

УДК 532.5.011

**НЕСТАЦИОНАРНОЕ СЛАБОВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА
ВРАЩЕНИЯ В ЖИДКОСТИ СО СРЫВОМ СТРУИ**

ШИМКОВИЧ Д. Г.

Вопросы нестационарного слабозамушенного движения тела в жидкости со срывом струй в плоской постановке исследовались в работах [1-3 и др.]. В настоящей работе дается обобщение постановки указанной плоской задачи на пространственный случай обтекания тела вращения по схеме Кирхгофа. Предлагается метод решения полученной краевой задачи, основанный на использовании функции Грина. Последняя строится в специальной системе криволинейных координат.

Для получения эффективного решения применяется преобразование Лапласа. Приводятся выражения для изображений по Лапласу векторов силы и момента, действующих на тело при неустановившемся движении.

1. Пусть идеальная несжимаемая невесомая жидкость при неустановившемся движении ограничена поверхностью $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, где Σ_1 — смоченная часть поверхности тела, Σ_2 — свободная граница, простирающаяся в бесконечность (фиг. 1). Тогда для потенциала течения φ получаем краевую задачу для уравнения Лапласа в области D , занятой жидкостью, при условиях непротекания на Σ_1 и постоянства давления на Σ_2

$$\Delta\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n_{\Sigma_1}} = Vn, \quad p_{\Sigma_2} = p_0 \quad (1.1)$$

где n — нормаль к Σ_1 , направленная внутрь жидкости, V — скорость точек поверхности Σ_1 относительно системы координат, связанной с жидкостью, покоящейся на бесконечности, p_0 — давление на бесконечности.

Линеаризуем задачу (1.1), рассматривая неустановившееся течение жидкости, мало отличающееся от известного невозмущенного осесимметричного течения при движении тела с постоянной скоростью V_0 , $\Sigma_0 = \Sigma_{10} + \Sigma_{20}$ — поверхность, ограничивающая жидкость в этом случае (фиг. 1).

Представим [1] потенциал φ в виде суммы потенциала невозмущенного течения φ_0 и потенциала возмущения Φ

$$\varphi = \varphi_0 + \Phi \quad (1.2)$$

Тогда уравнение $\Delta\varphi = 0$ можно рассматривать в области D_0 , ограниченной поверхностью Σ_0 , что дает $\Delta\Phi = 0$, так как $\Delta\varphi_0 = 0$ в D_0 .

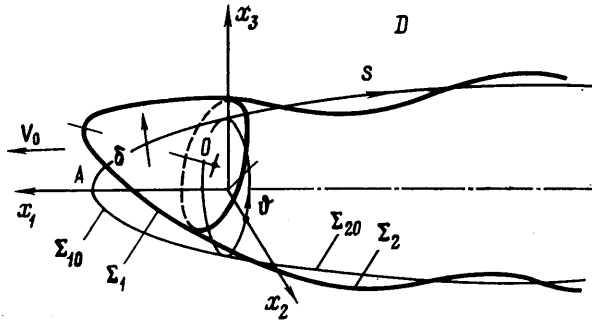
Рассмотрим условие непротекания на Σ_1 . Нормаль n к Σ_1 запишем в виде $n = n_0 + v$, где n_0 — нормаль к Σ_0 . Для скорости точки M поверхности Σ_1 имеем

$$V(M, t) = V_0 + \frac{d}{dt} \delta(M, t) = V_0 + \dot{\delta}(M, t)$$

где $\delta(M, t)$ — смещение т. $M \in \Sigma_1$ относительно Σ_0 , t — время. Тогда

$$Vn = V_0 n_0 + V_0 v + \dot{\delta} n_0 + \dot{\delta} v \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_{\Sigma_1}} = \nabla\varphi n = \nabla\varphi_0 n_0 + \nabla\varphi_0 v + \nabla\Phi n_0 + \nabla\Phi v$$



Фиг. 1

Здесь $\nabla\varphi_0$ и $\nabla\Phi$ вычисляются в точках возмущенной поверхности Σ_1 . При этом с точностью до малых второго порядка $\nabla\Phi|_{\Sigma} = \nabla\Phi|_{\Sigma_0}$. Вводя допущение, аналогичное принятому в [1, 2], что приращение $\nabla\varphi_0$ при переходе от Σ_0 к Σ мало, имеем $\nabla\varphi_0|_{\Sigma} = \nabla\varphi_0|_{\Sigma_0}$. Подставляя теперь (1.3) в (1.1), отбрасывая малые второго порядка δv , $\nabla\Phi v$ и учитывая, что на Σ_0 $\nabla\varphi_0 n_0 = -V_0 n_0$, получим линеаризованное условие непротекания

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n_0|_{\Sigma_0}} = F(M, t) \quad (1.4)$$

где обозначено $F(M, t) = \delta n_0 - V_s v$, $V_s = \nabla\varphi_0 - V_0$.

Давление в жидкости при неустановившемся движении найдем с помощью интеграла Лагранжа — Коши, который в системе координат x_1, x_2, x_3 , связанной с телом при невозмущенном движении, имеет вид [4]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - V_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}$$

где ρ — плотность жидкости.

Подставляя сюда (1.2) и производя линеаризацию аналогично проделанному выше, получим

$$\frac{p-p_0}{\rho|_{\Sigma}} = - \left[-V_0 \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi_0)^2 \right] |_{\Sigma_0} - \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_0 \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \nabla\varphi_0 \nabla\Phi \right] |_{\Sigma_0}$$

где учтено, что $\partial\varphi_0/\partial t = 0$. Замечая, что

$$- \left[-V_0 \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi_0)^2 \right] |_{\Sigma_0} = \frac{p_s - p_0}{\rho}$$

где p_s — давление на Σ_0 при невозмущенном движении, и

$$-V_0 \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \nabla\varphi_0 \nabla\Phi = V_s \frac{\partial\Phi}{\partial s}$$

где обозначено $V_s = |V_s|$, s — длина дуги контура меридионального сечения поверхности Σ_0 (фиг. 1), имеем

$$(p-p_0)|_{\Sigma} = (p_s-p_0)|_{\Sigma_0} + p_n|_{\Sigma} \quad (1.5)$$

$$p_n|_{\Sigma} = -\rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + V_s \frac{\partial\Phi}{\partial s} \right) |_{\Sigma_0} \quad (1.6)$$

Для s также будут использованы обозначения: s_1 — при отсчете s от т.А тела (фиг. 1), s_2 — при отсчете от линии срыва струй. Возвращаясь к (1.1), из (1.5)–(1.6) получим линеаризованное условие постоянства

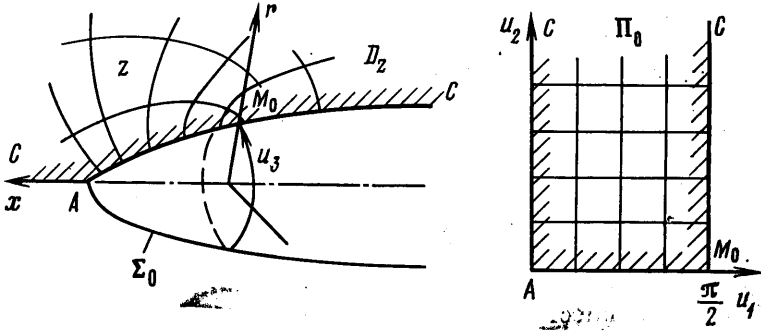
давления на Σ_2

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} \right)_{|\Sigma_{20}} = 0 \quad (1.7)$$

так как на Σ_{20} $p_s = p_0$ и $V_s = V_0$. Этому уравнению удовлетворяет любая непрерывно дифференцируемая функция Φ_0 от разности аргументов $t - s_2/V_0$ (Φ_0 зависит также от ϑ , фиг. 1), так что условие на Σ_2 окончательно запишется следующим образом:

$$\Phi(M, t) = \Phi_0(t - s_2/V_0), \quad M \in \Sigma_{20}$$

Наряду с обозначением $\Phi_0(t - s_2/V_0)$ будем использовать $\Phi_0(M, t)$.



Фиг. 2

Таким образом получаем соответствующую (1.1) линеаризованную краевую задачу

$$\Delta \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_{0|\Sigma_{10}}} = F(M, t), \quad \Phi|_{\Sigma_{20}} = \Phi_0 \left(t - \frac{s_2}{V_0} \right) \quad (1.8)$$

Задаче (1.8) можно дать следующую интерпретацию: положим $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 — гармонические в D_0 функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_{0|\Sigma_{10}}} &= F(M, t), \quad \Phi_1|_{\Sigma_{20}} = 0 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_{0|\Sigma_{10}}} &= 0, \quad \Phi_2|_{\Sigma_{20}} = \Phi_0 \left(t - \frac{s_2}{V_0} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Нетрудно видеть, что Φ_1 представляет собой «ударный» потенциал, а Φ_2 — «наследственный» потенциал течения, оставшегося после внезапного прекращения возмущенного движения.

2. Для решения (1.8) воспользуемся функцией Грина [5], удовлетворяющей следующей краевой задаче:

$$-\Delta G = \delta, \quad \frac{\partial G}{\partial n_{0|\Sigma_{10}}} = 0, \quad G|_{\Sigma_{20}} = 0 \quad (2.1)$$

или эквивалентному обобщенному уравнению

$$(\nabla G, \nabla \eta) = (\delta, \eta), \quad \forall \eta \in P(D_0)$$

где δ — дельта-функция Дирака, $P(D_0)$ — пространство финитных непрерывно дифференцируемых в D_0 функций, равных нулю на Σ_{20} ; G берется из множества $P_0^*(D_0) \subset P^*(D_0)$ функций, обращающихся в нуль на Σ_{20} , $P^*(D_0)$ — пространство, сопряженное к $P(D_0)$.

Для построения функции Грина вводятся [5] криволинейные координаты u_1, u_2, u_3 (фиг. 2); в качестве u_1 и u_2 берется образ прямоугольной сетки в полулосе Π_0 на комплексной плоскости $u = u_1 + iu_2$ при ее конформном отображении $z(u)$ на область D_2 .

При этом

$$x_1 = x(u_1, u_2), \quad x_2 = r(u_1, u_2) \cos u_3, \quad x_3 = r(u_1, u_2) \sin u_3, \quad (2.2)$$

$$r(u_1, u_2) = \operatorname{Re} z(u), \quad x(u_1, u_2) = \operatorname{Im} z(u)$$

$$g_{nk} = 0 \quad (n \neq k), \quad g_{11} = g_{22} = g^2, \quad g_{33} = r^2, \quad g = |dz/du|$$

$$\nabla V \nabla U = \frac{1}{g^2} \left[\frac{\partial V}{\partial u_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} + \frac{\partial V}{\partial u_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} + \left(\frac{g}{r} \right)^2 VU \right]$$

$$\Delta V = \frac{1}{rg^2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(r \frac{\partial V}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(r \frac{\partial V}{\partial u_2} \right) + \left(\frac{g}{r} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial u_3^2} \right]$$

$$d\tau = rg^2 du_1 du_2 du_3, \quad d\sigma = rg du_1 du_3 \text{ на } \Sigma_{10}, \quad d\sigma = rg du_2 du_3 \text{ на } \Sigma_{20}$$

где g_{nk} — метрический тензор, $d\tau$ — элемент объема, $d\sigma$ — элемент поверхности Σ_0 .

Функция Грина ищется в виде суммы ряда по некоторой плотной в $P(D_0)$ системе функций, в качестве которой можно использовать [5]

$$\Phi_i^m(u_1, u_2) \left\{ \begin{array}{l} \cos m u_3 \\ \sin m u_3 \end{array} \right\} \quad (m=0, 1, 2, \dots, i=1, 2, \dots)$$

Несколько лучшие результаты получаются с использованием весовой функции $\exp(2u_2)$ вместо $\operatorname{ch}(2u_2)$ в [5], т. е.

$$\Phi_i^m(u_1, u_2) = \frac{J_m((2u_1/\pi)\gamma_k^m) \cos 2(l-1) \operatorname{arctg} u_2}{\exp(2u_2) \sqrt{1+u_2^2}} \quad (i=1, 2, \dots, k, l=1, 2, \dots)$$

где J_m — функция Бесселя порядка m , γ_k^m — k -й нуль J_m .

Удобно ортонормировать Φ_i^* в энергетическом пространстве оператора

$$(2.1), \text{ т. е. построить функции } \Psi_n^m = \sum_{i=1}^n c_{ni}^m \Phi_i^m, \text{ где коэффициенты } c_{ni}^m$$

определяются из условий нормировки $\rho_m(\Psi_i^m, \Psi_j^m) = \delta_{ij} \delta_m$, δ_{ij} — символ Кронеккера

$$\delta_0 = (2\pi)^{-1}, \quad \delta_m = \pi^{-1} \quad (m=1, 2, \dots)$$

$$\rho_m(V, U) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial V}{\partial u_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} + \frac{\partial V}{\partial u_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} + m^2 \left(\frac{g}{r} \right)^2 VU \right] r du_1 du_2$$

Для определения c_{ni}^m можно использовать процесс ортогонализации Грамма — Шмидта. В этом случае функция Грина будет иметь вид

$$G(M, N) = \Psi_i^m(u_1, u_2) \Psi_i^m(\xi_1, \xi_2) \cos m(u_3 - \xi_3) \quad (2.3)$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование), где $M = (u_1, u_2, u_3)$, $N = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — точки области D_0 .

Найдем теперь вид решения задачи (1.8). Полагая во второй формуле Грина [4]

$$\int_{D_0} (V \Delta U - U \Delta V) d\tau = \int_{\Sigma_0} \left(U \frac{\partial V}{\partial n_0} - V \frac{\partial U}{\partial n_0} \right) d\sigma \quad (2.4)$$

Здесь $V = \Phi$, $U = G$. Используя (1.8), (2.1), получим

$$\Phi(M, t) = - \int_{\Sigma_{10}} G(M, N) F(N, t) d\sigma + \int_{\Sigma_{20}} \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_0(N)} \Phi_0(N, t) d\sigma \quad (2.5)$$

Пусть известно какое-либо продолжение Ψ_0 функции Φ_0 с Σ_{20} в область D_0 , обладающее свойствами

$$\Psi_0(M, t) = \Phi_0(M, t), \quad M \in \Sigma_{20} \quad (2.6)$$

$$\Psi_0 \in C^{(2)}(D_0) \cap C^{(1)}(\Sigma_0), \quad \frac{\partial \Psi_0}{\partial n_0|_{\Sigma_0}} = 0$$

Тогда, полагая в (2.4) $U=G$ и $V=\Psi_0$, найдем

$$\int_{\Sigma_{20}} \frac{\partial G(M, N)}{\partial n_0(N)} \Phi_0(N, t) d\sigma = \Psi_0(M, t) + \int_{D_0} G(M, N) \Delta \Psi_0(N, t) d\tau$$

что дает возможность записать (2.5) следующим образом:

$$\Phi(M, t) = \Psi_0(M, t) - \int_{\Sigma_{10}} G(M, N) F(N, t) d\sigma + \int_{D_0} G(M, N) \Delta \Psi_0(N, t) d\tau \quad (2.7)$$

Несмотря на функциональную эквивалентность формул (2.5) и (2.7), последняя предпочтительнее при использовании в расчетах, так как здесь исключено дифференцирование рядов, через которые выражается функция Грина (2.3); при этом (2.7) явно удовлетворяет граничному условию на Σ_{20} . Вопрос о построении Ψ_0 будет рассмотрен ниже.

Сравнивая (1.8), (1.9) и (2.7), можно установить, что

$$\Phi_1(M, t) = - \int_{\Sigma_{10}} G(M, N) F(N, t) d\sigma$$

$$\Phi_2(M, t) = \Psi_0(M, t) + \int_{D_0} G(M, N) \Delta \Psi_0(N, t) d\tau$$

Аналогичный смысл имеют члены в правой части (2.5).

3. Найдем вид функции $F(M, t)$ в (1.4), считая обтекаемое тело недеформируемым. В этом случае нетрудно получить

$$\delta(M, t) = \delta_j(M) v_j(t) \quad (j=1, 2, \dots, 5) \quad (3.1)$$

$$\delta_j(M) = e_j \quad (j=1, 2, 3), \quad \delta_4 = e_2 \times r, \quad \delta_5 = e_3 \times r$$

$$r = x(u_1, 0) e_1 + r(u_1, 0) (\cos u_3 e_2 + \sin u_3 e_3)$$

$$n_0 = \sin \Psi e_1 + \cos \Psi (\cos u_3 e_2 + \sin u_3 e_3)$$

$$n = n_0 + \cos \Psi (v_4 \sin u_3 - v_5 \cos u_3) e_1 + \sin \Psi (v_3 e_2 - v_4 e_3)$$

$$\tau_0 = -\cos \Psi e_1 + \sin \Psi (\cos u_3 e_2 + \sin u_3 e_3)$$

$$V_s = V_0 \gamma(u_1) \tau_0, \quad \gamma = V_s / V_0$$

где $v_i(t)$ — проекции линейного (v_1, v_2, v_3) и углового (v_4, v_5) векторов смещений точки O тела (фиг. 1) при неустановившемся движении на орты e_1, e_2, e_3, e_2, e_3 соответственно, $\Psi = \Psi(u_1)$ — угол между касательной к образующей поверхности и осью $-x_1$, τ_0 — единичный вектор, касательный к образующей Σ_{10} . Подставляя (3.1) в выражение для $F(M, t) = -\delta n_0 - V_s v$, $v = n - n_0$, найдем:

$$F(M, t) = \dot{v}_k(t) F_k^v(M) + V_0 v_k(t) F_k^u(M) \quad (3.2)$$

$$F_k^v = F_{ik}^v \varphi_i, \quad F_k^u = F_{ik}^u \varphi_i \quad (k=1, 2, \dots, 5, \quad i=1, 2, 3)$$

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = \cos u_3, \quad \varphi_3 = \sin u_3$$

$$F_{11}^v = \sin \Psi, \quad F_{22}^v = F_{33}^v = \cos \Psi, \quad F_{25}^v = -F_{34}^v =$$

$$= x(u_1, 0) \cos \Psi - r(u_1, 0) \sin \Psi, \quad F_{34}^u = -F_{25}^u = \gamma$$

Для остальных i, k $F_{ik}^v=0$, $F_{ik}^u=0$.

Используя (3.1), получим соотношение для нестационарной составляющей давления (1.6) на Σ_1

$$\frac{p_n}{\rho} = - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{V_0 \gamma(u_1)}{g(u_1, 0)} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right]_{\Sigma_{10}} \quad (3.3)$$

так как на Σ_{10} $ds_1 = g(u_1, 0) du_1$.

4. В (1.8) входит неизвестная функция Φ_0 . Определим ее. Рассмотрим поведение функции g при $M \rightarrow M_0$, где M_0 — какая-либо точка на линии срыва струй. Конформное отображение $z(u)$ в окрестности точки M_0 имеет вид $z(u) = c(u-u_0)^2 + \dots$, где $u_0 = \pi/2$, c — некоторая константа. Отсюда

$$g = |dz/du| = 2|c||u-u_0| + \dots \quad (4.1)$$

т. е. при $M \rightarrow M_0$ функция $g \sim |u-u_0|$.

Таким образом, член в (3.3), содержащий g^{-1} , будет стремиться в общем случае к бесконечности. Для ограниченности давления на линии срыва струй необходимо потребовать, чтобы

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} = \lim_{M \rightarrow M_0} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} \right) = 0 \quad (4.2)$$

Смысл (4.2) поясняется на фиг. 3, откуда видно, что функция Φ_0 , определяющая величину потенциала Φ_2 , индуцированного свободной поверхностью при возмущенном движении, должна быть такой, чтобы в любой момент времени $\alpha_1 = \alpha_2$.

Члены в (2.5), (2.7), содержащие функцию Φ_0 , зависящую от $t-s_2/V_0$, имеют вид свертки. При исследовании таких выражений целесообразно [2] использовать преобразование Лапласа.

Изображение Φ_0 найдем, воспользовавшись выражением (1.7), которое после преобразования по Лапласу примет вид

$$\Omega \Phi_0^* + V_0 \frac{d\Phi_0^*}{ds_2} = 0, \quad \Phi_0^*(u_3, \Omega) = \int_0^{\infty} \Phi_0(u_3, v) e^{-\Omega v} dv$$

откуда

$$\Phi_0^*(u_3, \Omega) = c(u_3, \Omega) \exp(-\Omega s_2/V_0) \quad (4.3)$$

где $c(u_3, \Omega)$ — некоторая неизвестная функция. Разложив $c(u_3, \Omega)$ в ряд Фурье по координате u_3

$$c(u_3, \Omega) = c_i(\Omega) \varphi_i(u_3)$$

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = \cos u_3, \quad \varphi_3 = \sin u_3, \quad \varphi_4 = \cos 2u_3, \dots$$

и подставив в (4.3), получим

$$\Phi_0^*(u_3, \Omega) = c_i(\Omega) \varphi_i(u_3) \exp(-\Omega s_2/V_0) \quad (4.4)$$

Используя (4.4), построим функцию Ψ_0^* — изображение по Лапласу от Ψ_0 , удовлетворяющую (2.6)

$$\Psi_0^*(u_1, u_2, u_3, \Omega) = c_i(\Omega) \varphi_i(u_3) \exp(\Omega S(u_1, u_2)/V_0)$$

где $S(u_1, u_2) = s_0 - s_1(u_1) - s_2(u_2)$, $s_0 = s_1(\pi/2)$

Свойство $d\Psi_0^*/dn_0 = 0$ на Σ_{10} вытекает из равенств

$$\frac{d\Psi_0^*}{dn_{0|\Sigma_{10}}} = \frac{d\Psi_0^*}{g_1 du_2} = \frac{1}{g_1} \frac{d\Psi_0^*}{ds_2} \frac{ds_2}{du_2} = \frac{g_2(0)}{g_1} \frac{d\Psi_0^*}{ds_2}$$

где обозначено $g_1(u_1) = g(u_1, 0)$, $g_2(u_2) = g(\pi/2, u_2)$, и (4.1), согласно которому $g_2(0) = 0$.

Также имеем

$$\frac{d\Psi_0^*}{du_1} = \frac{d\Psi_0^*}{ds_1} g_1 = 0 \quad \left(u_1 = \frac{\pi}{2}, u_2 = 0 \right) \quad (4.5)$$

Используя выражение для оператора Δ в (2.2) и соотношения $ds_1 = =g_1 du_1$, $ds_2 = g_2 du_2$, получим

$$\Delta \Psi_0^* = F_{0i} c_i \varphi_i \exp(\Omega S/V_0)$$

$$F_{0i} = \left[\left(\frac{\Omega}{V_0} \right)^2 r(g_1^2 + g_2^2) - \frac{\Omega}{V_0} \left(\frac{\partial r g_1}{\partial u_1} + \frac{\partial r g_2}{\partial u_2} \right) - m_i^2 \left(\frac{g}{r} \right)^2 \right] \frac{1}{r g^2}$$

$$m_i^2 = \begin{cases} 0, & i=1 \\ 1, & i=2, 3 \end{cases}$$

Теперь нетрудно определить c_i . Применяя к (2.7) преобразование Лапласа и подставляя в (4.2) с учетом (4.5), разлагая, используя соотношения

$$\begin{Bmatrix} \sin m u_3 \\ \cos m u_3 \end{Bmatrix} = \delta_m \int_0^{2\pi} \cos m(u_3 - \xi_3) \begin{Bmatrix} \sin m \xi_3 \\ \cos m \xi_3 \end{Bmatrix} d\xi_3$$

полученное уравнение в ряд Фурье по координате u_3 и приравнявая нулю коэффициенты разложения, найдем

$$c_i(\Omega) = (\Omega d_{ik}^v + d_{ik}^u) U_k(\Omega) \quad (i=1, 2, 3, k=1, 2, \dots, 5) \quad (4.6)$$

где

$$d_{ik}^v = p_{ik}^v / R_i(\Omega), \quad d_{ik}^u = p_{ik}^u / R_i(\Omega)$$

$$p_{ik}^v = \int_{\Sigma_{10}} \frac{\partial G(M_0, N)}{\partial u_1} F_{ik}^v \varphi_i d\sigma, \quad p_{ik}^u = \int_{\Sigma_{10}} \frac{\partial G(M_0, N)}{\partial u_1} F_{ik}^u \varphi_i d\sigma$$

$$R_i(\Omega) = \int_{D_0} \frac{\partial G(M_0, N)}{\partial u_1} F_{0i} \varphi_i \exp(\Omega S/V_0) d\tau$$

$$U_k(\Omega) = \int_0^{\infty} v_k(t) e^{-\Omega t} dt \quad (\text{по } i \text{ не суммировать}).$$

Здесь и далее считаем, что $v_k(0) = 0$.

Используя (4.6), для изображения Φ^* потенциала возмущения Φ (2.7), получим

$$\Phi^*(M, \Omega) = U_k(\Omega) \left\{ \Omega \left[C_k^v - \int_{\Sigma_{10}} G F_k^v d\sigma + \int_{D_0} G P_k^v d\tau \right] + \right. \\ \left. + \left[C_k^u - \int_{\Sigma_{10}} G F_k^u d\sigma + \int_{D_0} G P_k^u d\tau \right] \right\} \quad (4.7)$$

где обозначено

$$C_k^v(M, \Omega) = d_{ik}^v \varphi_i \exp(\Omega S/V_0)$$

$$P_k^v(N, \Omega) = d_{ik}^v \varphi_i F_{0i}(N, \Omega) \exp(\Omega S/V_0)$$

(аналогично для членов с индексом u).

5. Рассмотрим вопрос о нагрузках, действующих на обтекаемое тело. При этом, так же как и в п. 4, целесообразно определять не сами нагрузки, а их изображения по Лапласу.

Сила R и момент M (относительно т. 0, фиг. 1), действующие на тело, равны

$$R = - \int_{\Sigma_1} (p - p_0) n d\sigma, \quad M = - \int_{\Sigma_1} (p - p_0) r \times n d\sigma$$

Подставляя сюда (1.5)–(1.6) и n из (3.1), отбрасывая при этом малые второго

порядка $p_n v$, $p_n r \times v$ и применяя преобразование Лапласа, для изображений R^* и M^* получим:

$$R^* = R_0^* + R_1^* \quad (5.1)$$

$$R_0^* = c_{x0} \frac{\rho V_0^2}{2} \pi r_0^2 \left[-\frac{e_1}{\Omega} - U_5(\Omega) e_2 + \bar{U}_4(\Omega) e_3 \right]$$

$$R_1^* = \rho \int_{\Sigma_{10}} \left[\Omega \Phi^* + V_0 \gamma \frac{d\Phi^*}{ds_1} \right] n_0 d\sigma - \rho \int_{\Sigma_{10}} \Phi(N, 0) n_0 d\sigma$$

$$M^* = \rho \int_{\Sigma_{10}} \left[\Omega \Phi^* + V_0 \gamma \frac{d\Phi^*}{ds_1} \right] r \times n_0 d\sigma - \rho \int_{\Sigma_{10}} \Phi(N, 0) r \times n_0 d\sigma$$

$$\Phi(N, 0) = -\dot{v}_k(0) \int_{\Sigma_{10}} GF_k^v d\sigma$$

где c_{x0} — коэффициент сопротивления тела при невозмущенном движении, r_0 — радиус миделя тела. При этом учтено, что появляющийся при линеаризации в выражении для M интеграл $\int_{\Sigma_{10}} (p_s - p_0) r \times n d\sigma = 0$ ввиду осевой симметрии тела.

Окончательные формулы для R^* и M^* удобно записать в безразмерном виде, для чего обезразмерим все величины с помощью основных размерных параметров ρ , V_0 , r_0 . Подставляя затем (4.7) в (5.1) и выполняя интегрирование по частям для членов с $d\Phi^*/ds_1$, найдем

$$R^*(\omega) = \left[c_R(\omega) - e_1 \frac{c_{x0}}{\omega} \right] \frac{\rho V_0^2}{2} \pi r_0^2 \quad (5.2)$$

$$M^*(\omega) = c_m(\omega) \frac{\rho V_0^2}{2} \pi r_0^2$$

где

$$c_R(\omega) = e_i [\omega^2 c_{ik}^a(\omega) + \omega c_{ik}^v(\omega) + c_{ik}^u(\omega)] U_k(\omega) + e_i \dot{v}_k(0) c_{ik}^{*a}$$

$$c_m(\omega) = e_i [\omega^2 m_{ik}^a(\omega) + \omega m_{ik}^v(\omega) + m_{ik}^u(\omega)] U_k(\omega) + e_i \dot{v}_k(0) m_{ik}^{*a}$$

$$(i=1, 2, 3, k=1, 2, \dots, 5)$$

$$c_{ik}^a = \frac{2}{\pi} \int_{\Sigma_{10}} n_{0i} \left[(1-\gamma) C_k^v - \int_{\Sigma_{10}} GF_k^v d\sigma + \int_{D_0} GP_k^v d\tau \right] d\sigma$$

$$c_{ik}^v = \frac{2}{\pi} \int_{\Sigma_{10}} n_{0i} \left[(1-\gamma) C_k^u - \int_{\Sigma_{10}} GF_k^u d\sigma + \int_{D_0} GP_k^u d\tau \right] d\sigma -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_{\Sigma_{10}} N_{0i} \left[- \int_{\Sigma_{10}} GF_k^v d\sigma + \int_{D_0} GP_k^v d\tau \right] d\sigma$$

$$c_{ik}^u = \frac{2}{\pi} \int_{\Sigma_{10}} N_{0i} \left[- \int_{\Sigma_{10}} GF_k^u d\sigma + \int_{D_0} GP_k^u d\tau \right] d\sigma - c_{x0} \delta_{ik}'$$

$$c_{ik}^{*a} = - \frac{2}{\pi} \int_{\Sigma_{10}} n_{0i} \left[\int_{\Sigma_{10}} GF_k^v d\sigma \right] d\sigma$$

$$n_{0i} = n_0 e_i, \quad N_{0i} = N_0 e_i, \quad N_0 = \frac{\partial \gamma n_0 r}{r \partial s_1}, \quad \omega = \frac{\Omega r_0}{V_0}$$

Здесь $\delta_{ik}' = (1$ для $i=2, k=5$; -1 для $i=3, k=4$; 0 — для остальных i, k).

Выражения для m_{ik}^a , m_{ik}^v , m_{ik}^u имеют аналогичный вид, с той разницей, что n_0 заменяется на $r \times n_0$ и $\delta_{ik}' = 0$.

Используя (2.3), (3.1), (3.2) и (4.6), нетрудно установить, что для тела вращения матрицы c^a и m^a имеют структуру

$$c^a = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & \mu_2 - \mu_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta_1 \zeta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 \end{pmatrix}$$

Аналогично для $c^v, m^v; c^u, m^u; c^{*a}, m^{*a}$. Соответствующие ненулевые компоненты этих матриц будем обозначать

$$c^v: (v_1, v_2, v_3), \quad c^u: (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3), \quad c^{*a}: (\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*) \\ m^v: (\pi_1, \pi_2), \quad m^u: (\rho_1, \rho_2), \quad m^{*a}: (\zeta_1^*, \zeta_2^*)$$

Члены в (5.2), содержащие c_{ik}^{*a} и m_{ik}^{*a} пропорциональны присоединенным массам при ударе [5].

Для расчета нагрузок (5.2) необходимо знать параметры невозмущенного осесимметричного течения и конформно отображающую функцию $z(u)$. Здесь могут быть использованы вихревой метод (см. [6] и др.) и известные [7] способы конформного отображения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И., Хаскинд М. Д. Струйное обтекание контура, совершающего малые колебания. — ПММ, 1953, т. 17, № 5, с. 599–603.
2. Кузнецов А. В. Нестационарные возмущения течений жидкости со свободными границами. Казань: Казанск. ун-т, 1975. 144 с.
3. Woods L. C. Unsteady plane flow past curved obstacles with infinite wakes. — Proc. Roy. Soc., 1955, v. A229, № 1177, p. 152–180.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
5. Шимкович Д. Г. Удар тела вращения, обтекаемого со срывом струй. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6, с. 176–180.
6. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука. 1979. 536 с.
7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.IV.1982