

УДК 533.7

СООТНОШЕНИЯ СИММЕТРИИ ОНЗАГЕРА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

РОДУГИН В. И.

Соотношения, постулируемые неравновесной термодинамикой, носят довольно общий характер. Они заведомо следуют и из уравнения Больцмана. Вместе с тем точное решение последнего найдено лишь для некоторых частных случаев [1, 2], поэтому для нахождения функции распределения в большинстве практически интересных ситуаций используются те или иные приближенные методы, что может привести к нарушению соотношений неравновесной термодинамики.

В данной работе рассматривается моментный метод решения кинетического уравнения Больцмана [1, 2]. При построении моментов кинетического уравнения возникает вопрос о выборе функций скорости молекул, которые следует использовать для этой цели. Часть из них подбирают так, чтобы было обеспечено выполнение законов сохранения массы, импульса и энергии, выбор же остальных полиномов до недавнего времени оставался фактически произвольным.

В [3] было предложено накладывать на приближенное решение еще одно требование, обеспечивающее выполнение помимо упомянутых законов уравнения баланса энтропии в газе. Это дополнительное требование, использованное в совокупности с принципами неравновесной термодинамики, позволило получить один из возможных критериев выбора функции скорости для построения системы моментных уравнений.

Найденная таким путем функция распределения обладает важным и интересным свойством: вычисленные с ее помощью кинетические коэффициенты, входящие в макроскопические феноменологические уравнения неравновесной термодинамики, точно удовлетворяют соотношениям симметрии Онзагера. Иначе говоря, предложенный в [3] способ нахождения функции распределения обеспечивает выполнение не только уравнений баланса массы, импульса, энергии и энтропии, но и сохраняет один из фундаментальных законов — соотношения симметрии для кинетических коэффициентов.

Ниже это свойство приближенного решения уравнения Больцмана будет доказано при любой точности аппроксимации функции распределения и произвольных граничных условиях для нее.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением течения простого неоднородного по температуре и давлению газа в плоскопараллельном канале. Обобщение на другие возможные варианты течений газа и газовых смесей можно провести непосредственно, используя приведенную ниже процедуру доказательства.

1. Пусть в газе имеются малые постоянные градиенты температуры ∇T и давления ∇p , направленные вдоль канала (ось z), образованного двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии $2L$ друг от друга.

В этих условиях производство энтропии ΔS в единице объема канала имеет вид [3, 4]

$$\Delta S = -\frac{\mathbf{J}^q \nabla T}{T^2} - \frac{\mathbf{u} \nabla p}{T} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{J}^q = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx \int f v_z \left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) kT dv \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2Ln} \int_{-L}^L dx \int f v_z dv$$

Здесь J^q — поток тепла, u — скорость газа, f — функция распределения молекул газа по скоростям v , m — масса молекул, n — число частиц в единице объема, ось x направлена поперек канала.

Исходя из выражения (1.1) для производства энтропии, можно записать следующие феноменологические уравнения переноса:

$$J^q = \Lambda_{11} \frac{\nabla T}{T^2} + \Lambda_{12} \frac{\nabla p}{T}, \quad u = \Lambda_{21} \frac{\nabla T}{T^2} + \Lambda_{22} \frac{\nabla p}{T}$$

Согласно принципу Онзагера [4], должно выполняться соотношение $\Lambda_{12} = \Lambda_{21}$. Доказательство справедливости этого соотношения на основе точного решения кинетического уравнения Больцмана дано в [5]. Покажем, что этому равенству удовлетворяют и кинетические коэффициенты, найденные из приближенного решения линеаризованного уравнения Больцмана. Последнее в нашем случае имеет вид

$$f^0 \left[c_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + c_z \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) \tau + c_z \gamma \right] = f^0 I(\varphi) \quad (1.3)$$

$$c = v \sqrt{\frac{m}{2kT}}, \quad \tau = \frac{\partial \ln T}{\partial z}, \quad \gamma = \frac{\partial \ln p}{\partial z}$$

где $I(\varphi)$ — линеаризованный интеграл столкновений, f^0 — локальная максвелловская функция распределения, φ — поправка к ней ($f = f^0(1 + \varphi)$, $\varphi \ll 1$).

2. Прежде чем перейти к решению уравнения (1.3) методом моментов, обсудим вопрос о граничных условиях для функции распределения. Рассмотрим следствия применения методов неравновесной термодинамики к процессу рассеяния молекул газа поверхностью твердого тела.

Производство энтропии при столкновениях молекул со стенками канала определяется выражением [3, 6] (нормирующий множитель опущен)

$$\Delta \sigma_w = \int v_x f^0 \frac{\varphi^2}{2} dv \Big|_{x=\pm L} \quad (2.1)$$

Ограничимся для определенности рассмотрением производства энтропии на стенке $x = -L$. Представляя φ в виде суммы $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$, где φ^+ — функция распределения молекул, имеющих положительную составляющую скорости v_x , φ^- — отрицательную составляющую v_x , имеем

$$\Delta \sigma_w = \frac{1}{2} \int_{v_x > 0} v_x f^0 (\varphi^+)^2 dv + \frac{1}{2} \int_{v_x < 0} v_x f^0 (\varphi^-)^2 dv$$

где знаки $v_x > 0$ и $v_x < 0$ у интегралов означают, что интегрирование проводится по положительному и отрицательному полупространствам скоростей.

Выражение для производства энтропии $\Delta \sigma_w$ записано в форме, типичной при описании тензорных явлений [4]. Исходя из вида $\Delta \sigma_w$ и выбирая в качестве термодинамических сил величины φ^+ и φ^- , а в качестве термодинамических потоков — комбинации $v_x f^0 \varphi^+$ и $v_x f^0 \varphi^-$, запишем феноменологические уравнения

$$v_x f^0 \varphi^+ = \int_{v_x' > 0} \chi_{11}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi^+(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' + \int_{v_x' < 0} \chi_{12}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi^-(\mathbf{v}') d\mathbf{v}'$$

$$v_x f^0 \varphi^- = \int_{v_x' > 0} \chi_{21}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi^+(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' + \int_{v_x' < 0} \chi_{22}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \varphi^-(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \quad (2.2)$$

Соотношения Онзагера сводятся [4] к равенству

$$\chi_{21}(\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') = \chi_{12}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \quad (2.3)$$

Так как операторы χ_{ij} определенным образом связаны с ядром рассеяния молекул поверхностью твердого тела (см. ниже), то представляет интерес выяснить, какому свойству ядра рассеяния отвечает соотношение (2.3).

В обычных обозначениях граничные условия записываются в виде [2]

$$v_x f^0 \varphi^+ = \int_{v_x < 0} R(v' \rightarrow v) f^0 |v_x'| \varphi^-(v') dv' \quad (2.4)$$

где $R(v' \rightarrow v)$ — ядро рассеяния молекул поверхностью. Сравнивая (2.4) с (2.2), находим, что $\chi_{12}(v' \rightarrow v) = R(v' \rightarrow v) f^0(v') |v_x'|$, $\chi_{11} = 0$.

Воспользовавшись принципом обратимости законов механики и рассмотрев движение, обратное переходу $v' \rightarrow v$, мы можем написать граничное условие для функции обращенного движения φ_T^- :

$$f^0 v_x \varphi_T^- = \int R(v' \rightarrow v) f^0 |v_x'| \varphi_T^+ dv \quad (2.5)$$

Поскольку $\varphi_T^- = \varphi^-(-v)$, $\varphi_T^+ = \varphi^+(-v)$, то, сравнивая (2.5) со вторым уравнением (2.2), имеем $\chi_{21}(v' \rightarrow v) = R(-v' \rightarrow -v) f^0 |v_x'|$, $\chi_{22} = 0$. Отсюда и из (2.3) следует

$$|v_x'| f^0(v') R(v' \rightarrow v) = |v_x| f^0(v) R(-v \rightarrow -v')$$

т.е. отношения Онзагера (2.3) эквивалентны соотношению взаимности [2] для ядра рассеяния, обычно получаемому из других соображений.

При решении уравнений Больцмана методом моментов функцию распределения представляют в виде ряда

$$\varphi = \sum_{k=1}^N (a_k^+(x) P_k^+(v) + a_k^-(x) P_k^-(v)) \quad (2.6)$$

где $P_k^\pm$ — некоторые функции скорости v , отличные от нуля для $v_x > 0$ и $v_x < 0$. Граничные условия для коэффициентов $a_k^\pm(x)$ получают с помощью соотношения (2.4) (система граничных условий (2.2) не является независимой: второе уравнение может быть получено из первого, поэтому для решения граничных задач кинетической теории газов достаточно одного уравнения). При произвольном виде оператора рассеяния R возникает вопрос о построении граничных условий для коэффициентов $a^\pm(x)$.

Разрешить возникшую проблему можно, воспользовавшись принципами неравновесной термодинамики. Подставив в выражение (2.1) разложение (2.6), получаем выражение для производства энтропии

$$\Delta \sigma_w = \frac{1}{2} \sum_k \sum_i (\langle v_x P_k^+, P_i^+ \rangle a_k^+ a_i^+ + \langle v_x P_k^-, P_i^- \rangle a_k^- a_i^-) \\ \langle P_k, P_l \rangle = \int f^0 P_k P_l dv$$

Выбирая теперь в качестве термодинамических потоков комбинации $\sum_k \langle v_x P_k^+, P_i^+ \rangle a_k^+$ и $\sum_r \langle v_x P_r^-, P_s^- \rangle a_r^-$, в качестве термодинамических сил — a_i^+ и a_s^- , запишем феноменологические уравнения в виде

$$\sum_k \langle v_x P_k^+, P_i^+ \rangle a_k^+ = \sum_m L_{im}^{(11)} a_m^+ + \sum_n L_{in}^{(12)} a_n^- \\ \sum_r \langle v_x P_r^-, P_s^- \rangle a_r^- = \sum_g L_{sg}^{(21)} a_g^+ + \sum_p L_{sp}^{(22)} a_p^- \quad (2.7)$$

При этом должны иметь место соотношения Онзагера $L_{in}^{(12)} = L_{ni}^{(21)}$,

$L_{mn}^{(11)} = L_{nm}^{(11)}$, $L_{rs}^{(22)} = L_{sr}^{(22)}$. Сравнивая равенства (2.7) с уравнениями (2.2), (2.4), находим, что граничные условия для $a_k^\pm(x)$ получаются из граничных условий для φ путем взятия моментов с теми функциями скорости, по которым проводится разложение φ . Коэффициенты $L_{mn}^{(ij)}$ имеют следующие значения:

$$L_{mn}^{(11)} = L_{rs}^{(22)} = 0$$

$$L_{ml}^{(12)} = \iint P_m^+(\mathbf{v}) R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) P_l^-(\mathbf{v}') |v_x' f^0|(\mathbf{v}') d\mathbf{v} d\mathbf{v}'$$

$$L_{rs}^{(21)} = \iint P_r^-(\mathbf{v}) R(-\mathbf{v}' \rightarrow -\mathbf{v}) P_s^+(\mathbf{v}') |v_x' f^0|(\mathbf{v}') d\mathbf{v} d\mathbf{v}'$$

и соотношения Онзагера выполняются автоматически вследствие справедливости равенства (2.3).

3. Перейдем к определению функции распределения молекул газа по скоростям. Поскольку градиенты температуры и давления являются независимыми величинами, то поправку φ (соответственно $\alpha_k^\pm$) можно представить в виде $\varphi = \tau\varphi_t + \gamma\varphi_p$ и уравнение (1.3) распадается на два

$$\begin{aligned} f^0 \left[c_x \frac{\partial \varphi_p}{\partial x} + c_x \right] f^0 I(\varphi_p), \\ f^0 \left[c_x \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} + c_x \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) \right] = f^0 I(\varphi_t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Следуя схеме метода моментов [3], подставим в уравнения (3.1) φ из (2.6) и возьмем моменты P_k^+ , P_k^- ($k=1, \dots, N$). В результате приходим к уравнениям

$$A U_d(\nabla_x) X_{p, i} = K X_{p, i} + Y_{p, i} \quad (3.2)$$

Здесь A и K — симметричные матрицы, составленные из элементов $a_{ij} = \langle P_i^\pm, c_x P_j^\pm \rangle$, $k_{ij} = \langle P_i^\pm I(P_j^\pm) \rangle$, Y_p и Y_t — векторы с компонентами $y_{ti} = \langle P_i^\pm, c_x (c^2 - 5/2) \rangle$, $y_{pi} = \langle P_i^\pm, c_x \rangle$, векторы X_p и X_t образованы из коэффициентов $a_{pi}^\pm$ и $a_{ti}^\pm$ соответственно, под $U_d(\nabla_x)$ подразумевается матрица с оператором $\nabla_x = \partial/\partial x$, расположенным на главной диагонали

$$U_d(\nabla_x) = \begin{pmatrix} \nabla_x & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \nabla_x & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \nabla_x & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

полиномы $P^\pm$ расположены в матрицах и векторах в следующей последовательности:

$$\begin{pmatrix} P^+ P^+ & P^+ P^- \\ P^- P^+ & P^- P^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P^+ \\ P^- \end{pmatrix}$$

Граничные условия для коэффициентов $a_k^\pm$ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_m \beta_{km}^+ a_m^+ &= \sum_i L_{ki}^{(12)} a_i^- \quad (x = -L) \\ \sum_r \beta_{qr}^- a_r^- &= \sum_s L_{qs}^{(21)} a_s^+ \quad (x = +L) \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\beta^\pm$ — симметричные матрицы с элементами $\beta_{km}^\pm = \langle c_x P_k^\pm, P_m^\pm \rangle$.

Формальное решение уравнений (3.2) с граничными условиями (3.3) таково

$$X_{p,t} = \left(W + F U_I \left(\int_{-L}^L dx \right) \right) (A^{-1} K X_{p,t} + A^{-1} Y_{p,t}) \quad (3.4)$$

$$W = \begin{pmatrix} [J^-] & 0 \\ 0 & [J^+] \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} (\beta^+)^{-1} L^{(12)} D_1 (\beta^-)^{-1} L^{(21)}, & -(\beta^+)^{-1} L^{(12)} D_1 \\ (\beta^-)^{-1} L^{(21)} D_2, & -(\beta^-)^{-1} L^{(21)} D_2 (\beta^+)^{-1} L^{(12)} \end{pmatrix}$$

$$D_1 = (1 - (\beta^-)^{-1} L^{(12)} (\beta^+)^{-1} L^{(12)})^{-1}, \quad D_2 = (1 - (\beta^+)^{-1} L^{(12)} (\beta^-)^{-1} L^{(21)})^{-1}$$

$$U_I \left(\int_{-L}^L dx \right) = \begin{bmatrix} \int_{-L}^L dx & 0 & 0 \dots \\ 0 & \int_{-L}^L dx & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Здесь A^{-1} — матрица, обратная A , 0 означает нулевую матрицу порядка N , $[J^-]$ ($[J^+]$) — диагональную матрицу порядка N с оператором

$$J^- = \int_{-L}^x dx \left(J^+ = \int_x^L dx \right), \text{ расположенным на главной диагонали. Заметим,}$$

что матрица A может быть выражена через $\beta^\pm$:

$$A = \begin{pmatrix} \beta^+ & 0 \\ 0 & \beta^- \end{pmatrix}$$

Преобразуем равенство (3.4) к виду

$$X_{p,t} = \Phi (W + F U_I) A^{-1} Y_{p,t} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= [1 - (W + F U_I) A^{-1} K]^{-1} = \\ &= 1 + (W + F U_I) A^{-1} K + (W + F U_I) A^{-1} K (W + F U_I) A^{-1} K + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Заметим, что поскольку уравнения (3.4) являются уравнениями типа Вольтерра, то ряд (3.6) формально можно считать сходящимся.

Найдем теперь поток тепла, вызванный градиентом давления, и поток вещества, вызванный градиентом температуры. Из (1.2) и (2.6) имеем

$$J_p^q = -\frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx Y_t X_p \gamma,$$

$$u_t = \frac{1}{2Ln} \int_{-L}^L dx Y_p X_t \tau$$

Соотношение симметрии Онзагера $\Lambda_{12} = \Lambda_{21}$ эквивалентно равенству

$$\int_{-L}^L dx Y_t X_p = \int_{-L}^L dx Y_p X_t \quad (3.7)$$

4. Покажем, что для решений уравнений (3.4) равенство (3.7) действительно имеем место. Используя выражение (3.5) для $X_{p,t}$, перепишем

соотношение (3.7) в виде

$$\int_{-L}^L dx Y_l \Phi(W + FU_l) A^{-1} Y_p = \int_{-L}^L dx Y_p \Phi(W + FU_l) A^{-1} Y_l \quad (4.1)$$

Справедливость равенства (4.1) будем устанавливать для произвольно-го члена разложения (3.6) оператора Φ . Иначе говоря, докажем равенство

$$\int_{-L}^L dx Y_p G_r Y_l = \int_{-L}^L dx Y_l G_r Y_p \quad (r=0, 1, \dots) \quad (4.2)$$

$$G_r = \underbrace{(W + FU_l) A^{-1} K \dots (W + FU_l) A^{-1} K}_{r} (W + FU_l) A^{-1} \quad (4.3)$$

Следует заметить, что оператор W (и, следовательно, G_r) не является, вообще говоря, самосопряженным по отношению к скалярному произведению

$$(\rho_1, \rho_2) = \int_{-L}^L dx \rho_1 \rho_2$$

т. е. $\int_{-L}^L dx \rho_1 W \rho_2 \neq \int_{-L}^L dx \rho_2 W \rho_1$ при произвольных векторах ρ_1 и ρ_2 . В нашем случае, однако, векторы $Y_{l,p}$ не зависят от x , поэтому равенство (4.2) эквивалентно соотношению

$$Y_p H_r Y_l = Y_l H_r Y_p \quad (4.4)$$

где H_r — уже просто числовая матрица, которая, как будет показано ниже, является симметричной.

Рассмотрим структуру оператора G_r . Он состоит из суммы членов вида

$$\underbrace{WA^{-1}K \dots WA^{-1}K}_n \underbrace{FU_l^T A^{-1}K \dots FU_l^T A^{-1}K}_q \underbrace{WA^{-1}K \dots WA^{-1}K}_l \times \\ \times \underbrace{FU_l A^{-1}K \dots FU_l A^{-1}K}_p \dots KWA^{-1}, \quad n + q + l + p + \dots = r. \quad (4.5)$$

Как нетрудно видеть из (4.3), каждому слагаемому вида (4.5) в G_r можно найти соответствующий член, в котором операторы W и FU_l имеют противоположный порядок (совпадающий с исходным, но при чтении справа налево). Далее, расположение оператора K в (4.5) совпадает с его расположением в «противоположном» слагаемом. Оператор $FU_l A^{-1}$ является симметричным, т. е. $(FU_l A^{-1})^T = FU_l A^{-1}$, где знак T означает транспонированную матрицу. Отсюда следует, что для доказательства симметрии матрицы H_r нужно установить при произвольном s симметрию матрицы

$$\int_{-L}^L dx WA^{-1}K \dots WA^{-1}KWA^{-1} = \int_{-L}^L Q_s dx \quad (4.6)$$

С этой целью исследуем более подробно оператор Q_s . В него входит оператор W и числовые матрицы A^{-1} и K , которые симметричны и могут быть записаны следующим образом:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} B_1 & B_0^T \\ B_0 & B_2 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — симметричные матрицы порядка N .

Формально оператор Q_s состоит из произведения симметричных матриц, поэтому его можно записать аналогично (4.7)

$$Q_s = \begin{pmatrix} q_1 & q_0^T \\ q_0 & q_2 \end{pmatrix}$$

Поскольку операторы J^- и J^+ коммутируют с числовыми матрицами A_m , B_m , то в q_m их можно переставить и записать последние в виде

$$q_m = \sum_l \Pi_l^{(m)} F_l^{(m)}$$

где $F_l^{(m)}$ — произведение матриц A_m , B_m , а $\Pi_l^{(m)}$ — произведение операторов J^- и J^+ , причем матрицы $F_l^{(m)}$ для $m=1, 2$ симметричны.

Так как $(AB)^T = B^T \cdot A^T$, то в $(\Pi_l^{(0)})^T$ и $\Pi_l^{(0)}$ операторы J^- и J^+ имеют противоположные последовательности.

В силу постоянства векторов $Y_{p,i}$ действие на них операторов J^- и J^+ эквивалентно умножению на некоторый полином от x . В g_0 и g_0^T эти полиномы, вообще говоря, различны из-за вышеуказанной перестановки операторов, поэтому Q_s можно представить в виде некоторой матрицы

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{4} \\ \boxed{3} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

у которой блоки 1 и 2 симметричны, а блоки 3 и 4 транспонированные по отношению друг к другу матрицы, если только отвлечься от различия входящих в блоки 3 и 4 полиномов от x . Доказательство симметричности матрицы (4.6) сводится к установлению справедливости равенства

$$\int_{-L}^L dx \Pi_l^{(0)} = \int_{-L}^L dx (\Pi_l^{(0)})^T \tag{4.8}$$

т. е. перестановка операторов J^- и J^+ не изменяет интегралов от получающихся в результате перестановки полиномов.

Рассмотрим частный случай, когда $\Pi_l^{(0)}$ состоит из $n-1$ оператора J^+ и только одного оператора J^- . Покажем, что имеет место равенство

$$\int_{-L}^L dx \underbrace{J^+ \dots J^+}_k \cdot J^- \cdot \underbrace{J^+ \dots J^+}_m = \int_{-L}^L dx \underbrace{J^+ \dots J^+}_m \cdot J^- \cdot \underbrace{J^+ \dots J^+}_k, \quad m + k + 1 = n \tag{4.9}$$

В (4.9) заменим J^- на $\int_{-L}^L dx -J^+$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L dx \underbrace{J^+ \dots J^+}_k - \int_{-L}^L dx \underbrace{J^+ \dots J^+}_m - \int_{-L}^L dx \underbrace{J^+ \dots J^+}_n = \\ & = \int_{-L}^L dx \underbrace{J^+ \dots J^+}_m - \int_{-L}^L dx \underbrace{J^+ \dots J^+}_k - \int_{-L}^L dx \underbrace{J^+ \dots J^+}_n \end{aligned} \tag{4.10}$$

Вторые слагаемые в (4.10) равны между собой; легко видеть, что равны и первые слагаемые, так как они представляют собой произведение

$$\int_{-L}^L dx \underbrace{J^+ \dots J^+}_k, \quad \int_{-L}^L dx \underbrace{J^+ \dots J^+}_m$$

Повторяя несколько раз приведенную выше процедуру, можно доказать справедливость равенства (4.8) при любом числе элементов J^- .

Таким образом, матрица H , симметрична и справедливо соотношение (4.5), а следовательно, справедливо и равенство (4.1), т. е. имеет место точное выполнение соотношений симметрии Онзагера для кинетических коэффициентов.

Теорема Онзагера доказана на основе довольно общих предположений, поэтому от всякого приближенного решения уравнения Больцмана следует требовать точного выполнения не только законов сохранения энергии, импульса и массы, но и одного из фундаментальных законов природы — соотношений симметрии для кинетических коэффициентов.

Как показано выше, использование принципов неравновесной термодинамики при построении системы моментных уравнений [3] и граничных условий гарантирует сохранение соотношений Онзагера при любой точности решения кинетического уравнения. В этом можно видеть преимущество развитого в [3] и данной работе метода нахождения решения уравнения Больцмана. Кроме того, полученный результат указывает на общий подход к построению приближенных решений кинетических уравнений, обеспечивающий выполнение соотношений, постулируемых неравновесной термодинамикой.

Автор выражает благодарность Б. В. Дерягину и С. П. Баканову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
3. Баканов С. П., Ролдугин В. И. Граничные задачи кинетической теории газов и необратимая термодинамика. — ПММ, 1977, т. 41, № 4, с. 651–659.
4. Groor C. P. de, Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
5. Loyalka S. K. Kinetic theory of thermal transpiration and mechanocaloric effect. 1. — J. Chem. Phys., 1974, v. 55, № 9, p. 4497–4503.
6. Waldmann L., Vestner H. Non-equilibrium thermodynamisc of the gas kinetic boundary value problem. — Physica, 1979, v. 99A, № 1–2, p. 1–33.

Москва

Поступила в редакцию
25.V.1982