

УДК 532.22.537.2

РАСЧЕТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

АЛЕКСАНДРОВ М. Л., ГАЛЛЬ Л. Н., ИВАНОВ В. Я.,
НИКОЛАЕВ В. И., ПАВЛЕНКО В. А., ШЕВЧЕНКО С. И.

В последнее время значительный интерес проявляется к статической форме свободной поверхности капиллярной жидкости, находящейся в невесомости и в различных полях [1, 2]. Сложность расчета действия электрического поля на жидкость (влияние на форму поверхности жидкости) заключена в самосогласованности задачи: электрическое поле вблизи поверхности жидкости определяется ее формой и само влияет на последнюю.

В основе расчетов статической формы проводящей жидкости лежит уравнение равновесия — уравнение баланса сил Релея [3] на статической поверхности раздела

$$p_E = p_T - p, \quad p_E = \epsilon_0 E^2 / 2 \quad (0.1)$$

Здесь p_E — давление на поверхности проводящей жидкости, обусловленное действием электрического поля напряженности E , p_T — давление сил поверхностного натяжения, p — скачок давления на поверхности раздела $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ фарад/м. Форму поверхности жидкости, на которой выполняется уравнение (0.1), будем называть равновесной.

Фотографии формы поверхности проводящей жидкости в электрическом поле [4] показали наличие характерной закономерности динамики поверхности мениска. При увеличении напряженности электрического поля E вблизи поверхности жидкости форма поверхности мениска менялась от сферической (в отсутствие поля) к эллипсоидальной со все более увеличивающимся эксцентриситетом. При достижении некоторого критического потенциала поверхности эллипсоид резко деформировался в остроконечный конус, из вершины которого начиналась эмиссия монодисперсных капель. В существующих работах точная форма поверхности проводящей жидкости в сильном электрическом поле не исследовалась, а заменялась некоторой модельной, чаще всего поверхностью гиперболоида [5] или эллипсоида вращения [2]. Причем в [2], так как оказалось невозможным добиться выполнения уравнения (0.1) на всей поверхности эллипсоида, оно удовлетворялось в полюсе и на экваторе эллипсоида вращения.

Данная работа посвящена изучению статической формы проводящей жидкости в сильно неоднородном электрическом поле, образующемся на срезе капилляра с помощью численного решения самосогласованной задачи.

1. Постановка задачи. Будем исходить из уравнения (0.1), в котором положим [6]

$$p_T = \gamma K, \quad K = \frac{r_{zz}}{(1+r_z^2)^{3/2}} - \frac{1}{r(1+r_z^2)^{1/2}}, \quad r_z = \frac{dr}{dz}, \quad r_{zz} = \frac{d^2r}{dz^2} \quad (1.1)$$

Здесь $r=r(z)$ — уравнение поверхности жидкости в аксиально-симметричной системе координат, γ — коэффициент поверхностного натяжения, K — кривизна поверхности. После подстановки K в уравнение (0.1) получим

$$r_{zz} + \frac{1}{\gamma} \left(p + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) (1+r_z^2)^{3/2} - \frac{1}{2} (1+r_z^2) = 0 \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) с естественными краевыми условиями на срезе капилляра радиуса a $z(r=a)=0$ и на оси симметрии $z_r(r=0)=0$ решается в квадратурах относительно z

$$z(r) = \int_r^a dr \left[\int_0^r p_0(\xi) \xi d\xi \right] \left[r^2 - \left(\int_0^r p_0(\xi) \xi d\xi \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (1.3)$$

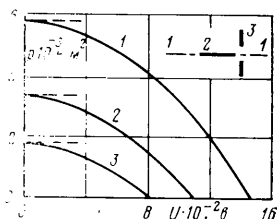
$$p_0(r) = \frac{1}{\gamma} \left(p + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right)$$

Формула (1.3) выражает связь уравнения поверхности жидкости с распределением электрического поля на ней. Для замыкания необходимо добавить к ней задачу отыскания электрического поля, которая формулируется в виде краевой задачи для уравнения Лапласа

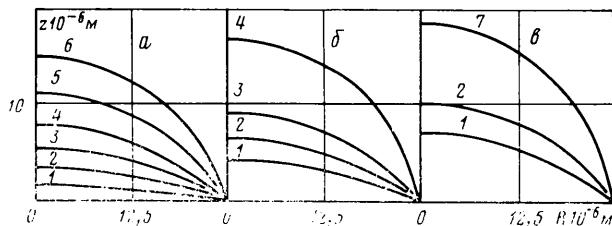
$$\Delta\varphi=0, \quad \varphi|_{\Gamma_i}=\varphi_i, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{r=0} = 0 \quad (1.4)$$

где Γ_i — поверхности проводящих тел (электроды, поверхность проводящей жидкости), $\mathbf{n}$ — вектор нормали к оси.

2. Описание численного алгоритма. Аналитические методы решения задачи (1.4) возможны лишь для весьма ограниченного множества частных случаев, совместное решение уравнений поля (1.4) и уравнений (1.3) возможно лишь на основе численных методов. Специфической особенностью рассматриваемой задачи является резкая неоднородность масштабов отдельных элементов расчетной области: отношение диа-



Фиг. 1



Фиг. 2

метра капилляра к расстоянию до внешнего вытягивающего электрода составляет 10^{-2} . В работе использовался метод интегральных уравнений теории потенциала [7]. В проведенных вычислениях поверхности вытягивающего электрода и капилляра представлялись в виде прямых линий, а свободная поверхность жидкости — силой-ном третьего порядка.

Уравнение (1.3) можно записать в виде $z(r)=F(p, \gamma, E(r))$ и решать методом простой итерации, т. е. задавшись начальным приближением $z^{(0)}(r)$, искать последующие приближения по формуле

$$z^{(n+1)}(r)=F(p, \gamma, E^{(n)}(r)) \quad (2.1)$$

Этот итерационный процесс осуществлен в данной работе. Сходимость итерационного процесса контролировалась по величине относительной погрешности вдоль всего мениска жидкости $\delta = |z^{(n+1)} - z^{(n)}| / z^{(n+1)}$. Итерационный процесс считался законченным, когда наибольшая относительная погрешность вдоль всего мениска δ_m была меньше 10^{-3} . Рассмотрение вопроса сходимости итерационного процесса (2.1) для задачи (1.3), (1.4), имеющей свободную границу, является сложной математической задачей, выходящей за рамки данной работы. В данной работе применен обычный в подобных случаях метод: сходимость итерационного процесса изучалась на численном эксперименте. При этом была определена область сходимости итерационного процесса при различных значениях γ на множестве параметров (p, U) .

3. Результаты. Расчеты велись для аксиально-симметричной конфигурации электродов, приведенной на фиг. 1 справа в верхнем углу, где 1—1 — ось симметрии, 2 — капилляр диаметром $50 \cdot 10^{-6}$ м длиной $2,5 \cdot 10^{-2}$ м с бесконечно тонкими стенками, 3 — круглый вытянутый электрод диаметром $3 \cdot 10^{-2}$ м с отверстием диаметром 10^{-2} м, удаленный на $3 \cdot 10^{-3}$ м от среза капилляра. Оказалось, что в определенной области значений параметров итерационный процесс (2.1) сходится даже для далекого от равновесной формы поверхности начального приближения $z^{(0)}(r)$ за 2—3 итерации. Только вблизи от границы области сходимости итерационного процесса число требуемых итераций возрастало до 4—6. В расходящихся вариантах наблюдался рост значений $z^{(n)}$, пока не нарушалась положительность подрадикального выражения в (1.3).

На фиг. 2, а—в представлена форма мениска жидкости (зависимость $z(r)$) для $\gamma = 72,58 \cdot 10^{-3}$ н/м (вода) при различных значениях U : 1; 800; 1100 В соответственно; для значений p : $1 \cdot 10^3$ н/м² — кривая 1, $2 \cdot 10^3$ — кривая 2, $3 \cdot 10^3$ — 3, $4 \cdot 10^3$ — 4, $5 \cdot 10^3$ — 5, $5,6 \cdot 10^3$ — 6, $2,5 \cdot 10^3$ — 7.

При фиксированном одном из параметров (p, U) и увеличении другого как в расчетах (см. фиг. 1), так и в экспериментальных (см. [4]) результатах наблюдалось вытягивание («выпячивание») поверхности, причем экспериментальная и теоретическая формы поверхности находились в качественном согласии.

Поведение формы поверхности мениска при изменении параметров (p, U) можно понять, если предположить, что она имеет сферическую форму, т. е. $K=2/r$ и из (0.1)

$r=2\gamma/(p+\epsilon_0 E^2/2)$. Отсюда видно, что при увеличении p или U (последнее ведет к увеличению E), K уменьшается, что соответствует «вынычиванию» мениска. Однако при постоянном p при больших U в эксперименте наблюдается переход от сферондальной формы к конической с началом эмиссии из вершины конуса монодисперсных капель. В настоящих расчетах этого перехода в области сходимости итерационного процесса замечено не было.

На фиг. 1 представлены графики области сходимости итерационного процесса (2.1) для значений $\gamma=22,03 \cdot 10^{-3}$ н/м (этиловый спирт) — кривая 1, $\gamma=40,84 \cdot 10^{-3}$ н/м (анилин) — 2, $\gamma=72,58 \cdot 10^{-3}$ н/м (вода) — 3. Область сходимости лежит слева внизу относительно соответствующей границы. Горизонтальная асимптотика границы области сходимости в области малых потенциалов (на фиг. 1 показана штриховыми линиями) определяется тем, что действие электрического поля мало и равновесная форма поверхности определяется балансом сил поверхностного натяжения и скачком давления на границе раздела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабский В. Г., Копачевский И. Д., Мышкис А. Д. и др. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
2. Taylor G. Desintegration of water drops in an electric field.— Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1964, v. 280, № 1382, p. 383–397.
3. Rayleigh Lord. On equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity.— Phil. Mag., Ser. 5, 1882, v. 14, № 87, p. 184–186.
4. Swatik D. S., Hendricks C. D. Production of ions by electrohydrodynamic spraying techniques.— AIAA Journal, 1968, v. 6, № 8, p. 1596–1597.
5. Pfeifer R. J., Hendricks C. D. Parametric studies of electrohydrodynamic spraying.— AIAA Journal, 1968, v. 6, № 3, p. 496–502.
6. Позорсков А. В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.
7. Антоненко О. Ф. Численное решение задачи Дирихле для незамкнутых поверхностей вращения.— В кн.: Вычисл. системы, вып. 12. Новосибирск, 1964, с. 79–97.

Ленинград

Поступила в редакцию
17.VI.1981

УДК 532.5

КОЭФФИЦИЕНТ УДЛИНЕНИЯ КУМУЛЯТИВНЫХ СТРУЙ

КАРАБУТ Е. А.

При расчете удлинения кумулятивных струй используется в основном инерционное приближение [1]. Считается, что каждый элемент струи движется с постоянной скоростью. Такой подход справедлив для очень тонких струй, для которых внутреннее давление близко к атмосферному и поэтому градиент давления вдоль струи приблизительно равен нулю.

В данной работе в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости найдено более точное приближение, учитывающее взаимодействие соседних элементов струй.

Введем цилиндрическую систему координат X, Y . Ось X направим по оси симметрии струй, ось Y — перпендикулярно ей. Пусть t — время; a, b — лагранжевы координаты, причем $a=X, b=Y$ при $t=0$.

Для материальных частиц струй, расположенных на оси симметрии, введем коэффициент удлинения $n(a, t)=X_a, b=0$.

Считаем, что в начальный момент времени $t=0$ известен радиус струи $b=R(a)$ и скорость $u(a)$, заданная на оси струи. Необходимо найти $n(a, t)$, т. е. определить растяжение струи по известным начальным данным. Подобная задача является основной при определении бронепробития кумулятивных струй.

В инерционном приближении каждая материальная частица движется с той скоростью, которую она имела вначале, т. е.

$$n(a, t) \approx 1 + u't \quad (1)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по a .

Займемся нахождением более точной, чем (1), формулы. В безразмерных переменных уравнения движения и граничные условия для потенциального течения имеют вид [2]

$$y_\beta x_\alpha - y_\alpha x_\beta = \beta y^{-1} \quad (2)$$

$$\epsilon(y_\beta y_{\alpha\tau} - y_\alpha y_{\beta\tau}) + x_\beta x_{\alpha\tau} - x_\alpha x_{\beta\tau} = 0 \quad (3)$$

$$y = 0, \quad \beta = 0 \quad (4)$$

$$\epsilon y_\alpha y_{\tau\tau} + x_\alpha x_{\tau\tau} + \tau(\epsilon y_\beta y_{\tau\tau} + x_\beta x_{\tau\tau}) = 0, \quad \beta = r(\alpha) \quad (5)$$

$$\epsilon = R_0^2/L^2, \quad a = L\alpha, \quad b = R_0\beta, \quad X = Lx, \quad Y = R_0y, \quad R = R_0r, \quad t = \tau/q$$