внутреннего разложения (2.10)–(2.12), имеют вид

$$\text{Nu}(\lambda, 0) = A \text{Sh}(1, 0), \quad \text{Sh}(\sigma, 0) = A \gamma^{-1} \text{Sh}(1, 0) \quad (2.13)$$

Старшие члены внешнего разложения (2.5) для поступательного (1.8) и сдвигового (1.9) потоков будут описываться различными уравнениями. Рассмотрим сначала сдвиговый поток.

3. Сдвиговый поток. Среднее число Шервуда. Уравнения для первых членов внешнего разложения (2.5) можно получить исходя из следующих предельных свойств функций, фигурирующих в задаче (2.2), (2.3) при $r \rightarrow \infty$

$$\rho \rightarrow 1, \quad c_p \rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow 1, \quad \sigma \rightarrow 1, \quad h \rightarrow \Phi \rightarrow T \quad (3.1)$$

которые совместно с (1.9) позволяют получить

$$\Delta_{\xi_T} \Phi^{(1)} = G_{ij} \xi_{Tj} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \xi_{Ti}}, \quad \Delta_{\xi_c} z^{(1)} = G_{ij} \xi_{cj} \frac{\partial z^{(1)}}{\partial \xi_{ci}} \quad (3.2)$$

$$\xi_{Ti} = \text{Re}_T^{1/4} x_i, \quad \xi_{ci} = \text{Re}_c^{1/4} x_i$$

Уравнения (3.2) исследовались в работе [9], из результатов которой

следует, что первые члены внешнего разложения (3.2), удовлетворяющие нулевым граничным условиям на бесконечности и условиям срачивания с нулевыми членами внутреннего разложения (2.10)–(2.12) при $\xi_{T,c} \rightarrow 0$, могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\xi_{T,c} \rightarrow 0, \quad \Phi^{(1)} &\rightarrow \text{Nu}(\lambda, 0) [\xi_T^{-1} - \alpha + O(\xi_T)], \\ z^{(1)} &\rightarrow \text{Sh}(\sigma, 0) [\xi_c^{-1} - \alpha + O(\xi_c)]\end{aligned}\quad (3.3)$$

Здесь $\alpha = \alpha(G_{ij})$ — числовой коэффициент, общее выражение для определения величины которого приведено в работе [9]. В частности, в случае простого сдвига (один недиагональный элемент матрицы G_{ij} равен единице, а остальные нулю) $\alpha = 0,258$ [8], а в осесимметричном случае ($G_{11} = G_{22} = 1/2$, $G_{33} = -1$; $G_{ij} = 0$ при $i \neq j$) $\alpha = 0,399$ [9].

Вторые члены разложений функций $\Phi^{(1)}$ и $z^{(1)}$ при $\xi_{T,c} \rightarrow 0$ (3.3) определяют граничные условия на бесконечности для членов внутреннего разложения Φ_1 и z_1 (2.4) (при $v = 1/2$)

$$r \rightarrow \infty, \quad \Phi_1 \rightarrow -q_T, \quad z_1 \rightarrow -q_c; \quad q_T = \alpha \text{Pe}_T^{1/2} \text{Nu}(\lambda, 0), \quad q_c = \alpha \text{Pe}_c^{1/2} \text{Sh}(\sigma, 0) \quad (3.4)$$

Учитывая равенства (3.4), можно показать, что уравнения и граничные условия, правильно описывающие первые два члена внутреннего разложения (2.4), имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta \Phi &= 0, \quad \text{div}(\sigma_\Phi \text{grad } z) = 0 \quad (\Phi = \Phi_0 + \text{Pe}_T^{1/2} \Phi_1, \quad z = z_0 + \text{Pe}_c^{1/2} z_1) \\ r &= r_s, \quad z = 1, \quad \partial \Phi / \partial n = \gamma \sigma_\Phi \partial z / \partial n; \quad r \rightarrow \infty, \quad \Phi \rightarrow -q_T, \quad z \rightarrow -q_c\end{aligned}\quad (3.5)$$

Решение задачи (3.5) ищем в форме

$$\Phi = Eu + F, \quad z = Qf(\Phi) + R \quad (3.6)$$

где функция f задается выражением (2.14), а постоянные E, F, Q, R определяются из граничных условий (3.5) и имеют вид

$$f(E - q_T) - \gamma - \gamma q_c - f(-q_T) = 0, \quad F = -q_T, \quad Q = \gamma^{-1}, \quad R = -q_c - \gamma^{-1} f(-q_T) \quad (3.7)$$

Здесь первое соотношение представляет собой уравнение для определения параметра E .

Учтем теперь, что средние числа Шервуда и Нуссельта (1.5) задаются формулами

$$\text{Nu}(\lambda, \text{Re}_\infty) = \gamma \text{Sh}(\sigma, \text{Re}_\infty) = E \text{Sh}(1, 0) \quad (3.8)$$

Исключая из этого выражения параметр E и подставляя его в первое соотношение (3.7), приходим к следующему алгебраическому уравнению для определения среднего числа Шервуда

$$\begin{aligned}\gamma^{-1} f\left(\gamma \frac{\text{Sh}(\sigma, \text{Re}_\infty)}{\text{Sh}(1, 0)} - \alpha \gamma \text{Re}_\infty^{1/2} \text{Pr}_\infty^{1/2} \text{Sh}(\sigma, 0)\right) = \\ = 1 + \alpha \text{Re}_\infty^{1/2} (\text{Sc}_\infty^{1/2} - \text{Pr}_\infty^{1/2}) \text{Sh}(\sigma, 0)\end{aligned}\quad (3.9)$$

При записи уравнения (3.9) были учтены выражения для величин q_T и q_c (3.4) и отброшены члены порядка $o(\text{Re}_\infty^{1/2})$ (при разложении функции $f(-q_T) = -q_T + o(\text{Re}_\infty^{1/2})$).

4. Поступательный поток. В случае поступательного обтекания частицы (1.8) уравнения для первых членов внешнего разложения (2.5) в силу (3.1) имеют вид (i — единичный направляющий вектор скорости газа на бесконечности)

$$(i \cdot \text{grad}_{\xi_T} \Phi^{(1)}) = \Delta_{\xi_T} \Phi^{(1)}, \quad (i \cdot \text{grad}_{\xi_c} z^{(1)}) = \Delta z_{\xi_c}^{(1)}; \quad \xi_T = \text{Pe}_T r, \quad \xi_c = \text{Pe}_c r \quad (4.1)$$

Решения этих уравнений, удовлетворяющие нулевым граничным условиям при $\xi_{T,c} \rightarrow 0$ и условиям срачивания с нулевыми членами внутренне-

го разложения (2.10) – (2.12), определяются формулами

$$\Phi^{(1)} = \text{Nu}(\lambda, 0) \xi_T^{-1} \exp \left[\frac{1}{2} \xi_T (\eta - 1) \right], \quad \eta = \frac{(\mathbf{i} \cdot \mathbf{r})}{r} = \cos \theta \quad (4.2)$$

$$z^{(1)} = \text{Sh}(\sigma, 0) \xi_c^{-1} \exp \left[\frac{1}{2} \xi_c (\eta - 1) \right]$$

которые выводятся аналогично [2] (угол θ отсчитывается от направления набегающего потока).

Вторые члены разложения выражений (4.2) в ряд при $\xi_{T,c} \rightarrow 0$ определяют граничные условия на бесконечности для первых членов внутреннего разложения Φ_1 и z_1 . Учитывая это, можно показать, что уравнения и граничные условия, правильно описывающие первые два члена внутреннего разложения (2.4), имеют вид

$$\text{Pe}_T \text{div}(\rho v h)_0 = \Delta \Phi, \quad \Phi = \Phi_0 + \text{Pe}_T \Phi_1 \quad (4.3)$$

$$\text{Pe}_c \text{div}(\rho v z)_0 = \text{div}(\sigma_\Phi(\Phi) \text{grad } z), \quad z = z_0 + \text{Pe}_c z_1$$

$$r = r_s, \quad z = 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \gamma \sigma_\Phi(\Phi) \frac{\partial z}{\partial n}; \quad r \rightarrow \infty, \quad \Phi \rightarrow p_T(\eta - 1), \quad z \rightarrow p_c(\eta - 1)$$

$$p_T = \frac{1}{2} \text{Pe}_T \text{Nu}(\lambda, 0), \quad p_c = \frac{1}{2} \text{Pe}_c \text{Sh}(\sigma, 0)$$

Здесь индекс нуль снизу в левой части уравнений соответствует величинам, в которые подставлены нулевые члены внутреннего разложения (2.10) – (2.12).

Решение задачи (4.3) ищем в виде суммы

$$\Phi = \Phi^\circ + \delta \Phi, \quad z = z^\circ + \delta z \quad (4.4)$$

где слагаемые удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\Delta \Phi^\circ = 0; \quad \text{div}(\sigma_\Phi(\Phi^\circ) \text{grad } z^\circ) = 0 \quad (4.5)$$

$$r = r_s, \quad z^\circ = 1, \quad \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial n} = \gamma \sigma_\Phi(\Phi^\circ) \frac{\partial z^\circ}{\partial n}; \quad r \rightarrow \infty, \quad z^\circ \rightarrow -p_c, \quad \Phi^\circ \rightarrow -p_T$$

$$\Delta \delta \Phi = \text{Pe}_T \text{div}(\rho v h)_0; \quad \text{div}(\sigma_\Phi(\Phi) \text{grad } \delta z) = \quad (4.6)$$

$$= -\text{div} \{ [\sigma_\Phi(\Phi) - \sigma_\Phi(\Phi^\circ) \text{grad } z^\circ] + \text{Pe}_c \text{div}(\rho v z)_0;$$

$$r = r_s, \quad \delta z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n}(\delta \Phi) = \gamma \sigma_\Phi(\Phi) \frac{\partial}{\partial n}(\delta z) + \gamma [\sigma_\Phi(\Phi) - \sigma_\Phi(\Phi^\circ)] \frac{\partial z^\circ}{\partial n}$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \delta z \rightarrow p_c \eta, \quad \delta \Phi \rightarrow p_T \eta$$

Система для первых слагаемых (4.5), с точностью до переобозначений $\Phi^\circ \rightarrow \Phi$, $z^\circ \rightarrow z$, $p_c \rightarrow q_c$, $p_T \rightarrow q_T$, совпадает с краевой задачей (3.5), соответствующей сдвиговому обтеканию частицы (1.9). Поэтому ее решение описывается формулами (2.11), (3.6), (3.7).

Из уравнений и граничных условий (4.6) следует, что $\delta \Phi = O(\text{Re}_\infty)$, $\delta z = O(\text{Re}_\infty)$.

В невозмущенном потоке вдали от частицы при $r \rightarrow \infty$ структура асимптотического разложения функций $\delta \Phi$ и δz должна быть одной и той же для любой формы частиц, а сама частица может рассматриваться как точка. Для сферы, используя оператор поверхностного осреднения [10, 13, 14]

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} w \, dS_r = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 w(r, \eta) \, d\eta \quad (\eta = \cos \theta) \quad (4.7)$$

можно показать, что асимптотика решения уравнений (4.6) при $r \rightarrow \infty$ не содержит

«источниковых» членов, пропорциональных r^{-1} , и, следовательно, этим же свойством обладают соответствующие решения для частиц любой формы.

Это утверждение доказывается осреднением уравнений (4.3) аналогично [13, 14] с учетом того, что: 1) для сферической частицы нулевые члены внутренних разложений (2.10) – (2.12) зависят только от радиальной координаты r (так как $u=r^{-1}$); 2) для любых функций w , зависящих только от r , справедливо равенство $\langle w(r) \rangle = w(r)$; 3) оператор среднего (4.7) перестановочен с оператором дифференцирования по координате r и 4) для любой аналитической функции g с точностью до $o(\text{Re}_\infty)$ справедлива формула $\langle g(\Phi, z) \rangle = g(\langle \Phi \rangle, \langle z \rangle)$ (которая доказывается путем непосредственной проверки).

Используя указанные свойства, в результате осреднения уравнений (4.3) окончательно получаем

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\langle \Phi \rangle}{dr} = 0; \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \sigma_\Phi(\langle \Phi \rangle) \frac{d\langle z \rangle}{dr} = 0 \quad (4.8)$$

$$r=1, \quad \langle z \rangle=1, \quad \frac{d\langle \Phi \rangle}{dr} = \gamma \sigma_\Phi(\langle \Phi \rangle) \frac{d\langle z \rangle}{dr}; \quad r \rightarrow \infty, \quad \langle z \rangle \rightarrow -p_c, \quad \langle \Phi \rangle \rightarrow -p_T$$

При выводе уравнений (4.8) были учтены равенства $\langle \eta \rangle = 0$, $\langle \rho v_r \rangle = 0$, второе из которых является следствием уравнения неразрывности (1.6) и условия непротекания через поверхность частицы (1.7).

Средние числа Шервуда и Нуссельта (1.5) с точностью до $o(\text{Re}_\infty)$ определяются формулами

$$\text{Nu} = - \left[\frac{d\langle \Phi \rangle}{dr} \right]_{r=1}, \quad \text{Sh} = - \left[\sigma_\Phi(\langle \Phi \rangle) \frac{d\langle z \rangle}{dr} \right]_{r=1} \quad (4.9)$$

Сопоставление уравнений и граничных условий (4.5), (4.6) и (4.8), (4.9) показывает, что в случае сферической частицы выполняются равенства

$$\Phi^\circ = \langle \Phi \rangle, \quad \delta\Phi = \Phi - \langle \Phi \rangle, \quad z^\circ = \langle z \rangle, \quad \delta z = z - \langle z \rangle \quad (4.10)$$

которые означают, что первые слагаемые (4.4) Φ° и z° являются поверхностными средними величинами, а вторые слагаемые $\delta\Phi$ и δz – отклонениями исходных величин Φ и z от их среднего значения.

Из указанного сопоставления с учетом выражений (4.9) получаем, что вторые слагаемые $\delta\Phi$ и δz не дают вклада в интегральные притоки тепла и вещества на поверхность частицы. Это в свою очередь означает, что в разложении функции $\delta\Phi$ (и δz) при $r \rightarrow \infty$ не содержится «источниковый» член, пропорциональный r^{-1} . Последнее утверждение доказывается интегрированием первого уравнения (4.6) по контрольному объему газа V , заключенному между поверхностью частицы S и поверхностью сферы Σ_R радиуса R , целиком охватывающей частицу. Переходя далее от объемного интеграла к поверхностным (по S и Σ_R) по формуле Гаусса – Остроградского и устремляя $R \rightarrow \infty$, получаем, что поверхностные интегралы от правой части первого уравнения (4.6) обращаются в нуль (в силу свойств нулевых членов внутреннего разложения Φ_0 и z_0 (2.10) – (2.12) и условия непротекания (1.7)). Отсутствие «источникового» члена в разложении $\delta\Phi$ при $r \rightarrow \infty$ следует из того, что один (по поверхности сферы S) из оставшихся двух поверхностных интегралов (соответствующих левой части уравнения (4.6) для $\delta\Phi$), как было указано ранее, обращается в нуль.

В общем случае вдали от частицы уравнения (4.6) «забывают» о форме частицы (т. е. структура решения при $r \rightarrow \infty$ будет одной и той же для любой формы частиц), поэтому асимптотическое разложение функции $\delta\Phi$ при $r \rightarrow \infty$ не должно содержать «источникового» члена, пропорционального r^{-1} . Учитывая сказанное, проинтегрируем первое уравнение (4.6) по контрольному объему газа V с последующим переходом к поверхностным интегралам по S и Σ_R . Рассуждая далее аналогично тому, как это делалось ранее, получаем, что величины $\delta\Phi$ (и δz), так же как и в случае сферической частицы, не дают вклада в средние числа Нуссельта и Шервуда, т. е. $\delta\text{Nu} = \delta\text{Sh} = 0$.

Учитывая равенства $\delta\text{Nu} = \delta\text{Sh} = 0$ и используя формулы (2.11), (3.6), (3.7), соответствующие решению задачи (4.5), для среднего числа Шервуда в случае поступательного обтекания частицы (1.8) получаем алгебраическое уравнение

$$\gamma^{-1} f \left(\gamma \frac{\text{Sh}(\sigma, \text{Re}_\infty)}{\text{Sh}(1, 0)} - \frac{1}{2} \gamma \text{Re}_\infty \text{Pr}_\infty \text{Sh}(\sigma, 0) \right) = \\ = 1 + \frac{1}{2} \text{Re}_\infty (\text{Sc}_\infty - \text{Pr}_\infty \text{Sh}(\sigma, 0)); \quad \text{Nu}(\lambda, \text{Re}_\infty) = \gamma \text{Sh}(\sigma, \text{Re}_\infty) \quad (4.11)$$

5. Случай степенной зависимости вязкости газа от температуры. Частицы различной формы. При определении среднего числа Шервуда из уравнений (3.9), (4.11) не требуется предварительного вычисления величины $Sh(\sigma, 0)$ путем решения уравнения (2.12), (2.13). Вся необходимая информация уже полностью заложена в (3.9), (4.11), которые при $Re_\infty = 0$ совпадают с уравнениями (2.12), (2.13). При решении уравнений (3.9), (4.11) достаточно в общем виде выразить среднее число Шервуда $Sh(\sigma, Re_\infty)$ через величины $Sh(\sigma, 0)$ и $Sh(1, 0)$, а потом положить $Re_\infty = 0$, что и дает возможность определить $Sh(\sigma, 0)$, а следовательно, и величину $Sh(\sigma, Re_\infty)$.

В предельных случаях $\gamma \rightarrow 0$ (изотермическая реакция, соответствующая однородному полю температуры в потоке газа $T=0$) или $\sigma \rightarrow 1$ (коэффициент σ не зависит от температуры, здесь поле температур при $\gamma \neq 0$ уже не будет однородным во всем потоке; $f(x)=x$) из уравнений (3.9), (4.11) с точностью до членов порядка Re_∞^ν включительно получаем результаты работ [2, 9].

Для частицы заданной формы задача определения интенсивности конвективного теплопереноса к частице, согласно уравнениям (3.9), (4.11), сводится к определению функции f (2.11) и вычислению среднего числа Шервуда $Sh(1, 0)$, соответствующего решению линейной вспомогательной задачи для уравнения Лапласа (2.6).

При часто используемых предположениях (1.11) уравнения (3.9), (4.11) существенно упрощаются ввиду того, что после перехода к новой переменной $T=T(\Phi)$ в подынтегральном выражении (2.11) (где функция $T(\Phi)$ получена обращением выражения (2.1)) для функции f получаем

$$f(\Phi) = T(\Phi) \quad (5.1)$$

Умножим обе части уравнений (3.9), (4.11) на γ и разрешим их далее относительно параметра $Sh(\sigma, Re_\infty)$. Удерживая старшие члены разложения (вплоть до членов порядка Re_∞^ν) и определяя величину $Sh(\sigma, 0)$, как это было описано ранее, для среднего числа Шервуда окончательно получаем

$$Sh(\sigma, Re_\infty) = \gamma^{-1} \Phi(\gamma) \{Sh(1, 0) + \\ + \alpha Re_\infty^\nu Sh^2(1, 0) [Pr^\nu + \mu(\gamma)(Sc^\nu - Pr^\nu)]\} \quad (5.2)$$

Здесь значения $\alpha = 1/2$, $\nu = 1$ соответствуют поступательному потоку, а $\alpha = G_{ij}$, $\nu = 1/2$ — сдвиговому.

Для наиболее распространенного случая степенной зависимости вязкости газа от температуры

$$\mu(T) = (1-T)^n \quad (\mu_* = \text{const } T_*^n) \quad (5.3)$$

для коэффициентов $\Phi(\gamma)$ и $\mu(\gamma)$ в (5.2) с учетом (1.11), (2.1) имеем

$$\Phi(\gamma) = \frac{1 - (1-\gamma)^{n+1}}{n+1}, \quad \mu(\gamma) = (1-\gamma)^n \quad (5.4)$$

Формулы (5.2), (5.4) при $n=0$ или $\gamma=0$ (изотермический случай) переходят в результаты работ [2, 9]. При $\gamma=1$ среднее число Шервуда (5.2), (5.4) не зависит от числа Шмидта (с указанной точностью).

Приведем теперь несколько конкретных значений параметра $Sh(1, 0)$ для частиц несферической формы (для сферы $Sh(1, 0)=1$).

Для тонкого кругового диска имеем [2]

$$Sh(1, 0) = 2\pi^{-1} \approx 0,637 \quad (5.5)$$

В случае частицы «гантелевидной» формы, состоящей из двух соприка-

сающихся сфер равных радиусов a , получаем [18]

$$\text{Sh}(1, 0) = 2 \ln 2 \approx 1,386 \quad (5.6)$$

где за характерный масштаб длины выбран радиус a .

Для эллипсоидальной частицы значение $\text{Sh}(1, 0)$ приведено в [15]. Отметим, что аналогично [7, 13, 14] может быть рассмотрен более общий случай теплопроводной частицы, когда к уравнениям и граничным условиям (1.1)–(1.3), которые описывают распределение температуры и концентрации в потоке газа вне частицы, следует добавить еще уравнение теплопроводности и соответствующие граничные условия, определяющие поле температур внутри капли. Можно показать, что среднее число Шервуда на поверхность теплопроводной частицы, обтекаемой поступательным и сдвиговым потоком газа, определяется путем решения тех же самых алгебраических уравнений (3.9), (4.11), что и для случая нетеплопроводной частицы (следует отметить, что качественно аналогичный результат был получен ранее в работах [13, 14]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Acrivos A., Taylor A. D. Heat and mass transfer from a single sphere in Stokes flow.— *Phys. Fluids*, 1962, v. 5, № 4, p. 386–394.
2. Brenner H. Forced convection heat and mass transfer at small Peclet numbers from a particle of arbitrary shape.— *Chem. Eng. Sci.*, 1963, v. 18, № 2, p. 109–122.
3. Rimmer P. L. Heat transfer from a sphere in a stream of small Reynolds number.— *J. Fluid Mech.*, 1968, v. 32, № 1, p. 1–7.
4. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. О массо- и теплообмене сферической частицы в ламинарном потоке вязкой жидкости.— *ПММ*, 1971, т. 35, вып. 2, с. 255–265.
5. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сысков Ю. Н. Диффузия к обтекаемой реагирующей частице произвольной формы.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1975, № 2, с. 99–106.
6. Taylor T. D. Mass transfer from single spheres in Stokes flow with surface reactions.— *Intern. J. Heat Mass Transfer*, 1963, v. 6, № 11, p. 993–994.
7. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалюк А. Т. О поле температур, возникающем при движении реагирующей сферы при малых конечных числах Пекле и Рейнольдса.— *ПМТФ*, 1972, № 2, с. 59–65.
8. Frankel N. A., Acrivos A. Heat and mass transfer from small spheres and cylinders freely suspended in shear flow.— *Phys. Fluids*, 1968, v. 11, № 9, p. 1913–1918.
9. Batchelor G. K. Mass transfer from a particle suspended in fluid with a steady linear ambient velocity distribution.— *J. Fluid Mech.*, 1979, v. 95, № 2, p. 369–400.
10. Acrivos A. A note on the rate of heat or mass transfer from a small particle freely suspended in linear shear field.— *J. Fluid Mech.*, 1980, v. 98, № 2, p. 299–304.
11. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. Конвективная диффузия к твердой частице в потоке газа при нелинейной кинетике гетерогенной химической реакции.— *Докл. АН СССР*, 1977, т. 237, № 1, с. 86–89.
12. Полянин А. Д. Диффузия к частице в сдвиговом потоке газа при произвольной кинетике поверхностной реакции.— *ПММ*, 1981, т. 45, вып. 4, с. 763–766.
13. Полянин А. Д. О химической реакции с выделением тепла на поверхности движущейся в газе теплопроводной частицы.— *ПМТФ*, 1982, № 1, с. 34–40.
14. Полянин А. Д. О конвективном массотеплообмене реагирующей частицы при малых числах Пекле.— *Докл. АН СССР*, 1982, т. 262, № 2, с. 292–296.
15. Бенилов М. С., Рогов Б. В., Тирский Г. А. Об ионном токе насыщения на электрический зонд в медленно движущейся плазме.— *ПМТФ*, 1982, № 3, с. 5–13.
16. Полянин А. Д. Асимптотический анализ некоторых нелинейных задач о массо- и теплообмене частиц с потоком при малых числах Пекле.— *Докл. АН СССР*, 1982, т. 264, № 6, с. 1322–1326.
17. Чан П., Тэлбот Л., Турян К. Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме. М.: Мир, 1978, 201 с.
18. Morrison F. A. (Jr.), Reed L. D. Low Knudsen number heat transfer from two spheres in contact.— *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, 1974, № 4, p. 478–482.

Москва

Поступила в редакцию
16.XII.1982