

УДК 532.6:541.183

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ МАССЫ, ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ФАЗ ДЛЯ ИСТИННЫХ И ИЗБЫТОЧНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

**ГОГОСОВ В. В., НАЛЕТОВА В. А., ЧЫОНГ ЗА БИНЬ,
ШАПОШНИКОВА Г. А.**

Общая теория соотношений на поверхности сильного разрыва в классической механике сплошных сред хорошо известна [1]. Законы сохранения массы, импульса и энергии на разрыве связывают характеристики сред, разделяемых поверхностью разрыва, и скорость его распространения. Дальнейшее развитие этой теории определяется различными способами конкретизации свойств поверхности разрыва.

Одним из наиболее распространенных и интересных типов поверхностей разрыва является поверхность контакта двух объемных фаз, например жидкости с жидкостью, жидкости с газом или твердым телом и др. Такого типа поверхности раздела представляют собой достаточно узкий переходный слой, характеристики которого — плотность, скорость, компоненты тензора напряжений, внутренняя энергия, температура, а также коэффициенты вязкости и теплопроводности — непрерывно меняются внутри этого слоя. Параметры в слое асимптотически стремятся к соответствующим значениям в объемных фазах и поэтому толщина слоя определяется весьма условно. Основная особенность межфазного слоя связана с его ярко выраженной анизотропией и аномальным распределением параметров среды внутри него.

Во многих случаях переходный слой удобно моделировать поверхностью раздела — сильным разрывом. При таком моделировании могут вводиться параметры, описывающие свойства этой поверхности: поверхностные плотности, скорость, внутренняя энергия, температура и энтропия. Для нахождения распределения этих параметров вдоль поверхности необходимо выписать законы сохранения массы, импульса и энергии для поверхностных величин. С другой стороны, такие уравнения являются граничными условиями — соотношениями на разрыве — для объемных параметров. Сложность в написании законов сохранения поверхностных характеристик на границе раздела фаз связана с неопределенностью введения поверхностных параметров.

«Истинные» поверхностные плотность, импульс, энергия и другие параметры могут быть введены интегрированием по толщине слоя, соответствующих объемных параметров, характеризующих среду в переходном межфазном слое, которая, как правило, известна только по порядку величины.

Неопределенности при таком введении истинных поверхностных параметров, связанной с незнанием толщины слоя, можно избежать введением, следуя работе [2], «избыточных» величин, которые слабо зависят от толщины переходного слоя. Введение избыточных параметров тем более оправдано, что одна из основных характеристик поверхности раздела — поверхностное натяжение — вводится как избыточная величина [3–7].

Трудность, возникающая при написании уравнений для избыточных параметров, заключается в том, что законы сохранения массы, импульса и энергии и уравнения состояния для них (тем более при наличии фазовых превращений, потоков веществ к поверхности и сквозь нее), так же как и уравнения для истинных поверхностных параметров, вообще говоря, отличаются по структуре от соответствующих уравнений для объемных величин.

Во многих работах [8–16] поверхностная гидродинамика строится аналогично тому, как это делается в объеме. Вводятся число частиц или плотность, рассчитанные на единицу площади поверхности, средняя скорость движения этих частиц, их внутренняя поверхностная энергия, температура, энтропия и выписываются законы сохранения для этих величин с учетом обмена массой, импульсом и энергией между поверхностной и объемными фазами. При выводе замыкающих соотношений для векторов диффузии и потока тепла вдоль поверхности, поверхностного тензора вязких напряжений, потока массы к поверхности и т. д. используются методы термо-

динамики необратимых процессов. Вид законов сохранения для поверхностных величин в [8–16] постулировался без каких-либо обоснований аналогично соответствующим законам для объемных величин.

В работах [17, 18] при ряде упрощающих предположений выводятся уравнения сохранения массы [17] и импульса [17, 18] для избыточных величин интегрированием объемных уравнений, описывающих поведение вещества в межфазном слое, по толщине слоя.

В данной работе методом осреднения объемных уравнений для межфазного слоя получены уравнения сохранения массы, импульса и уравнение притока тепла для истинных и избыточных величин в случае, когда существует поток массы через поверхность раздела, например при испарении и конденсации. Среда внутри межфазного слоя предполагается существенно анизотропной. Указаны предположения, при которых уравнения для истинных и избыточных величин принимают вид, аналогичный соответствующим уравнениям в объеме.

Показано, что градиент вдоль слоя интеграла от произведения коэффициента вязкости внутри слоя и производной от перпендикулярной к слою составляющей скорости по нормали приводит к появлению дополнительной силы, действующей аналогично градиенту поверхностного натяжения, которая ранее не учитывалась. В случае криволинейной поверхности в формуле Лапласа, связывающей давления в фазах, также, вообще говоря, необходимо учитывать аналогичное слагаемое [19].

Поперек слоя может происходить существенное изменение плотности, так что внутри слоя $\text{div } \mathbf{u} \neq 0$. В связи с этим полученные в данной работе выражения для коэффициентов поверхностной вязкости отличаются от соответствующих формул работы [18], в которой предполагалось, что внутри слоя $\text{div } \mathbf{u} = 0$.

1. Характеристика поверхности раздела. Истинные и избыточные поверхностные величины. Рассмотрим плоскую поверхность раздела двух сред с учетом потока массы через нее. Примером такой поверхности может служить поверхность раздела жидкость — пар при наличии процессов конденсации и испарения. Между двумя средами — объемными фазами, характеристики которых будут обозначаться индексами I и II, находится узкая зона (толщиной порядка 10–100 Å), в которой происходит непрерывный переход характеристик среды от значений в фазе I до значений в фазе II. Среда в этой зоне является в отличие от объемных фаз I и II существенно анизотропной, так как процессы переноса вдоль и поперек слоя происходят по-разному [18]. На границах этого слоя среда становится изотропной и вне слоя описывается обычной моделью несжимаемой, теплопроводной, вязкой жидкости. Характерные параметры среды, а также коэффициенты вязкости и теплопроводности в фазах I и II различаются. Внутри переходного слоя параметры среды могут изменяться вдоль и поперек слоя.

Введем декартову прямолинейную инерциальную систему координат $K^*(x')$, так что в рассматриваемый момент времени границами слоя являются плоскости $x^3 = \epsilon_1$, $x^3 = -\epsilon_2$, $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, $\epsilon_2 + \epsilon_1 = \epsilon = \text{const}$ (фиг. 1), скорость движения которых в этой системе равняется нулю. Выбранная система координат, вообще говоря, движется со скоростью D [1] относительно неподвижной системы координат K . На границах межфазного слоя плотность, скорость, давление и температура принимают значения ρ_0^I , $\mathbf{u}_0^I$, p_0^I , T_0^I (ρ_0^{II} , $\mathbf{u}_0^{II}$, p_0^{II} , T_0^{II}) при $x^3 = \epsilon_1$ ($x^3 = -\epsilon_2$). Среда, заключенная внутри переходного слоя, описывается уравнениями анизотропно вязкой и теплопроводной среды, в которой даже в случае несжимаемых фаз I и II уже нельзя считать $\text{div } \mathbf{u} = 0$: плотность среды ρ поперек этого слоя меняется от значения ρ_0^I до ρ_0^{II} . Компоненты тензора напряжений P_{ij} в такой анизотропной среде в системе координат K^* имеют вид [18] (u_i — компоненты скорости среды относительно подвижной системы координат K^*)

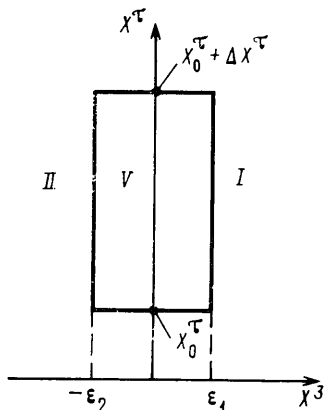
$$P_{11} = -p_i + (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \lambda' \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x^3}$$

$$P_{22} = -p_i + \lambda' \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x^3}$$

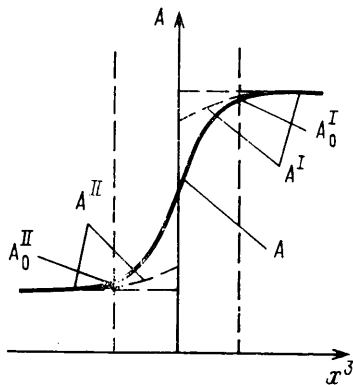
(1.1)

$$\begin{aligned}
 P_{33} &= -p_n + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \\
 P_{12} &= \mu' \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right), \quad P_{13} = \mu'' \left(\frac{\partial u_3}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^3} \right) \\
 P_{23} &= \mu'' \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^2} \right)
 \end{aligned}$$

Наличие пяти коэффициентов вязкости λ , λ' , μ , μ' , μ'' , являющихся непрерывными функциями x^3 внутри слоя, связано с предположением о симметрии свойств среды относительно вращения вокруг нормали к поверх-



Фиг. 1



Фиг. 2

ности $x^3=0$. На границе слоя выполнены равенства $\lambda=\lambda'=\lambda^I$, $\mu=\mu'=\mu''=\mu^I$ при $x^3=\epsilon_1$ и $\lambda=\lambda'=\lambda^{II}$, $\mu=\mu'=\mu''=\mu^{II}$ при $x^3=-\epsilon_2$.

Закон теплопроводности в системе координат K^* зададим в виде

$$q_3 = -\kappa_n \frac{\partial T}{\partial x^3}, \quad q_\tau = -\kappa_t \frac{\partial T}{\partial x^\tau} \quad (1.2)$$

Здесь κ_n , κ_t — коэффициенты теплопроводности, $\mathbf{q}$ — вектор потока тепла, T — температура среды, здесь и далее греческие индексы τ и η принимают значения 1, 2, латинские индексы принимают значения 1, 2, 3.

Рассмотрим объем V , ограниченный поверхностью Σ — плоскостями $x^3=\epsilon_1$, $x^3=-\epsilon_2$, $x^\tau=x_0^\tau$, $x^\tau=x_0^\tau+\Delta x^\tau$ (фиг. 1). Уравнения сохранения массы, импульса и притока тепла в объеме имеют вид (здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\tau + \int_\Sigma \rho u_n d\Sigma = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u d\tau + \int_\Sigma (\rho u u_n - P_n) d\Sigma = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho U_m d\tau + \int_\Sigma \rho u_n U_m d\Sigma - \int_V P_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} d\tau + \int_\Sigma q_n d\Sigma = 0 \quad (1.5)$$

Здесь P_n — поверхностная сила с компонентами $P_{in}=P_{ij}n_j$, действующая на поверхности Σ , U_m — внутренняя энергия единицы массы среды,

$d\epsilon_{ij}/dt$ — тензор скоростей деформации, τ_{ij} — тензор вязких напряжений, n — единичный вектор нормали к поверхности Σ .

Предположим, что внутренняя энергия U_m является функцией энтропии единицы массы среды s_m и тензора деформации ϵ_{ij} , удовлетворяющей тождеству Гиббса

$$dU_m = T ds_m + \frac{p_{ij}}{\rho} d\epsilon_{ij}, \quad p_{ij} = P_{ij} - \tau_{ij} \quad (1.6)$$

Из уравнений (1.6) и (1.5) можно получить интегральное уравнение изменения энтропии.

Определим истинные поверхностные величины A_σ формулой

$$A_\sigma = \int_{-\epsilon_2}^{\epsilon_1} A dx^3 \quad (1.7)$$

Будем моделировать межфазный переходный слой с непрерывно меняющимися параметрами поверхностью, условно разделяющей фазы I и II, на которой характеристики этих фаз, вообще говоря, терпят разрыв. Пусть эта поверхность совпадает с плоскостью $x^3=0$.

Предположим, что в области $0 < x^3 < \epsilon_1$ ($-\epsilon_2 < x^3 < 0$) параметры среды, обозначаемые индексами I (II), описываются теми же уравнениями, что и фазы I (II), а на границах слоя $x^3 = \epsilon_1$ ($x^3 = -\epsilon_2$) параметры и их производные равны соответствующим значениям в фазах I (II). Везде вне плоскости $x^3=0$ параметры являются гладкими функциями. На фиг. 2 жирной линией схематично изображено распределение в слое некоторого параметра A (плотности, скорости и т. д.); пунктирными линиями изображено распределение параметров A^I и A^{II} при моделировании межфазного слоя разделяющей поверхностью $x^3=0$. При таком моделировании для любого параметра можно ввести скачок A на разделяющей поверхности $x^3=0$

$$\{A\}_-^+ = \lim_{\substack{x^3 \rightarrow 0 \\ x^3 > 0}} A^I - \lim_{\substack{x^3 \rightarrow 0 \\ x^3 < 0}} A^{II} \quad (1.8)$$

Определим избыточные поверхностные величины A_{ex} формулой

$$A_{ex} = \int_0^{\epsilon_1} (A - A^I) dx^3 + \int_{-\epsilon_2}^0 (A - A^{II}) dx^3 \quad (1.9)$$

2. Закон сохранения массы. Истинная и избыточная плотности. Записывая закон сохранения массы (1.3) для объема V , считая Δx^i малыми, получим ($\{A\} = A_0^I - A_0^{II}$)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \Delta x^1 \Delta x^2 \int_{-\epsilon_2}^{\epsilon_1} \rho dx^3 + \Delta x^1 \Delta x^2 \{ \rho u_3 \} + \Delta x^2 \left[\int_{-\epsilon_2}^{\epsilon_1} \rho (x_0^1 + \Delta x^1) u_1 (x_0^1 + \Delta x^1) dx^3 - \right. \\ & \left. - \int_{-\epsilon_2}^{\epsilon_1} \rho (x_0^1) u_1 (x_0^1) dx^3 \right] + \Delta x_1 \left[\int_{-\epsilon_2}^{\epsilon_1} \rho (x_0^2 + \Delta x^2) u_2 (x_0^2 + \Delta x^2) dx^2 - \right. \\ & \left. - \int_{-\epsilon_2}^{\epsilon_1} \rho (x_0^2) u_2 (x_0^2) dx^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

После деления на $\Delta x^1 \Delta x^2$ при $\Delta x^1 \rightarrow 0$, $\Delta x^2 \rightarrow 0$ уравнение (2.1) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} \rho dx^3 + \{\rho u_3\} + \frac{\partial}{\partial x^\tau} \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_2} \rho u_\tau dx^3 = 0 \quad (2.2)$$

Будем считать, что характерный размер изменения u_τ много больше ε (предположение о малости изменения u_τ на толщине слоя связано с вязкостью сред и согласуется с экспериментальными данными [18])

$$u_\tau = u_{\tau 0}^I \approx u_{\tau 0}^{II} \approx u_{s\tau} \quad (2.3)$$

Используя формулы (1.7) при $A \equiv \rho$ и (2.3), уравнение (2.2) можно записать в виде закона сохранения массы на поверхности для истинной поверхностной плотности

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_s = - \frac{\partial}{\partial x^\tau} \rho_s u_{s\tau} - \{\rho u_3\} \quad (2.4)$$

Моделируя межфазный слой поверхностью раздела, как это сделано в п. 1, выпишем закон сохранения массы в объеме V для параметров A^I и A^{II} (фиг. 2), используя процедуру, аналогичную применяемой при выводе уравнения (2.2)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\varepsilon_1} \rho^I dx^3 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\varepsilon_2}^0 \rho^{II} dx^3 + \{\rho^I u_3^I\}_+ + \{\rho^{II} u_3^{II}\}_- + \\ & + \frac{\partial}{\partial x^\tau} \int_0^{\varepsilon_1} \rho^I u_{\tau}^I dx^3 + \frac{\partial}{\partial x^\tau} \int_{-\varepsilon_2}^0 \rho^{II} u_{\tau}^{II} dx^3 = 0 \\ & \{A\}_+ = A_0^I - \lim_{\substack{x^3 \rightarrow 0 \\ x^3 > 0}} A^I, \quad \{A\}_- = \lim_{\substack{x^3 \rightarrow 0 \\ x^3 < 0}} A^{II} - A_0^{II} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Вычитая уравнение (2.5) из уравнения (2.2) с учетом граничных условий при $x^3 = \varepsilon_1$ и $x^3 = -\varepsilon_2$, условий (2.3) и формулы (1.9) при $A \equiv \rho$, получим уравнение для избыточной плотности

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{ex} = - \frac{\partial}{\partial x^\tau} \rho_{ex} u_{s\tau} - \{\rho u_3\}_- \quad (2.6)$$

Нетрудно видеть, что для функции $\rho(x^3)$, монотонно меняющейся от ρ_0^I до ρ_0^{II} , всегда можно выбрать положение разделяющей поверхности $x^3 = 0$ так, что $\rho_{ex} = 0$. При таком выборе разделяющей поверхности, которая называется эквимолекулярной поверхностью, уравнение (2.6) упрощается

$$\{\rho u_3\}_- = 0 \quad (2.7)$$

3. Закон сохранения импульса. Истинный и избыточный импульсы. Используя уравнение (1.4), выпишем баланс импульса в рассматриваемом объеме для анизотропной среды с переменной плотностью ρ и тензором напряжений, определяемым формулами (1.1). После выкладок, аналогичных проведенным в п. 2 при выводе уравнения сохранения массы (2.2), и при тех же предположениях получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} \rho u_3 dx^3 + \nabla_{s\tau} \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_2} \rho u_\tau u_3 dx^3 = \{P_{33}\} - \{\rho u_3^2\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \mu'' \frac{\partial \Theta}{\partial x^3} dx^3 + \Delta_s \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \mu'' u_3 dx^3 \\
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \rho u_\eta dx^3 + \nabla_{s\tau} \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \rho u_\tau u_\eta dx^3 = \{P_{\eta 3}\} - \{\rho u_\eta u_3\} + \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial x^\tau} P_{\eta\tau} dx^3 \\
& \Theta = \frac{\partial}{\partial x^\tau} u_\tau, \quad \nabla_{s\tau} = \frac{\partial}{\partial x^\tau}, \quad \Delta_s = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Используя формулу (1.7) для $A_i = \rho u_i$, введем истинный поверхностный импульс $\Pi_i = A_{i0}$. Отметим, что составляющие импульса Π_τ с учетом (2.3) могут быть записаны в виде $\Pi_\tau = \rho_\sigma u_{s\tau}$. При этом уравнение (3.1) примет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \Pi_3 + \nabla_{s\tau} \Pi_3 u_{s\tau} = \{P_{33}\} - \{\rho u_3^2\} + \Delta_s \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \mu'' u^3 dx^3 + \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \mu'' \frac{\partial \Theta}{\partial x^3} dx^3 \\
& \frac{\partial}{\partial t} \rho_\sigma u_{s\eta} + \nabla_{s\tau} \rho_\sigma u_{s\tau} u_{s\eta} = \{P_{\eta 3}\} - \{\rho u_\eta u_3\} + \nabla_{s\eta} \alpha_\sigma + \gamma_\sigma \nabla_{s\eta} \Theta_s + \\
& + \mu'_\sigma \Delta_s u_{s\eta} + \nabla_{s\eta} \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \lambda(x^3) \frac{\partial u_3}{\partial x^3} dx^3 \\
& \alpha_\sigma = - \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} p_t dx^3, \quad \gamma_\sigma = \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} (\lambda' + \mu') dx^3
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\mu'_\sigma = \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \mu' dx^3, \quad \Theta_s = \frac{\partial}{\partial x^\tau} u_{s\tau}$$

Используя предположения п. 2, можно вывести уравнения баланса импульса в проекции на ось x^3 и плоскость $x^3=0$ в объеме V для введенных в п. 1 величин A^I и A^{II} при моделировании межфазного слоя разделяющей поверхностью $x^3=0$. Вычитая полученные уравнения из соответствующих уравнений (3.1), получим уравнения для избыточного поверхностного импульса (величина Π_{3ex} определяется выражением (1.9), в котором $A = \rho u_3$; α_{ex} — коэффициент поверхностного натяжения)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi_{3ex} + \nabla_{s\tau} u_{s\tau} \Pi_{3ex} = \{P_{33}\}_-^+ - \{\rho u_3^2\}_-^+ + \Delta_s (\mu'' u_3)_{ex} + (\mu'' (\partial \Theta / \partial x^3))_{ex} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \rho_{ex} u_{s\eta} + \nabla_{s\tau} \rho_{ex} u_{s\tau} u_{s\eta} = \{P_{\eta 3}\}_-^+ - \{\rho u_\eta u_3\}_-^+ + \nabla_{s\eta} \alpha_{ex} + \\
& + \gamma_{ex} \nabla_{s\eta} \Theta_s + \mu_{ex} \Delta_s u_{s\eta} + \nabla_{s\tau} (\lambda \partial u_3 / \partial x^3)_{ex}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\alpha_{ex} = (-p_t)_{ex}, \quad \gamma_{ex} = (\lambda' + \mu')_{ex}, \quad \mu'_{ex} = (\mu')_{ex}$$

Предполагая конечность всех величин в подынтегральных выражениях двух последних слагаемых уравнения (3.4), а также малость толщины переходного слоя, этими слагаемыми можно пренебречь. Уравнение (3.4) примет вид закона сохранения избыточного импульса в проекции на

ось x^3

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi_{3ex} + \nabla_{s\tau} \Pi_{3ex} u_{s\tau} = \{P_{33}\}_{-}^{+} - \{\rho u_3^2\}_{-}^{+} \quad (3.6)$$

Считая величину Π_{3ex} малой, уравнение (3.6) можно записать в обычном виде [1]

$$\{P_{33}\}_{-}^{+} = \{\rho u_3^2\}_{-}^{+} \quad (3.7)$$

Упростим уравнение (3.5). Предположим, что $\lambda^I \partial u_3^I / \partial x^3$ и $\lambda^{II} \partial u_3^{II} / \partial x^3$ конечны, а $\partial u_3 / \partial x^3$ имеет порядок $(u_{03}^I - u_{03}^{II}) / \varepsilon$, т. е. в межфазном слое производная $\partial u_3 / \partial x^3$ велика. При таких предположениях последнее слагаемое в уравнении (3.5) может быть записано в виде

$$\nabla_{s\tau} \int_{-e_2}^{\sigma} \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x^3} dx^3$$

С учетом теоремы Лагранжа о среднем в предположении постоянства знака $\partial u_3 / \partial x^3$ это слагаемое равно

$$\nabla_{s\tau} \lambda^* \{u_3\} = \nabla_{s\tau} \lambda^* (u_{03}^I - u_{03}^{II})$$

Здесь λ^* — некоторое значение, заключенное между минимальным $\lambda_{\min}$ и максимальным $\lambda_{\max}$ значениями λ в межфазном слое. Полагая параметры объемных фаз мало меняющимися на толщине слоя, можно приближенно считать, что

$$u_{03}^I \approx \lim_{\substack{x^3 \rightarrow 0 \\ x^3 > 0}} u_3^I, \quad u_{03}^{II} \approx \lim_{\substack{x^3 \rightarrow 0 \\ x^3 < 0}} u_3^{II}$$

При этом $\nabla_{s\tau} \lambda^* \{u_3\} = \nabla_{s\tau} \lambda^* \{u_3\}_{-}^{+}$ и уравнение (3.5) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{ex} u_{s\eta} + \nabla_{s\tau} \rho_{ex} u_{s\eta} u_{s\tau} &= \{P_{\eta 3}\}_{-}^{+} - \{\rho u_{\eta} u_3\}_{-}^{+} + \nabla_{s\eta} \alpha_{ex} + \\ &+ \gamma_{ex} \nabla_{s\eta} \Theta_s + \mu_{ex}' \Delta_s u_{s\eta} + \nabla_{s\tau} (\lambda^* \{u_3\}_{-}^{+}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

На эквимолекулярной поверхности в уравнении (3.8) следует положить ρ_{ex} равным нулю.

Уравнение (3.8) отличается от известных уравнений импульса для избыточных величин, а также от классического соотношения на поверхности разрыва для скачка компонент тензора напряжений [1]. Качественно новым является наличие дополнительной силы, связанной с неоднородностью вдоль поверхности раздела процессов массообмена. Вклад этого слагаемого в перенос импульса через границу раздела аналогичен вкладу градиента вдоль поверхности от коэффициента поверхностного натяжения α_{ex} . Важно отметить, что направление этой силы может не совпадать с направлением соответствующей силы, вызываемой поверхностным натяжением. Можно показать, что величина $\lambda^* \{u_3\}$ может быть сравнима с α_{ex} [19]. Отметим, что слагаемое $\lambda^* \{u_3\}$ положительно при испарении и отрицательно при конденсации, тогда как α_{ex} всегда положительно. При выводе уравнения импульса в [18] предполагалось, что внутри переходного слоя $\text{div } \mathbf{u} = 0$. Последнее предположение неверно, так как на малой толщине слоя плотность меняется от значения ρ_0^I до ρ_0^{II} , т. е. производная внутри слоя велика. Вследствие этого предположения полученные в [18] выражения для коэффициентов γ_{ex} и μ_{ex}' существенно отличаются от введенных формулами (3.5).

4. Уравнение притока тепла. Истинная и избыточная внутренние энергии. Используя метод, аналогичный применяемому в п. 2 и 3, из уравнения (1.5) можно получить уравнение притока тепла для истинной внутренней энергии $U_o = (\rho U_m)_o$ и избыточной внутренней энергии $U_{ex} = (\rho U_m)_{ex}$.

Эти уравнения будут отличаться от обычно используемого уравнения притока тепла [9–16]. Уравнение для U_{ex} в предположении, что температура на толщине межфазного слоя слабо меняется, $T \approx T_0^{I} \approx T_0^{II} \approx T_s$, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U_{ex} + \nabla_{s\tau} u_{s\tau} U_{ex} = & \{P_{33}u_3\}_{-}^{+} - \{\rho u_3 U_m\}_{-}^{+} - \left\{ \rho u_3 \frac{u_s^2}{2} \right\}_{-}^{+} + \\ & + \alpha_{ex} \Theta_s + (\gamma_{ex} - \mu_{ex}') \Theta_s^2 + 2\mu_{ex}' \left(\left(\frac{\partial u_{s1}}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{s2}}{\partial x^2} \right)^2 \right) + \\ & + \mu_{ex}' \left(\frac{\partial u_{s1}}{\partial x^2} + \frac{\partial u_{s2}}{\partial x^1} \right) + \Theta_s \left(\lambda \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right)_{ex} + \nabla_{s\tau} (\kappa_{tex} \nabla_{s\tau} T_s) - \\ & - \{q_3\}_{-}^{+} + \{\lambda u_3 \Theta\}_{-}^{+} + \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{u_s^2}{2} \right\}_{-}^{+} + \\ & + \left(u_3 \frac{\partial}{\partial x^1} \mu'' \left(\frac{\partial u_3}{\partial x^1} + \frac{\partial u_{s\tau}}{\partial x^3} \right) + \mu'' \left(\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^3} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^3} \right)^2 \right) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho u_s^2}{2} - \frac{\partial}{\partial x^1} \rho u_{\tau} \frac{u_s^2}{2} \right)_{ex} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Упростим уравнение (4.1). Предположим, что подынтегральные выражения в последних четырех интегралах в уравнении (4.1) ограничены и в силу малости толщины переходного слоя этими слагаемыми можно пренебречь. Слагаемое $\Theta_s (\lambda \partial u_3 / \partial x^3)_{ex}$, вообще говоря, не мало, так как подынтегральное выражение в этом слагаемом, как показано в п. 3, может стремиться к бесконечности при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$. Это слагаемое в предположении конечности $\lambda^I \partial u_3^I / \partial x^3$ и $\lambda^{II} \partial u_3^{II} / \partial x^3$ можно упростить и привести к виду $\Theta_s \lambda^* \{u_3\}_{-}^{+}$.

При сделанных выше предположениях уравнение (4.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U_{ex} + \nabla_{s\tau} u_{s\tau} U_{ex} = & \{P_{33}u_3\}_{-}^{+} - \{\rho u_3 U_m\}_{-}^{+} - \left\{ \rho u_3 \frac{u_s^2}{2} \right\}_{-}^{+} + \\ & + \alpha_{ex} \Theta_s + (\gamma_{ex} - \mu_{ex}') \Theta_s^2 + 2\mu_{ex}' \left[\left(\frac{\partial u_{s1}}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{s2}}{\partial x^2} \right)^2 \right] + \\ & + \mu_{ex}' \left(\frac{\partial u_{s1}}{\partial x^2} + \frac{\partial u_{s2}}{\partial x^1} \right)^2 + \nabla_{s\tau} (\kappa_{tex} \nabla_{s\tau} T_s) - \{q_3\}_{-}^{+} + \Theta_s \lambda^* \{u_3\}_{-}^{+}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Даже упрощенное уравнение притока тепла для избыточной внутренней энергии (4.2) отличается от известного соотношения на поверхности разрыва [9–16] наличием последнего слагаемого, связанного с вязкостью объемных фаз и массообменом через поверхность раздела фаз.

5. «Тождества Гиббса» для истинных и избыточных величин. Интегрируя уравнение (1.6) по толщине межфазного слоя и вводя понятия истинной (избыточной) энтропии $s_\sigma = (\rho s_m)_\sigma (s_{ex} = (\rho s_m)_{ex})$, получим уравнения, связывающие истинную (избыточную) внутреннюю энергию $U_\sigma (U_{ex})$ с энтропией $s_\sigma (s_{ex})$ и плотностью $\rho_\sigma (\rho_{ex})$, заменяющие тождества Гиббса

$$\begin{aligned} \frac{d_s}{dt} \frac{U_\sigma}{\rho_\sigma} = T_s \frac{d_s}{dt} \frac{s_\sigma}{\rho_\sigma} - \frac{\alpha_\sigma}{\rho_\sigma^2} \frac{d_s}{dt} \rho_\sigma + \frac{1}{\rho_\sigma} \{ (\xi_{t\sigma} - \xi) \rho u_3 \} + \\ + \frac{1}{\rho_\sigma} \int_{-e_2}^{e_1} u_3 \frac{\partial p_n}{\partial x^3} dx^3, \quad \frac{d_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{s\tau} \nabla_{s\tau} \\ \xi = U_m - T s_m + \frac{p_n}{\rho}, \quad \rho_\sigma \xi_{t\sigma} = \int_{-e_2}^{e_1} \rho \xi_t dx^3 \end{aligned}$$

$$\xi_t = U_m - T s_m + p_t / \rho \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d_s}{dt} \frac{U_{ex}}{\rho_{ex}} = T_s \frac{d_s}{dt} \frac{s_{ex}}{\rho_{ex}} - \frac{\alpha_{ex}}{\rho_{ex}^2} \frac{d_s}{dt} \rho_{ex} + \frac{1}{\rho_{ex}} \{ (\xi_{tex} - \xi) \rho u_3 \} - + + \\ + \frac{1}{\rho_{ex}} \left(u_3 \frac{\partial p_n}{\partial x^3} \right)_{ex}, \quad \rho_{ex} \xi_{tex} = (\rho \xi_t)_{ex} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Полученные уравнения (5.1) и (5.2), заменяющие тождества Гиббса для истинных и избыточных величин, существенно отличаются от соответствующих традиционных тождеств Гиббса, имеющих вид [8-16]

$$d \frac{U_k}{\rho_k} = T d \frac{s_k}{\rho_k} - \alpha_k \frac{d \rho_k}{\rho_k^2}, \quad k = \sigma, ex$$

Из уравнений (5.1) и (5.2) с использованием уравнений притока тепла соответственно для истинной и избыточной (4.1) внутренней энергии можно получить уравнения изменения истинной и избыточной поверхностных энтропий s_σ и s_{ex} . Эти уравнения также не совпадают с обычно используемыми уравнениями [8-16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.
2. Гиббс Дж. В. Термодинамические работы. М.-Л.: Гостехиздат, 1950, 492 с.
3. Buff F. P. Curved fluid interfaces. I. The generalized Gibbs - Kelvin equation.- J. Chem. Phys., 1956, v. 25, № 1, p. 146-153.
4. Оно С., Кондо С. Молекулярная теория поверхностного натяжения в жидкостях. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 291 с.
5. Русанов А. И. Фазовые равновесия и поверхностные явления. Л.: Химия, 1967. 388 с.
6. Русанов А. И. 100 лет теории капиллярности Гиббса.- В кн.: Современная теория капиллярности. Л.: Химия, 1980, с. 12-37.
7. Defay R., Prigogine I., Sanfeld A. Surface thermodynamics.- J. Colloid. and Interface Sci., 1977, v. 58, № 3, p. 498-510.
8. Scriven L. E. Dynamics of a fluid interface. Equation of motion for newtonian surface fluids.- Chem. Engng Sci., 1960, v. 12, № 2, p. 98-108.
9. Popielawski J. Thermodynamics theory of irreversible processes in surface systems.- Surface Sci., 1970, v. 19, № 2, p. 355-365.
10. Georgescu L., Moldovan R. General conservation laws for the multi-component phase interface.- Surface Sci., 1970, v. 22, № 1, p. 149-163.
11. Ghez R. Irreversible thermodynamics of a stationary interface.- Surface Sci., 1970, v. 20, № 2, p. 326-334.
12. Georgescu L. A Navier - Stokes type equation for the phase interface of a liquid.- Surface Sci., 1969, v. 15, № 1, p. 177-181.
13. Bedeaux D., Albano A. M., Mazur P. Boundary conditions and non-equilibrium thermodynamics.- Physica, 1976, v. 82A, № 3, p. 438-462.
14. Kovac J. Non-equilibrium thermodynamics of interfacial systems.- Physica, 1977, v. 86A, № 1, p. 1-24.
15. Napolitano L. G. Thermodynamics and dynamics of pure interfaces.- Acta Astronaut., 1978, v. 5, № 9, p. 655-670.
16. Napolitano L. G. Thermodynamics and dynamics of surface phases.- Acta Astronaut., 1979, v. 6, № 9, p. 1093-1112.
17. Slattery J. C. General balance equation for a phase interface.- Industr. and Engng Chem., Fundamentals, 1967, v. 6, № 1, p. 108-115.
18. Гудрич Ф. Ч. Поверхностная вязкость как капиллярное избыточное свойство переноса.- В кн.: Современная теория капиллярности. Л.: Химия, 1980, с. 38-61.
19. Гогосов В. В., Налетова В. А., Чыонг За Бинь, Шапошникова Г. А. Соотношения на поверхности раздела сред при наличии массообмена и неоднородности определяющих параметров вдоль поверхности.- Докл. АН СССР, 1983, т. 268, № 3, с. 566-569.

Москва

Поступила в редакцию
4.VI.1982