

$r=2\gamma/(p+\epsilon_0 E^2/2)$. Отсюда видно, что при увеличении p или U (последнее ведет к увеличению E), K уменьшается, что соответствует «выпячиванию» мениска. Однако при постоянном p при больших U в эксперименте наблюдается переход от сферической формы к конической с началом эмиссии из вершины конуса монодисперсных капель. В настоящих расчетах этого перехода в области сходимости итерационного процесса замечено не было.

На фиг. 1 представлены границы области сходимости итерационного процесса (2.1) для значений $\gamma=22,03 \cdot 10^{-3}$ н/м (этиловый спирт) — кривая 1, $\gamma=40,84 \cdot 10^{-3}$ н/м (анилин) — 2, $\gamma=72,58 \cdot 10^{-3}$ н/м (вода) — 3. Область сходимости лежит слева внизу относительно соответствующей границы. Горизонтальная асимптотика границы области сходимости в области малых потенциалов (на фиг. 1 показана штриховыми линиями) определяется тем, что действие электрического поля мало и равновесная форма поверхности определяется балансом сил поверхностного натяжения и скачком давления на границе раздела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
2. Taylor G. Desintegration of water drops in an electric field.— Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1964, v. 280, № 1382, p. 383—397.
3. Rayleigh Lord. On equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity.— Phil. Mag., Ser. 5, 1882, v. 14, № 87, p. 184—186.
4. Swatik D. S., Hendricks C. D. Production of ions by electrohydrodynamic spraying techniques.— AIAA Journal, 1968, v. 6, № 8, p. 1596—1597.
5. Pfeifer R. J., Hendricks C. D. Parametric studies of electrohydrodynamic spraying.— AIAA Journal, 1968, v. 6, № 3, p. 496—502.
6. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука. 1974. 176 с.
7. Антоненко О. Ф. Численное решение задачи Дирихле для незамкнутых поверхностей вращения.— В кн.: Вычисл. системы, вып. 12. Новосибирск, 1964, с. 79—97.

Ленинград

Поступила в редакцию
17.VI.1981

УДК 532.5

КОЭФФИЦИЕНТ УДЛИНЕНИЯ КУМУЛЯТИВНЫХ СТРУЙ

КАРАБУТ Е. А.

При расчете удлинения кумулятивных струй используется в основном инерционное приближение [1]. Считается, что каждый элемент струи движется с постоянной скоростью. Такой подход справедлив для очень тонких струй, для которых внутреннее давление близко к атмосферному и поэтому градиент давления вдоль струи приблизительно равен нулю.

В данной работе в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости найдено более точное приближение, учитывающее взаимодействие соседних элементов струи.

Введем цилиндрическую систему координат X, Y . Ось X направим по оси симметрии струи, ось Y — перпендикулярно ей. Пусть t — время; a, b — лагранжевы координаты, причем $a=X, b=Y$ при $t=0$.

Для материальных частиц струй, расположенных на оси симметрии, введем коэффициент удлинения $n(a, t)=X_a, b=0$.

Считаем, что в начальный момент времени $t=0$ известен радиус струи $b=R(a)$ и скорость $u(a)$, заданная на оси струи. Необходимо найти $n(a, t)$, т. е. определить растяжение струи по известным начальным данным. Подобная задача является основной при определении бронепробития кумулятивных струй.

В инерционном приближении каждая материальная частица движется с той скоростью, которую она имела вначале, т. е.

$$n(a, t) \approx 1 + u' t \quad (1)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по a .

Займемся нахождением более точной, чем (1), формулы. В безразмерных переменных уравнения движения и граничные условия для потенциального течения имеют вид [2]

$$y_\beta x_\alpha - y_\alpha x_\beta = \beta y^{-1} \quad (2)$$

$$\epsilon(y_\beta y_{\alpha\tau} - y_\alpha y_{\beta\tau}) + x_\beta x_{\alpha\tau} - x_\alpha x_{\beta\tau} = 0 \quad (3)$$

$$y = 0, \quad \beta = 0 \quad (4)$$

$$\epsilon y_\alpha y_{\tau\tau} + x_\alpha x_{\tau\tau} + \dot{r}(\epsilon y_\beta y_{\tau\tau} + x_\beta x_{\tau\tau}) = 0, \quad \beta = r(\alpha) \quad (5)$$

$$\epsilon = R_0^2/L^2, \quad a = L\alpha, \quad b = R_0\beta, \quad X = Lx, \quad Y = R_0y, \quad R = R_0r, \quad t = \tau/q$$

Здесь R_0 — средний радиус струи, L — характерный линейный размер вдоль струи, q — средний градиент скорости; точка означает дифференцирование по α . Граничное условие (4) является условием симметрии, а граничное условие (5) соответствует условию постоянства давления $p = \text{const}$ на свободной поверхности $b = R(\alpha)$, которое получено путем использования формул [2]

$$\begin{aligned}\rho(Y_c Y_{tt} + X_c X_{tt}) + p_c &= 0; \quad c = a, \quad b \\ p_a + R' p_b &= 0, \quad b = R(\alpha)\end{aligned}$$

где ρ — плотность жидкости.

Кумулятивные струи обычно являются тонкими. Поэтому далее считаем, что $\varepsilon \ll 1$.

Решение ищем в виде

$$x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \dots, \quad y = y^{(0)} + \varepsilon y^{(1)} + \dots \quad (6)$$

Подставляя разложения (6) в уравнение (3) и полагая $\varepsilon = 0$, получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{x_\beta^{(0)}}{x_\alpha^{(0)}} \right) = 0$$

Поэтому величина $x_\beta^{(0)} / x_\alpha^{(0)}$ не зависит от времени. Так как $x^{(0)} = \alpha$ при $\tau = 0$, то $x_\beta^{(0)} = 0$ для $\tau \geq 0$. Кроме того, из уравнения (5) при $\varepsilon = 0$ следует, что $x_{\tau\tau}^{(0)} = 0$. Поэтому имеем

$$x^{(0)} = \alpha + f(\alpha)\tau \quad (7)$$

Рассматривая (2) при $\varepsilon = 0$, с учетом выражения (7) получим уравнение

$$y_\beta^{(0)}(1 + f\tau) = \beta / y^{(0)}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию симметрии (4), имеет вид

$$y^{(0)} = \beta(1 + f\tau)^{-1/2} \quad (8)$$

Подстановка разложений (6) в уравнение (3) с последующим выделением членов при одинаковых степенях ε приводит к следующему уравнению для $x^{(1)}$:

$$\left(\frac{x_\beta^{(1)}}{x_\alpha^{(0)}} \right)_\tau = \frac{y_\beta^{(0)} y_{\alpha\tau}^{(0)} - y_\alpha^{(0)} y_{\beta\tau}^{(0)}}{(x_\alpha^{(0)})^2}$$

Интегрируя это уравнение с учетом выражений (7), (8) и начального условия $x^{(1)} = 0$ при $\tau = 0$, получим

$$\frac{x_\beta^{(1)}}{x_\alpha^{(0)}} = \frac{\beta \ddot{f}}{8\dot{f}} \left[\frac{1}{(1 + f\tau)^4} - 1 \right]$$

Следовательно

$$x^{(1)} = \frac{\beta^2 \ddot{f}}{16\dot{f}} \left[\frac{1}{(1 + f\tau)^3} - 1 - f\tau \right] + S(\alpha, \tau) \quad (9)$$

Для нахождения функции $S(\alpha, \tau)$ воспользуемся следствием граничного условия (5)

$$(y_\alpha^{(0)} + \dot{y}_\beta^{(0)}) y_{\tau\tau}^{(0)} + x_\alpha^{(0)} x_{\tau\tau}^{(1)} = 0, \quad \beta = r(\alpha) \quad (10)$$

Подставляя выражение (9) в равенство (10), получим

$$S_{\tau\tau} = \frac{3r^2 \ddot{f}}{8(1 + f\tau)^5} (f\tau - 2) - \frac{3r\dot{f}^2}{4(1 + f\tau)^4} \quad (11)$$

Пусть $S_\tau = A(\alpha)$ при $\tau = 0$. Тогда двукратное интегрирование (11) дает

$$S = \frac{1}{16f} \left\{ r^2 \dot{f} \left[\frac{1}{(1+f\tau)^2} - \frac{3}{2(1+f\tau)^3} + \frac{1}{2} \right] - \right. \\ \left. - 2r\dot{r}\dot{f} \left[\frac{1}{(1+f\tau)^2} - 1 \right] \right\} - \frac{\tau}{8} \left[\frac{5}{4} r^2 \dot{f} + 2r\dot{r}\dot{f} \right] + A\tau \quad (12)$$

Так как $x^{(1)} = S$ при $\beta = 0$, то для частиц жидкости, находящихся на оси струи

$$x(\alpha, \tau) = \alpha + f\tau + \varepsilon S + O(\varepsilon^2), \quad n(\alpha, \tau) = 1 + f\tau + \varepsilon S + O(\varepsilon^2) \quad (13)$$

Подставляя выражение (12) в формулы (13) после перехода к размерным переменным с учетом равенства $u(a) = Lq[f + A\varepsilon + O(\varepsilon^2)]$ получим

$$n(a, t) \approx 1 + u't + B' \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{16u'} \left\{ R^2 u'' \left[\frac{1}{(1+u't)^2} - \frac{3}{2(1+u't)^3} + \frac{1}{2} \right] - \right. \\ \left. - (R^2)' u' \left[\frac{1}{(1+u't)^2} - 1 \right] \right\} - \frac{t}{8} \left[\frac{5}{4} R^2 u'' + (R^2)' u' \right]$$

Оценим относительную погрешность λ , которая допускается при вычислении $n(a, t)$, по формуле (1). Из выражения (14) видно, что по порядку величины

$$\lambda \sim B'(1+u't)^{-1}$$

При больших временах

$$n(a, t) \sim t \frac{d}{da} \left[u - \frac{5}{32} R^2 u'' + \frac{(R^2)' u'}{8} \right]$$

Поэтому относительная погрешность при $t \rightarrow \infty$ стремится к постоянной величине

$$\lambda \sim \frac{1}{u'} \frac{d}{da} \left[\frac{5}{32} R^2 u'' + \frac{(R^2)' u'}{8} \right] \quad (15)$$

В частном случае линейного распределения скорости

$$\lambda \sim 1/8 (r^2)'' \quad (16)$$

Если величины (15) или (16) достаточно малы, то можно использовать (1). В противном случае следует применять формулу (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Физика взрыва (Под ред. Станюковича К. П.). М.: Наука, 1975, 704 с.
2. Налимов В. И., Пухначев В. В. Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. Новосибирск, 1975. 173 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
10.IV.1981

УДК 532.517.3

К ВОПРОСУ О СОПРОТИВЛЕНИИ ТРЕНИЯ ПРИ УСКОРЕННОМ ТЕЧЕНИИ В ТРУБЕ

ЛОГОВ И. Л.

Исследуется развитие течения вязкой несжимаемой жидкости из состояния покоя в круглой цилиндрической трубе с постоянным градиентом давления. Получена зависимость для касательного напряжения трения в произвольной точке потока от градиента давления и от отношения средних по потоку ускорений, соответствующих рассматриваемому и начальному моментам времени. Приводится анализ точного решения линейного уравнения [1], который показал, что развитие сил сопротивления вязкого трения определяется характерным временем, зависящим от кинематической вязкости и радиуса трубы. Уточняется значение коэффициента сопротивления гидравлического трения для неустановившегося течения введением поправки, учитывающей профиль скоростей потока. Анализируются уравнения движения и для характерных